

УДК 539.3

ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ТІЛ ЗІ ЗМІННОЮ ДІЛЯНКОЮ КОНТАКТУ

Володимир Онишкевич*, Володимир Новосад**

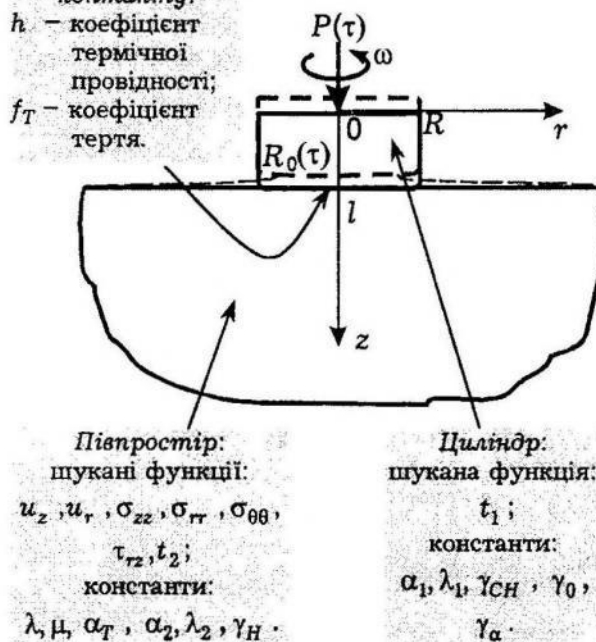
*Український державний лісотехнічний університет

**Львівська філія Української Академії державного управління
при Президенті України

Глибше досліджено взаємодію жорсткого циліндричного штампа та ізо-
тропного півпростору для випадку теплоутворення від тертя на ділянці ко-
нтакту [1, 2]. Як засвідчив аналіз стаціонарної задачі, можлива така ситуа-
ція, що наперед задані і на перший погляд очевидні крайові умови приво-
дять до фізично нереальних результатів. У такому разі потрібно підбирати
такі крайові умови, які б враховували явище відокремлення контактних по-
верхонь [1]. Отже, у випадку розгляду аналогічної квазістатичної задачі є

Характеристики
контакту:

h – коефіцієнт
термічної
провідності;
 f_T – коефіцієнт
тертя.

Півпростір:
шукані функції:

$u_z, u_r, \sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta},$
 $\tau_{rz}, t_2;$
константи:
 $\lambda, \mu, \alpha_T, \alpha_2, \lambda_2, \gamma_H.$

Циліндр:
шукана функція:

$t_1;$
константи:
 $\alpha_1, \lambda_1, \gamma_{CH}, \gamma_0,$
 $\gamma_a.$

Рис. 1.

деякий момент часу τ_s , у який ді-
лянка контакту починає зміню-
ватись. Тому формулюючи зада-
чу, взагалі кажучи, потрібно вра-
ховувати можливі зміни крайових
умов.

Формулювання задачі. Роз-
глянемо циліндричний штамп з
радіусом R і висотою l , який
обертається зі сталою кутовою
швидкістю ω і який притискає до
пружного півпростору вертикаль-
на сила $P(\tau)$ (рис. 1). Передба-
чається контактне теплоутворен-
ня від тертя, неідеальність тепло-
вого контакту та теплообмін неза-
вантажених поверхонь з навко-
лишнім середовищем. У початко-
вий момент температуру тіл та
переміщення штампа, як жорст-
кого цілого, вважаємо ну-
льовими.

Задача полягає в тому, щоб задовольнити такі головні співвідношення:

а) рівняння термопружності для півпростору

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + k \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t_2}{\partial r}, \quad \Delta u_z + k \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t_2}{\partial z}, \quad (1)$$

де k, β – сталі [2], які залежать від сталих Ляме, e – модуль об'ємного роз-
ширення;

б) рівняння теплопровідності для циліндра і півпростору

$$\Delta t_1 = X_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau}, \quad \Delta t_2 = X_2 \frac{\partial t_2}{\partial \tau}, \quad (2)$$

де $X_i = 1/\alpha_i$, α_i – коефіцієнти температуропровідності;

в) температурні крайові умови

$$\frac{\partial t_1}{\partial z} = \gamma_0 t_1 \quad (0 \leq r \leq R, \quad z = 0, \quad \tau > 0); \quad (3)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = -\gamma_\alpha t_1 \quad (r = R, \quad 0 \leq z \leq l, \quad \tau > 0); \quad (4)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz},$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = h(t_2 - t_1) \quad (0 \leq r < R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (5)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial z} = -\gamma_{CH} t_1 \quad (R_0(\tau) < r < R, \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (6)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial z} = \gamma_H t_2 \quad (r > R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (7)$$

г) силові крайові умови

$$u_z = f(r, \tau) \quad (0 \leq r < R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (8)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (r > R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (0 < r < \infty, \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (10)$$

д) початкові умови

$$t_1 = t_2 = f = \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \quad (\tau = 0); \quad (11)$$

е) умову рівноваги штампа

$$P + 2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}|_{z=l} dr = 0. \quad (12)$$

Функція $R_0(\tau)$, яка задає радіус ділянки контакту, визначається в процесі розв'язування задачі на підставі припущення

$$R_0(\tau) = R \left(1 - \Delta \rho \sum_{j=1}^M H(\tau - \tau_j) \right), \quad (13)$$

де $H(\cdot)$ – функція Хевісайда, $\Delta \rho$ – безрозмірний крок, що визначає на ділянці контакту дискретну множину точок розбиття $r_i = R \Delta \rho (i - 1)$ ($i = \overline{1, N}$); N – кількість точок розбиття; M, τ_j – визначають у процесі розв'язування.

Метод послідовно-дискретного розділення крайових умов. Згідно з цим методом, який детальніше описаний у праці [3], розв'язок задачі зручно записати у вигляді

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \sum_{j=1}^M \Gamma^{(j)}, \quad (14)$$

де $\Gamma^{(0)} = \{u_z^{(0)}, u_r^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}, \sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{\theta\theta}^{(0)}, \tau_{rz}^{(0)}, t_1^{(0)}, t_2^{(0)}\}$ – початковий розв'язок, який задовольняє рівняння термопружності і теплопровідності та співвідношення (1)–(10) при $R_0(\tau) = R$; $\Gamma^{(j)} = \{u_z^{(j)}, u_r^{(j)}, \sigma_{zz}^{(j)}, \sigma_{rr}^{(j)}, \sigma_{\theta\theta}^{(j)}, \tau_{rz}^{(j)}, t_1^{(j)}, t_2^{(j)}\}$ – коректувальні розв'язки, які задовольняють рівняння термопружності та теплопровідності і крайові умови для яких підбирають так, щоб на проміжку $[0, \tau_j]$ $\Gamma^{(j)}$ був нульовим, а потім враховував зміну крайових умов у момент τ_j .

Якщо виникає потреба врахувати відокремлення контактних поверхонь, яке починається від краю штампа, то перед відшукуванням розв'язку $\Gamma^{(1)}$ потрібно визначити момент $\tau = \tau_1$, коли в точці ($z = l$, $r = r_{N-1}$) контактний тиск змінює знак. Для знаходження $\Gamma^{(1)}$ використовуємо співвідношення (1), (2), (4), (7)–(9), однак замість (3), (5), (6), (10) потрібно задовольняти, відповідно,

$$\frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial z} + \gamma_{CH} t_1^{(1)} = \begin{cases} 0, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, 0 < \tau < \tau_1) \\ -\frac{\partial t_1^{(0)}}{\partial z} - \gamma_{CH} t_1^{(0)}, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, \tau > \tau_1) \end{cases}; \quad (15)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2^{(1)}}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz}^{(1)},$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2^{(1)}}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial z} = h(t_2^{(1)} - t_1^{(1)}) \quad (0 \leq r \leq R - \Delta R, z = l, \tau > 0); \quad (16)$$

$$\frac{\partial t_2^{(1)}}{\partial z} - \gamma_H t_2^{(1)} = \begin{cases} 0, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, 0 < \tau < \tau_1) \\ -\frac{\partial t_2^{(0)}}{\partial z} + \gamma_H t_2^{(0)}, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, \tau > \tau_1) \end{cases}; \quad (17)$$

$$u_z^1 = f^1 \quad (0 \leq r < R - \Delta R, z = l, \tau > 0); \quad (18)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \begin{cases} 0, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, 0 < \tau < \tau_1) \\ -\sigma_{zz}^{(0)}, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, \tau > \tau_1) \end{cases}; \quad (19)$$

$$2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{z=l} dr = 0. \quad (20)$$

Головні етапи відшукування розв'язків Γ_j ($j = \overline{0, M}$). Методика пошуку коректувальних розв'язків фактично нічим не відрізняється від шукання основного розв'язку [2]. Умовно процес знаходження Γ_j ($j = \overline{0, M}$) можна розділити на такі етапи:

1) застосування перетворення Лапласа до визначальних співвідношень. Наприклад, співвідношення (19) з урахуванням теореми запізнення матиме вигляд

$$\sigma_{zz}^{(1)L} = \exp(-s\tau_1)g_3^L \quad (R - \Delta R \leq r \leq R, \quad z = l), \quad (21)$$

де $g_3^L = -\sigma_{zz}^{(0)}(r, l, \tau + \tau_1)$;

2) відшукування розв'язку задачі теплопровідності для циліндра в трансформантах Лапласа;

3) знаходження розв'язку задачі термодружності для півпростору в подвійних трансформантах Ханкеля – Лапласа;

4) задоволення крайових умов і зведення задачі до сукупності парних інтегральних рівнянь;

5) задоволення інтегральних співвідношень на нескінченному проміжку за допомогою методу довизначення;

6) розклад невідомих функцій на межі півпростору в ряди за циліндричними функціями з коефіцієнтами, які залежать від параметра перетворення Лапласа

$$\varphi(\rho, s) = b_0(s) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s)J_0(\mu_n \rho), \quad (22)$$

де μ_n – нулі функції Бесселя 1-го роду нульового порядку;

7) застосування методу колокації і зведення задачі до системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладів шуканих функцій;

8) розв'язування системи для кожного з $s_n = (2n + 1)\sigma$ (σ – деяке дійсне число, $n = 1, 2, \dots, N^*$) і знаходження значень трансформант у рівновіддалених точках на дійсній осі;

9) обчислення оригіналів шуканих функцій методом Папуліса.

Аналіз результатів. Нехай сила P діє на штамп за законом $P(\tau) = F(1 - \exp(-a\tau))$, де F і a – деякі сталі. Розрахунки виконували для таких значень вхідних параметрів:

$$N = 21, \quad N^* = 11, \quad \gamma_0 = \gamma_H = \gamma_\alpha = 10 \text{ м}^{-1}, \quad h = 10 \text{ кВт/м}^2\text{К},$$

$$\alpha_T = 22,9 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad F = 15 \text{ кН}, \quad \omega = 0,05 \text{ с}^{-1}, \quad R = 0,5 \text{ м}, \quad l = 0,15 \text{ м},$$

$$\alpha_1 = 1/200000 \text{ м}^2/\text{с}, \quad \alpha_2 = 1/50000 \text{ м}^2/\text{с}, \quad a = 2, \quad \lambda = 5,46 \times 10^{10} \text{ Па},$$

$$\mu = 2,56 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad f_T = 0,1, \quad \lambda_1 = 22 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_2 = 209 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Для зручності задачу розглядали відносно безрозмірного часу $\tau' = \alpha_2 \tau / R^2$. В процесі розв'язування задачі визначено чотири точки розбиття, де спостерігали відокремлення контактних поверхонь (рис. 2). У початковий період контактна площа зменшується швидшими темпами. Цікаво зазначити, що відокремлення основи штампа від поверхні півпростору розпочалось у момент $\tau = \tau'_v$ одночасно зі зміною знака вертикальних переміщень під штампом.

На рис. 3 показано розподіли контактних напружень у різні моменти часу. Як бачимо, фрикційне нагрівання приводить до переміщення максимуму контактних напружень у глибину ділянки контакту. Важливо, що максимуми контактних напружень і контактних температур в однакові моменти часу спостерігали приблизно в однакових точках. Це свідчить про визначальний вплив температурних чинників на характер напружень під штампом.

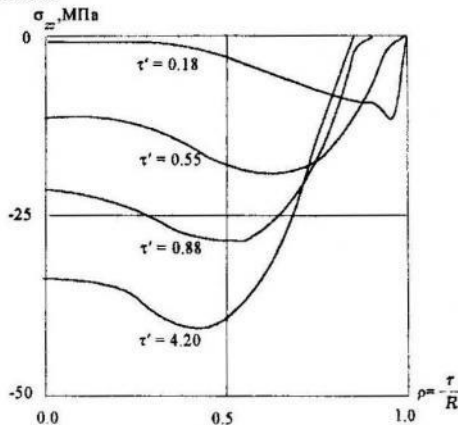


Рис. 2.

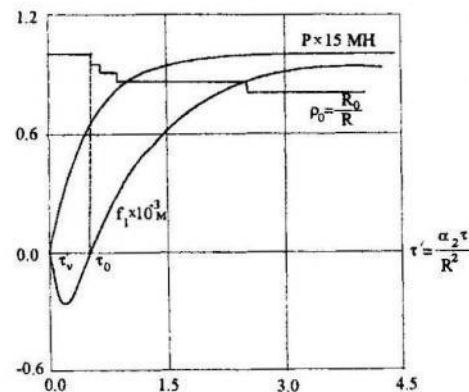


Рис. 3.

Точність запропонованого методу підтверджено порівнянням результатів у стаціонарному режимі з результатами відповідної стаціонарної задачі [1] з неповним контактом.

1. Левицкий В. П., Новосад В. П., Онишкевич В. М. Взаимодействие жесткого цилиндра с упругим полупространством при теплообразовании на площадке контакта // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, №11. – С. 26–31.
2. Левицкий В. П., Новосад В. П. Нестационарная осесимметричная задача при наличии теплообразования // Прикл. математика и механика – 1997. – Т. 61, Вып. 5. – С. 873–881.
3. Новосад В. П., Онишкевич В. М. Метод последово-дискретного разделения граничных условий в смешанных нестационарных задачах // Вісник держ. ун-ту «Львівська політехніка». – Прикл. математика. – 1998. – № 337. – С. 240–243.

DISCRETIZATION OF PROBLEM ABOUT INTERACTION OF AXIALLY SYMMETRICAL THERMOELASTIC BODIES WITH CHANGEABLE CONTACT AREA

Volodymyr Onyshkevych*, Volodymyr Novosad**

*Ukrainian state forestry engineering university

**Lviv branch of the Ukrainian Academy of state management
at the President of Ukraine

Nonstationary contact of a thermoelastical half-space and a rigid punch are considered. The half-space curves as a result of friction heatgeneration and it leads to decrease of contact area. The method of solving is described. The results are analysed.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.1999