ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 101–105 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 101–105*

УДК 539.3

ЗАДАЧА ПРО КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ДВОХ ТРІЩИН, ЯКІ ПЕРЕТИНАЮТЬ ЛІНІЮ ЗМІНИ МАТЕРІАЛІВ СКЛАДЕНОЇ ПРУЖНОЇ ПЛОЩИНИ

Микола Моісеєв, Віктор Янковий

Одеський державний університет ім. І. І. Мечникова

Точне розв'язання аналогічної задачі у випадку однієї тріщини побудовано в [1]. Розглядувану задачу точно розв'язати не вдалося, бо відповідна їй система сингулярних інтегральних рівнянь з непорушними особливостями містить, окрім характеристичної частини (матричний оператор Вінера – Хопфа зі згорткою Меліна), також і регулярну. Запропоновано ефективний наближений метод розв'язування задачі, побудований на застосуванні векторних аналогів біортогональних базисних систем функцій і поліномів [5] для характеристичної частини, а також на спеціальній апроксимації регулярної частини поліномами. Одержано оцінки швидкості збіжності. Наведено формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Дві півплощини $\{x < 0; E_1, \nu_1\}$ і $\{x > 0; E_2, \nu_2\}$ ($E_j, \nu_j, j = 1,2$ – відповідно їхні модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона) повністю зчеплені між собою $\left(\{u, \mathrm{v}, \sigma_x, \tau_{xy}\}\big|_{y=-0} = \{u, \mathrm{v}, \sigma_x, \tau_{xy}\}\big|_{y=+0}\right)$. Розглядувана складена площина містить дві тріщини: $\{y = -b, -a \le x \le +a\}$ і $\{y = +b, -a \le x \le +a\}$. Вважають, що розкриття тріщин відбувається за дією нормального навантаження, доданого до їхніх берегів $\sigma_y(x, b \pm 0) = \sigma_y(x, -b \pm 0) = -p(x)$, $\tau_{xy}(x, b \pm 0) = \tau_{xy}(x, -b \pm 0) = 0$, $-a < x < a$. Розглянемо плоский напружений стан. Необхідно знайти коефіцієнти інтенсивності напружень.

Позначимо $E(x) = E_1$ при $x < 0$ і $E(x) = E_2$ при $x > 0$, $\mathrm{v}_0(x) = E(x) \times [(\partial \mathrm{v}/\partial x)(x, b - 0) - (\partial \mathrm{v}/\partial x)(x, b + 0)]$, $u_0(x) = E(x)[(\partial u/\partial x)(x, b - 0) - (\partial u/\partial x)(x, b + 0)]$, $\varphi(t) = (\mathrm{v}_0(at), -\mathrm{v}_0(-at), u_0(at), -u_0(-at))_*$, $f(t) = -4(p(at), p(-at), 0, 0)_*$. Тут і далі вважаємо, що $(\ )_*$ – операція транспонування матриці, e_j – j-й стовпець, $e_j^* = (e_j)_*$ – j-й рядок одиничної матриці $E = \operatorname{diag}\{1, j = \overline{1,4}\}$ і для вектор-стовпців $h(t) = \{h_m(t)\}_{m=1}^4$, $g(t) = \{g_m(t)\}_{m=1}^4$,

$$[h, g] = \int_0^1 (h(t))_* g(t) dt .$$

За допомогою узагальненої схеми методу інтегральних перетворень [8] сформульована задача з урахуванням симетрії $u(x, -y) = u(x, y)$, $\mathrm{v}(x, -y) = -\mathrm{v}(x, y)$ зводиться до системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з непорушними особливостями в точках перетинання тріщин з лінією зміни матеріалів

$$(K_- + R)\varphi = f(t),\ 0 < t < 1;$$

$$\{K_-, K_+, R\}h = \int_0^1 \{k(t,\tau), k(\tau,t), \rho(t,\tau)\} h(\tau)d\tau,$$

$$k(t,\tau) = \operatorname{diag}\{k_1(t,\tau), k_2(t,\tau)\}, \rho(t,\tau) = \rho_+(t,\tau) + \rho_-(t,\tau),$$

$$\pi k_j(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{(\tau + t)^3}\sum_{m=0}^{2} B_{j,m} t^m \tau^{2-m},$$

$$\rho_\pm(t,\tau) = \left[(t-\tau)^2 + 4\beta^2\right]^{-\alpha_\pm} c_\pm(t,\tau),\ \ \beta = ba^{-1},\ \ 2\alpha_\pm = 5 \pm 1,$$

$$c_\pm(t,\tau) = \sum_{j \in J_\pm = \{j: j=(j_1,j_2,j_3,j_4), j_1+j_2+j_3+j_4 = 4\pm 1, j_s \ge 0\}} (t \pm \tau)^{j_1} t^{j_2} \tau^{j_3} \beta^{j_4} C_j^\pm, \tag{1}$$

де $B_{j,m} - (2\times 2)$, $C_j^\pm - (4\times 4)$ – числові матриці, які залежать тільки від параметрів $\nu_1, \nu_2, \mu = E_1E_2^{-1}$. Характеристична частина системи (1) (оператор K_-) визначена такими співвідношеннями

$$\int_0^{+\infty} k_j(t,1)t^{s-1}dt = \operatorname{ctg}\pi s G_j(s-1),\ \ 0 < \operatorname{Re}(s) < 1,\ j = 1,2,$$

$$G_2(-s) = G_1(s) = \left(1 + \frac{r_0 + r_1 s^2}{\cos \pi s}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\cos\pi s}\begin{pmatrix} l(s) & m(-s) \\ \mu m(s) & -l(s) \end{pmatrix},$$

$$l(s) = 4(1+\mu)[\mu - 1 + (\nu_0 + 1 - \mu)s^2], \nu_0 = \nu_1 - \mu\nu_2,$$

$$m(s) = 8[-1 - \mu + (\nu_0 + 1 - \mu)s], r_0 = (\nu_0 + \mu - 1)^2,$$

$$r_1 = 2\left[(1-\mu)^2 - \nu_0^2\right], \delta_0 = (1 + 3\mu + \nu_0)(3 + \mu - \nu_0), \mu = E_1E_2^{-1}. \tag{2}$$

Умови замикання тріщини мають вигляд

$$[\mu e_1 - e_2, \varphi(t)] = [\mu e_3 - e_4, \varphi(t)] = 0. \tag{3}$$

Зауваження 1. Однорідна задача (1)–(3) має в $\bigcup_{p>1} L_p(0,1)$ тільки тривіальні розв'язання.

Зауваження *1* можна довести на підставі теореми єдності розв'язності змішаних задач теорії пружності [6].

Для розв'язання системи (1) використовуватимемо біортогональні базисні системи вектор-функцій і вектор-поліномів [5] характеристичного оператора K_- і двоїстого йому K_+ (1). Їхня побудова ґрунтується [5] на канонічній факторизації [2]

$$G(s) = \frac{X^+(s)}{X^-(s)}, \quad 1-\varepsilon < \mathrm{Re}(s) < 1, \quad G(s) = \operatorname{ctg} \pi s \operatorname{diag}\left\{G_j(s-1), j = 1,2\right\}. \quad (4)$$

Канонічну факторизацію

$$G_j(s) = X_j^+(s)\left[X_j^-(s)\right]^{-1}, \quad -\varepsilon < \mathrm{Re}(s) < 1, \quad j = 1,2 \quad (5)$$

для $G_1(s)$ за [4] побудовано в [1] (отримані явні формули факторизації). Для $F_2(s)$ її будують аналогічно. Частинні індекси [2] канонічної факторизації матриць $G_j(s)$, $j = 1,2$ відповідно такі:

$$æ_{j,1} = 0, \quad æ_{j,2} = -1, \; j = 1,2. \quad (6)$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$(\mu,-1)\, X_j^-(0)(0,1)_* = 0, \; j = 1,2. \quad (7)$$

Канонічну факторизацію матриці $G(s)$ (4) для розв'язання системи $K\_h = g$ у класі $\bigcup_{p>1} L_p(0,1)$ виконують матрицями

$$X^\pm(s) = \mathrm{w}_\pm(s) \operatorname{diag}\left\{X_j^\pm(s-1), j = 1,2\right\},$$

$$\mathrm{w}_+(s) = \Gamma(1-s)\left(\Gamma\left(\tfrac{3}{2} - s\right)\right)^{-1}, \quad \mathrm{w}_-(s) = -\Gamma\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\left(\Gamma(s)\right)^{-1}. \quad (8)$$

Відповідно до (6) частинні індекси цієї факторизації

$$æ_1 = æ_3 = 1, \quad æ_2 = æ_4 = 0, \quad (9)$$

а в силу (7) виконані умови

$$\left(\mu e_1^* - e_2^*\right) X^-(1) e_j = \left(\mu e_3^* - e_4^*\right) X^-(1) e_n = 0, \; j \neq 1, n \neq 3. \quad (10)$$

Факторизація (4), (9) породжує такі системи вектор-функцій $x_{n,j}^\pm(t)$ і вектор-поліномів $\pi_{n,j}^\pm(t)$, $n = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{1,4}$,

$$x_{n,j}^\mp(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mp - i\infty}^{\gamma_\mp + i\infty} u^\mp\left(æ_j; n; s\right) \cdot Y_\mp(s) e_j t^{-s} ds,$$

$$\pi_{n,j}^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mp - i\infty}^{\gamma_\mp + i\infty} u^\mp\left(æ_j; n \pm æ_j; s\right) \cdot Z_\pm(s) e_j t^{-s} ds, \quad (11)$$

$$0 < \gamma_+ < \beta, \; 1 - \beta < \gamma_- < 1,$$

$$u^\mp(æ; n; s) = \gamma^\mp_{n+\max(0;\mp æ)}(æ) \cdot (1-s; n) \cdot (s; n \mp æ + 1)^{-1},$$

$$(a; m) = \left((a)_{|m|}\right)^{\operatorname{sgn}(m)}, \quad (a)_m = a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (a+m-1), m = 1,2,\ldots,$$

$$(a)_0 = 1, \quad 2\gamma_n^+(\text{æ}) \cdot \gamma_n^-(\text{æ}) = 1 + 2n + |2n - 2|\text{æ}| + 1|,$$

$$Y_-(s) = X^-(s);\ Y_+(s) = \left(X^+(1-s)\right)_*^{-1};\ Z_+(s) = X^+(s);\ Z_-(s) = \left(X^-(1-s)\right)_*^{-1}.$$

Вони є біортогональними базисними системами для характеристичного оператора K_- і двоїстого йому K_+, бо задовольняють співвідношенням

$$K_\mp x_{n,j}^\mp = \pi_{n-\text{æ}_j,j}^\pm(t),\ t \in (0,1);\ \left[x_{n,k}^\mp, \pi_{m,j}^\pm(t)\right] = \delta_{k,j} \cdot \delta_{n,m}, \tag{12}$$

де $\max\limits_{\sigma=1,\ldots 4} \deg_t e_\sigma^* \pi_{m,k}(t) = m;\ k,j = \overline{1,4};\ n,m = 0,1,\ldots;\ \delta_{n,m}$ – символ Кронекера.

Для означеності вважаємо, що $\gamma_m^-(\text{æ}_j) = 1$, $m = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{1,4}$.

Системи (11) пов'язані [5] з багаточленами Якобі [7]. Це дало змогу одержати такі оцінки:

$$\left\|x_{n,k}^\mp\right\|_{L_2\{1/2,1/2\}} \le C, \quad L_2\{\alpha,\delta\} = L_2\left([0,1], t^\alpha(1-t)^\delta\right), \tag{13}$$

в яких стала C не залежить від n.

Співвідношення (12) дають змогу застосувати для розв'язання системи (1) проекційний засіб методу ортогональних багаточленів [8]

$$\varphi_N(t) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{m=0}^{N} \varphi_{m,j}^{(N)} x_{m+\text{æ}_j,j}^-(t), \tag{14}$$

$$\varphi_{n,k}^{(N)} + \sum_{j=1}^{4}\sum_{m=0}^{N} \rho_{n,m}^{(k,j)} \varphi_{m,j} = -4pf_k\delta_{n,0},\ m = \overline{0,N},\ k = \overline{1,4}. \tag{15}$$

Зазначимо, що в силу (9) наближення (14) задовольняє умову (3). Отримано оцінки $\left|\rho_{n,m}^{(k,j)}\right| \le C'(m+n)^{7/4}\varepsilon_+^{n+m}$, де $0 < \varepsilon_+ = \left(1 + 4\nu + \beta^2\right)^{-1/2} < 1$. Зауваження *1*, одержані оцінки і загальні положення теорії наближених методів розв'язування лінійних операторних рівнянь [3] приводять до таких висновків:

1) при досить великих N система (15) однозначно розв'язана;

2) $\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\|_{L_2\{1/2,1/2\}} \le O\left(N^{7/4}\varepsilon_+^N\right), N \to \infty$;

3) $\left|2K_1\sqrt{\dfrac{2}{a}} - \sum\limits_{j=1}^{4}\lambda_j^{(1)}\sum\limits_{m=0}^{N}(-1)^m \varphi_{m,j}^{(N)}\right| \le O\left(N^{7/4}\varepsilon_+^N\right)$,

$$\lambda_j^{(1)} = e_1^* \operatorname{diag}\left\{X_l^{(\infty)}, l = 1,2\right\} e_j;\quad K_1 = \lim_{x\to a+0} \sqrt{2\pi}\sqrt{x-a}\cdot\sigma_y(x,0).$$

Для інших коефіцієнтів інтенсивності отримані аналогічні (3) наближення.

Отже, одержано ефективні наближення зображень для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

1. *Антипов Ю. А., Моисеев Н. Г.* Точное решение плоской задачи для составной плоскости с разрезом, пересекающим линию раздела сред // Прикл. математика и механика. – 1991. – Т. 55, вып. 4. – С. 662–671.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М,: Наука, 1984. – 750 с.
4. *Моисеев Н. Г.* О факторизации матриц-функций специального вида // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 305, № 1. – С. 44–47.
5. *Моисеев Н. Г.* Аналоги спектральных соотношений для операторов Винера-Хопфа со сверткой Меллина // Докл. РАН. – 1999. – Т. 305, № 1. – С. 17–21.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
8. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.

THE PROBLEMS OF STRESS CONCENTRATION BY TWO CRACKS CROSSED A MATERIALS CHANGE LINE OF A COMPOSITE ELASTIC PLANE

Mykola Moiseyev, Victor Yankoviy

Mechnikova State University Odessa

In the paper the effective approximate method of solving the problem is proposed using vector analogy of functional and polynomial system. The formulas for the stress intensity factors are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.1999