

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЄДИНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОСТІ КОНТАКТНОГО ТЕРМООПОРУ

Юрій Мандзик

Львівський національний університет імені Івана Франка

Дослідимо модель термопружного контакту для довгого порожнистого колового ортотропного циліндра з внутрішнім радіусом r_1 та зовнішнім – r_0 , який поміщений у жорстку обойму. Поперечний переріз розглядуваної конструкції зображено на рис. 1.

Температура внутрішності циліндра та пружний обойми змінюються відповідно до законів $T_1^e(t) = T_*\theta_1^e(t)$, $T_2^e(t) = T_*\theta_2^e(t)$. Вважатимемо, що у початковий момент часу, коли $\theta_1^e(0) = \theta_2^e(0) = 0$, а температура циліндра також нульова, між зовнішньою поверхнею циліндра та обоймою існує невеликий прозор g_0 (або натяг, коли $g_0 < 0$), причому $|g_0/r_0| \ll 1$. Механічний вплив на циліндр зводиться до дії на нього жорсткої обойми, коли згаданий вище прозор у системі дорівнює нулю.

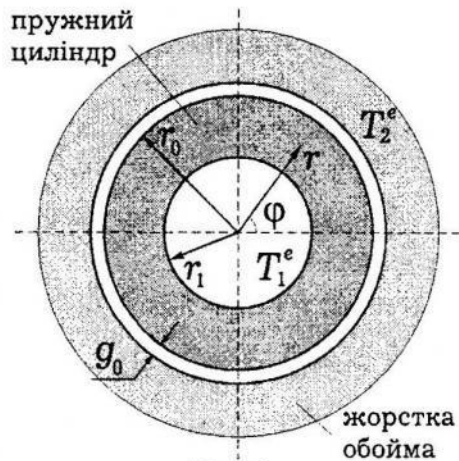


Рис. 1.

На внутрішній межі циліндра відбувається теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну α_1^T .

Між зовнішньою поверхнею циліндра та жорсткою обоймою припускати існування термічного опору R , величина якого приймається деякою функцією $R_s(g)$ від прозору g та функцією $R_c(P)$ від контактної тиску P . Вважатимемо, що ці функції є монотонно спадними зі зменшенням прозору та зі збільшенням контактної тиску (рис. 2). У випадку наявності прозору припускаємо, що термічний опір лінійно від нього залежить. Такий вибір вигляду функції R зумовлений результатами експериментальних та теоретичних праць [4, 6].

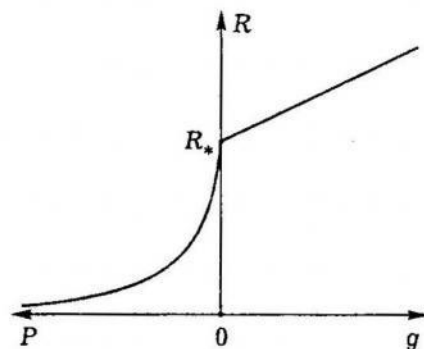


Рис. 2.

Запропонована конструкція може перебувати при $t \in t_s$ в умовах наявності прозору $g(t) > 0$, або при $t \in t_c$ в умовах пружного контакту $P(t) > 0$, причому $t_s \cup t_c = (0, \infty)$.

Подібну задачу з урахуванням нелінійності контактної термоопору, однак для ізотропного стрижня розглядали у праці [2], а для системи двох таких стрижнів – у [5].

У силу наших припущень циліндр перебуватиме в умовах плоскої деформації, а напружено-деформований стан описуватиметься крайовою задачею [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{K^2}{r^2} u_r = \delta_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \delta_2 \frac{T}{r}, \quad (2)$$

де, як і у попередньому розділі, $K^2 = \beta_{11}/\beta_{22}$, $\delta_1 = (\beta_1\beta_{22} - \beta_2\beta_{12})/\beta_{22}$, $\delta_2 = (\beta_1\beta_{22} - \beta_2\beta_{12} - \beta_2\beta_{11} + \beta_1\beta_{12})/\beta_{22}$, а $\beta_{nk}^{(j)}$ та $\beta_n^{(j)}$ для випадку плоскої деформації мають вигляд [3]

$$\beta_{nk} = a_{nk} - a_{n3}a_{3k}/a_{33}, \quad \beta_n = \alpha_n - a_{n3}\alpha_3/a_{33}, \quad n = 1, 2; \quad k = 1, 2.$$

1. Випадок існування прозору між обіймою та циліндром

$$t \in t_s, \quad g(t) = g_0 - u_r(r_0, t) > 0 \quad \text{— прозір у системі}$$

Механічні крайові умови

$$r = r_1: \quad \sigma_r(r_1, t) = 0, \quad (3)$$

$$r = r_0: \quad \sigma_r(r_0, t) = 0. \quad (4)$$

Теплові умови

$$r = r_1: \quad \lambda \partial T / \partial r = \alpha_1^T [T - T_1^e(t)], \quad (5)$$

$$r = r_0: \quad \lambda \partial T / \partial r = [T_2^e(t) - T] / R_s(g). \quad (6)$$

2. Випадок наявності у системі термopружного контакту

$$t \in t_c, \quad g(t) = 0, \quad P(t) > 0 \quad \text{— контактний тиск.}$$

Механічні крайові умови

$$r = r_1: \quad \sigma_r(r_1, t) = 0, \quad (7)$$

$$r = r_0: \quad u_r(r_0, t) = g_0. \quad (8)$$

Теплові умови

$$r = r_1: \quad \lambda \partial T / \partial r = \alpha_1^T (T - T_1^e(t)), \quad (9)$$

$$r = r_0: \quad \lambda \partial T / \partial r = (T_2^e(t) - T) / R_c(P). \quad (10)$$

Для обох випадків початкова умова на температуру

$$t = 0: \quad T(r, 0) = 0.$$

Час перебування конструкції в умовах наявності прозору чи контактної тиску можна подати у такому вигляді:

$$t_s = (0, t_1) \cup (t_2, t_3) \cup (t_4, t_5) \cup \dots \cup (t_{2i}, t_{2i+1}) \cup \dots \quad g(t) > 0,$$

$$t_c = (t_1, t_2) \cup (t_3, t_4) \cup (t_5, t_6) \cup \dots \cup (t_{2i-1}, t_{2i}) \cup \dots \quad P(t) > 0.$$

З огляду на нелінійність функції термічного опору R розглядувана задача є суттєво нелінійною. Для її розв'язування ми скористалися інтегральним перетворенням Лапласа за часом і в результаті одержали сис-

тему інтегральних рівнянь Вольтера – Гамерштейна. Цю систему розв'язували методом квадратур та ітерацій.

Задачу було повністю обезрозмірено і в процесі її розв'язування введено в розгляд функцію q , яка при $q > 0$ є безрозмірним прозором у системі, а при $q < 0$ – з точністю до множника – контактний тиск, тобто

$$q(\tau) = \begin{cases} \bar{g}(\tau), & q(\tau) > 0; \tau \in \tau_s, \\ -p(\tau)/p_0, & q(\tau) < 0; \tau \in \tau_c, \end{cases} \quad p_0 - \text{певна стала.} \quad (11)$$

Це дало змогу звести дві розглядувані задачі (випадки наявності прозору та контакту у системі) до однієї постановки задачі на температуру.

Коли ввести для відповідних стаціонарних величин позначення

$$q_s = \lim_{\tau \rightarrow \infty} q(\tau), \quad \theta_{i*}^e = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_i^e(\tau), \quad (12)$$

і прийняти конкретний вигляд термоопору у вигляді

$$\bar{R}(q) = \begin{cases} 1 + \psi_s q, & q \geq 0, \\ 1/(1 - \psi_c q), & q < 0, \end{cases} \quad (\psi_s, \psi_c - \text{визначаються з експерименту}), \quad (13)$$

то у стаціонарному випадку q_s набуде вигляду

$$q_s = f_\infty + \xi f(q_s), \quad (14)$$

де $f_\infty = \bar{g}_0 + A_G S_1 \theta_{1*}^e / G$; $f(q_s) = [\bar{R}(q_s) / (\bar{R}_1 + \bar{R}_1^s) + 1]^{-1}$; $\delta = \theta_{2*}^e - \theta_{1*}^e$;

$$\xi = \frac{S_1 \gamma \delta}{G(\bar{R}_1 + \bar{R}_1^s)}; \quad \xi_0 = \frac{1}{G} A_G S_1; \quad \gamma = A_G \bar{R}_1^s + A_a \bar{R}_1 - \frac{1}{\lambda} A_{GK}; \quad \hat{R} = 1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_1^s;$$

$$A_{GK} = a_+ G_{K+} + a_- G_{K-} \rho_1^{2K}; \quad A_G = a_+ G_+ + a_- G_- \rho_1^{2K}; \quad A_a = a_+ + a_- \rho_1^{2K};$$

$$G_\pm = 1 - \rho_1^{1 \pm K}; \quad G_{K\pm} = \frac{1 - \rho_1^{1 \pm K}}{1 \pm K}; \quad a_\pm = \frac{e_\pm}{x_{1\mp}(1 \pm K)}; \quad \Delta_s = \bar{R}_1 + \bar{R}_1^s + \bar{R}(q_s);$$

$$S_1 = x_{1+} + x_{1-}; \quad G = 1 - \rho_1^{2K}; \quad e_\pm = [d_2 - (1 \pm K) d_1] / 2K; \quad x_{1\pm} = (K b_{22} \pm b_{12}) / m;$$

$$m = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2; \quad n_1 = b_1 b_{22} - b_2 b_{12}; \quad \bar{R}_1^s = (\alpha_1^T \rho_1 R_*)^{-1};$$

$\bar{R}_1 = -\ln \rho_1 / \lambda$ – відповідно відносні опори тепловіддачі всередині системи та теплопровідності циліндра; $b_{nk} = \beta_{nk} E_*$ ($n, k = 1, 2$); $b_k = \beta_k / \alpha_*$, $d_k = \delta_k / \alpha_*$ ($k = 1, 2$); $\bar{g}_0 = g_0 / u_*$ – безрозмірний прозор у початковий момент часу; $\rho = r / r_0$ – безрозмірний радіус, ($\rho_1 = r_1 / r_0$); u_*, R_*, α_*, E_* – певні обезрозмірюючі параметри.

Формулу (14), з урахуванням (13), можна переписати у вигляді

$$\bar{g}_0 = g(q_s) = \begin{cases} g_+(q_s) = q_s - \xi_0 \theta_{1*}^e - \xi(\hat{R} - 1) / (\hat{R} + \psi_s q_s), & q_s \geq 0, \\ g_-(q_s) = q_s - \xi_0 \theta_{1*}^e - \xi - \xi / [(\hat{R} - 1) \psi_c q_s - \hat{R}], & q_s < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) є стаціонарним розв'язком поставленої задачі. З огляду на це, проведено детальне дослідження поведінки функцій g_+ і g_- залежно від вхідних даних. Визначено, що при $\xi \leq -\xi_+$ та $g^{(2)} < \bar{g}_0 < g^{(1)}$ чи $-\xi_+ < \xi < -\xi_-$ та $g^{(0)} < \bar{g}_0 < g^{(1)}$ у системі існує три стаціонарні стани. Коли

$\xi \leq -\xi_+$ та $(\bar{g}_0 = g^{(1)})$ або $\bar{g}_0 = g^{(2)}$ чи $-\xi_+ < \xi < -\xi_-$ та $(\bar{g}_0 = g^{(0)})$ або $\bar{g}_0 = g^{(1)}$ – то існуватиме два розв'язки. В усіх інших випадках розв'язок єдиний, причому

$$\begin{aligned}\xi_+ &= \frac{\hat{R}^2}{\psi_s(\hat{R}-1)}; \quad \xi_- = \frac{\hat{R}^2}{\psi_c(\hat{R}-1)}; \quad g^{(0)} = g_-(0) = g_+(0) = -\xi_0 \theta_{1*}^e - \xi \frac{\hat{R}-1}{\hat{R}}; \\ g^{(1)} &= g_-(q^{(1)}); \quad q^{(1)} = \frac{1}{\psi_c(\hat{R}-1)} \left[\hat{R} - \sqrt{-\xi \psi_c(\hat{R}-1)} \right]; \\ g^{(2)} &= g_+(q^{(2)}); \quad q^{(2)} = \frac{1}{\psi_s} \left[\sqrt{-\xi \psi_s(\hat{R}-1)} - \hat{R} \right].\end{aligned}$$

Для дослідження стійкості знайдених стаціонарних розв'язків нелінійної задачі було проведено її лінеаризацію в околі цих розв'язків. З аналізу характеристичного рівняння лінеаризованої задачі з'ясовано, що нестійкими будуть лише стаціонарні розв'язки

- 1) які перебувають у межах $q^{(1)} \leq q < 0$, коли $-\xi_+ < \xi \leq -\xi_-$;
- 2) які належать проміжку $q^{(1)} \leq q \leq q^{(2)}$, коли $\xi \leq -\xi_+$ ($q^{(1)} \leq 0$; $q^{(2)} \geq 0$).

Отже, узагальнюючи попередні дослідження, доходимо висновку, що у випадку, коли існують один або два стаціонарні розв'язки, то вони будуть асимптотично стійкими. Коли ж існують три стаціонарні розв'язки, то з них лише середній буде нестійким, а крайні будуть асимптотично стійкі.

1. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник. – К: ІЗМН, 1996. – 204 с.
2. Пир'єв Ю. О., Мокрик Р. І. Нелінійна нестационарна задача про термопружний контакт з урахуванням термічного опору // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Т. 43. – С. 51–55.
3. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов, 1967. – 167 с.
4. Barber J.R., Zhang R. Transient behaviour and stability for the thermoelastic contact of two rods of dissimilar materials // Int. J. Mech. Sci. – 1988. – Vol. 30, No. 9. – P. 691–704.
5. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. Transient response in a one-dimensional model of thermoelastic contact // J. of Applied Mechanics. – 1996. – Vol. 63. – P. 575–581.
6. Shlykow Y.P., Ganin A. Thermal resistance of metallic contacts // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1964. – Vol. 7. – P. 921–929.

INVESTIGATION OF UNIQUENESS AND STABILITY OF TRANSIENT THERMOELASTICITY PROBLEM SOLUTION FOR HOLLOW ORTHOTROPIC CYLINDER WITH NONLINEAR CONTACT THERMAL RESISTANCE

Yuriy Mandzyk

Ivan Franko National University of L'viv

The investigation of uniqueness and stability of the solution of quasistatic thermoelasticity problem for circular hollow orthotropic cylinder which is placed in a hard bush is performed. Between the cylinder and a hard bush the presence of a nonlinear thermal resistance is assumed. Thus the considered problem is a nonlinear one.

Стаття надійшла до редколегії 21.11.1999