

УДК 539.3

ВЕЛИКІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ КРУГЛИХ ПЛАСТИН У ПРОЦЕСАХ ФОРМОУТВОРЕННЯ

Михайло Михайлишин, Ірина Капаціла

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

Розглянемо осесиметричні задачі формоутворення оболонок обертання з плоских кругових заготовок шляхом пластичного деформування під дією рівномірно розподіленого нормального тиску. Будемо використовувати рівняння рівноваги, складені для деформованої геометрії, і нелінійні геометричні співвідношення [1, 3]. Припустимо, що у всіх точках конструкції діє просте навантаження і справджується деформаційна теорія пластичності [2, 7, 8]. Тоді повна система рівнянь задачі у разі використання гіпотези Кірхгофа – Лява, буде такою

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= -(1 + \varepsilon_{10}) \left(U \frac{\cos \psi^+}{r^+} - \frac{N_2}{r^+} + q_n \sin \psi^+ \right); \\ \frac{dM_1}{ds} &= -(1 + \varepsilon_{10}) \left[\frac{M_1 - M_2}{r^+} \cos \psi^+ - (U \sin \psi^+ - V \cos \psi^+) \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dr^+}{ds} = (1 + \varepsilon_{10}) \cos \psi^+; \quad \frac{dZ^+}{ds} = (1 + \varepsilon_{10}) \sin \psi^+; \quad \frac{d(\psi^+ - \psi)}{ds} = \chi_1;$$

$$N_1 = U \cos \psi^+ + V \sin \psi^+; \quad V = \frac{q_n r^+}{2}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{j0} + z\chi_j, \quad j = 1, 2; \quad ds^+ = ds(1 + \varepsilon_{10});$$

$$\varepsilon_{20} = \frac{r^+}{r} - 1; \quad \chi_2 = \frac{1}{r} (\sin \psi^+ - \sin \psi). \quad (3)$$

$$\varepsilon_{10} = (I_3 N - I_2 M) / D; \quad \chi_1 = (I_1 M - I_2 N) / D;$$

$$N_2 = I_1 \varepsilon_{20} + I_2 \chi_2 + (N I_{13} + M I_{12}) / D; \quad (4)$$

$$M_2 = I_2 \varepsilon_{20} + I_3 \chi_2 + (N I_{23} + M I_{31}) / D;$$

$$N = U \cos \psi^+ + V \sin \psi^+ - I'_1 \varepsilon_{20} - I'_2 \chi_2; \quad M = M_1 - I'_2 \varepsilon_{20} - I'_3 \chi_2; \quad (5)$$

$$I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^*}{1 - v^{*2}} z^{k-1} dz; \quad I'_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^* v^*}{1 - v^{*2}} z^{k-1} dz, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$E^* = \frac{3E}{2(1 + v)\omega + 1 - 2v}; \quad v^* = \frac{(1 + v)\omega - 1 + 2v}{2(1 + v)\omega + 1 - 2v}; \quad \omega = 3G \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}; \quad (6)$$

$$G = \frac{E}{2(1 - v)}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad \varepsilon_3 = -\frac{v^*}{1 - v^*} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

$$\sigma_{11} = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} (\varepsilon_1 + \nu^* \varepsilon_2); \quad \sigma_{22} = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} (\varepsilon_2 + \nu^* \varepsilon_1); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= I'_1 I_3 - I'_2 I_2; & I_{12} &= I_1 I'_2 - I_2 I'_1; \\ I_{23} &= I'_2 I_3 - I'_3 I_2; & I_{31} &= I'_3 I_1 - I'_2 I_2; & D &= I_1 I_3 - I_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут індексом "+" позначено величини, що характеризують геометрію деформованої поверхні, причому ψ^+ – кут між нормаллю до поверхні і віссю обертання; r^+ , Z^+ – радіус та вертикальна координата точки серединної поверхні оболонки; ds^+ – елемент дуги меридіана серединної поверхні; U , V , N_1 , N_2 – інтенсивності внутрішніх зусиль у радіальному, вертикальному, меридіональному і коловому напрямках; M_1 , M_2 – інтенсивності меридіонального та колового моментів; q_n – інтенсивність розподіленого навантаження в нормальному до серединної поверхні напрямі. Величини, що характеризують геометрію недеформованої поверхні, позначені такими ж буквами без індексу «+». Меридіональний та нормальний напрями визначені відносно деформованої поверхні.

Розглядатимемо два випадки, коли зовнішній край зацмлений або шарнірно опертий. У першому випадку на зовнішньому краю повинні виконуватись умови

$$r = R: \quad r^+ = R, \quad Z^+ = 0, \quad \psi^+ = 0, \quad (9)$$

а в другому, відповідно, –

$$r = R: \quad r^+ = R, \quad Z^+ = 0, \quad M_1 = 0. \quad (10)$$

У точці $r = 0$ внаслідок симетрії, крім вже використаної умови $V = 0$, повинні виконуватись умови

$$r = 0: \quad r^+ = 0, \quad \psi^+ = 0. \quad (11)$$

Сформульовану вище геометрично і фізично нелінійну крайову задачу в загальному випадку можна розв'язувати тільки числовим способом. Тому виникає необхідність позбавлення особливості в точці $r = 0$. Для цього використаємо спосіб, запропонований у праці [4] для пружних оболонок. Приймемо, що в околі особливої точки $r = 0$ zdeформована оболонка близька до сферичної. Чинячи аналогічно їй у випадку пружно-пластичних деформацій та використовуючи умови регулярності в точці $r = 0$, систему рівнянь (1–4) у цій точці можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= 0; & \frac{dM_1}{dr} &= 0; & \frac{dr^+}{dr} &= 1 + \varepsilon_{10}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{dZ^+}{dr} = 0; \quad \frac{d\psi^+}{dr} = \chi_1.$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{U(I_3 + I'_3) - M_1(I_2 + I'_2)}{D_1}; \quad \chi_1 = \frac{M_1(I_1 + I'_1) - U(I_2 + I'_2)}{D_1};$$

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon_{10}; \quad \chi_2 = \chi_1; \quad N_2 = N_1 = U; \quad M_2 = M_1;$$

$$D_1 = (I_1 + I'_1)(I_3 + I'_3) - (I_2 + I'_2)^2. \quad (13)$$

Опишемо коротко алгоритм числового розв'язування задачі. Як зазначено, лінеаризацію фізичної нелінійності виконують методом змінних параметрів пружності [2,8]. Це приводить до ітераційного циклу, в кожній ітерації якого по всіх точках конструкції уточнюють функцію пластичності ω на основі діаграми матеріалу $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$, а також змінні параметри пружності (6), які в початковому наближенні приймають такими, що дорівнюють пружним модулям. Геометричну нелінійність лінеаризуємо згідно з методом Ньютона – Канторовича [1, 5, 6], що теж приводить до ітераційного циклу. Оскільки робочі навантаження, при яких на практиці формують параболічні антени, досягає 10^6 Па, а кінцева геометрія значно відрізняється від початкової, то особливе значення має вдалий вибір початкового наближення з уточненням геометричної нелінійності. Для його відшукування використано метод послідовного довантаження, відповідно до якого як початкове наближення для деякого рівня навантаження служить розв'язок, знайдений при меншому рівні навантаження. Лінійні крайові задачі в кожному наближенні розв'язують стійким числовим методом С.Годунова. Числовий експеримент засвідчив, що ліпшої збіжності досягають тоді, коли фізичну нелінійність уточнюють у зовнішньому циклі, а геометричну – у внутрішньому.

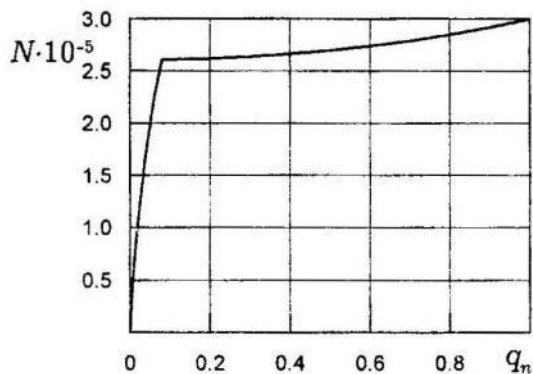


Рис. 1. Залежність значення мембранних зусиль у полюсі защемленої оболонки від q_n , МПа.

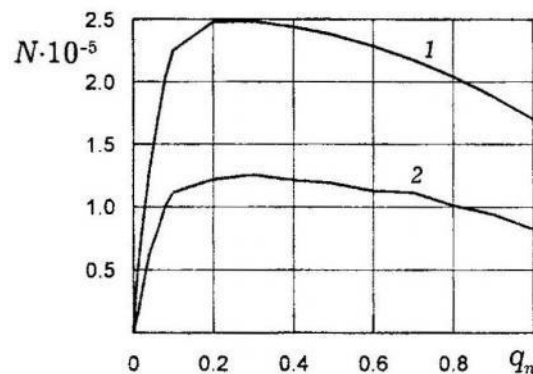


Рис. 2. Залежність зусиль N_1 (1) і N_2 (2) на зовнішньому контурі защемленої оболонки від q_n , МПа.

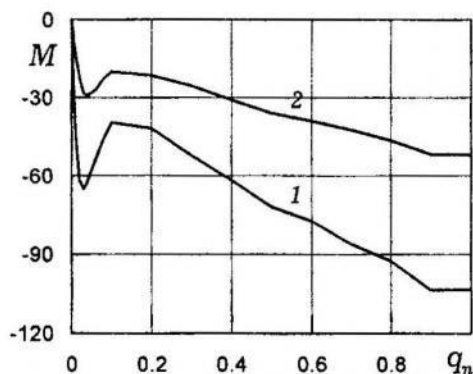


Рис. 3. Залежність моментів M_1 (1) і M_2 (2) на зовнішньому контурі защемленої оболонки від q_n , МПа.

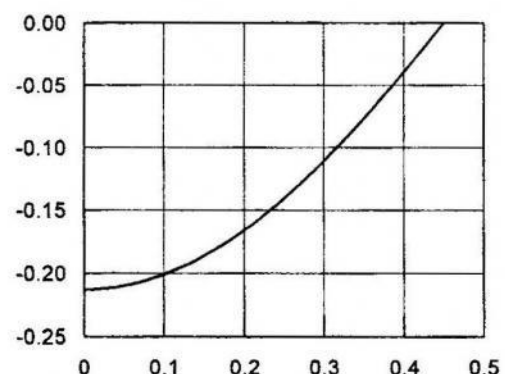


Рис. 4. Форма zdeформованої поверхні оболонки.

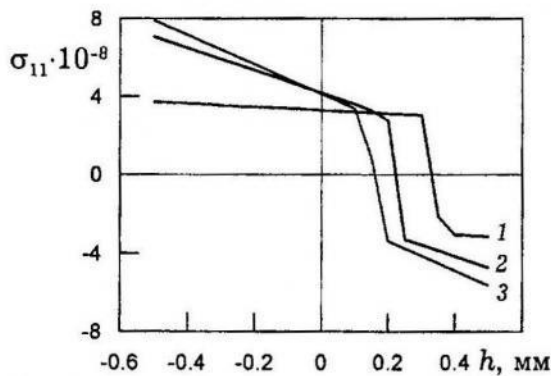


Рис. 5. Зміна напруження σ_{11} за товщиною оболонки при різних інтенсивностях навантаження: 1 – 100 МПа, 2 – 500 МПа, 3 – 1 ГПа.

Обчислення проводили при таких значеннях геометричних параметрів та модулів матеріалу: товщина заготовки $h = 0.001$ м, $R = 0.45$ м, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $E_1 = (0.1 - 0.3) \cdot 10^9$ Па, $\sigma_s = 2.6 \cdot 10^8$ Па. Приймали, що матеріал має лінійне зміцнення з модулем E_1 . Результати обчислень для випадку зацмленого зовнішнього контуру показані на рис. 1–5.

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 486 с.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф. Термопрочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
3. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М., 1976. – 279 с.
4. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основы теории пластин та оболонок.: Навч. посібн. – К.: Либідь, 1993. – 232 с.
5. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Вища шк., 1983. – 286 с.
6. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Розв'язування лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1992. – 152 с.
7. Шаблій О. М., Михайлишин М. С., Дячук С. Ф. Математическое моделирование процесса образования тонкостенных элементов конструкций заданной формы // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – № 35. – С. 21–28.
8. Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – К.: Наук. думка, 1981. – 295 с.

MAJOR AXIS SYMMETRY PLASTO-ELASTIC DEFORMATIONS OF ROUND PLATES IN THE SHAPE FORMATION PROCESSES

Mychajlo Mychajlyshyn, Iryna Kapatsila

Ivan Pulyuy Ternopil' State Engineering University

Are considered a major axis symmetry plasto-elastic deformations of initially round preforms in parabolical shapes of gyration. It is offered a numerical method of solution of this problem. It is obtained and analysed solutions of practical problems, which arise at manufacture of parabolical antennas.

Стаття надійшла до редколегії 16.01.2000