

**МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У
КОМПОЗИТАХ, АРМОВАНИХ КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ****Олексій Онишко***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Композити, армовані короткими тонкими волокнами, широко застосовують у сучасній техніці. Одним з матеріалів, який з успіхом використовують у будівництві, особливо транспортному та гідротехнічному, є фібробетон. Функції арматури в ньому виконують як сталь, так і полімерні матеріали. Сьогодні розроблені технології, які забезпечують рівномірне розсіяння волокон у бетоні, що дає змогу розглядати фібробетон як однорідний ізотропний матеріал. З іншого боку, в разі потреби забезпечується впорядковане розташування волокон, чим досягають необхідної міцності матеріалу в певному напрямі.

Є численні дослідження технологічних властивостей та механічних характеристик цих волокнистих композитів [2, 4]. Проте питання створення математичної моделі, яка б давала змогу кількісно описати термомеханічні процеси у таких матеріалах, досі відкрите. Особливо цікаво і важливо дослідити перерозподіл напружень між матрицею і волокнами в процесі експлуатації, викликаний непружною поведінкою матеріалу матриці, на відміну від пружних волокон. Ми спробували побудувати модель, яка дала б змогу відповісти на ці питання. Для цього використано методи термодинаміки нерівноважних процесів та механіки суцільного середовища, зокрема, термов'язкопружності [1, 6]. На підставі результатів експериментальних досліджень [2, 3–5] враховано також фізичний зміст та особливості проходження термомеханічних процесів у фібробетонах за умов складного термомеханічного зовнішнього навантаження.

Розглянемо в'язкопружне теплопровідне тіло, що перебуває під дією силового навантаження в умовах теплообміну з навколишнім середовищем. Вважаємо, що в кожний момент часу в кожній точці тіла густина

$$\rho = (1 - \beta)\rho^{(1)} + \beta\rho^{(2)}. \quad (1)$$

Індекс 1 стосується матеріалу матриці, а індекс 2 – матеріалу волокон. Припустимо, що концентрація волокон β у тілі однорідна і незмінна в часі. Приймаємо також, що напруження в кожній точці тіла в будь-який момент часу t є сумою напружень у матриці та волокні:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^{(1)}(t) + \sigma_{ij}^{(2)}(t). \quad (2)$$

Деформації ϵ_{ij} вважаємо неподільними.

За цих припущень маємо такий вигляд балансових співвідношень для маси, кількості руху, енергії та ентропії тіла:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 0; & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \text{div} \hat{\sigma}; \\ \rho(\dot{U} + \dot{K}) &= \text{div}(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \text{div} \mathbf{q} + \rho r; & \rho \dot{S} &\geq -\text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T}. \end{aligned} \quad (3)$$

У виразі (3) символами $\mathbf{v}$, $\hat{\sigma}$, ρr , $\mathbf{q}$, ρS , ρU , ρK , T позначено відповідно вектор швидкості, тензор напружень, джерело і потік тепла, ентропію, внутрішню і кінетичну енергію та температуру.

Після введення вільної енергії $A = U - TS$ та потрібних перетворень запишемо

$$-\rho S \dot{T} - \rho \dot{A} + \sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{\alpha} \dot{\varepsilon}_{ij} - \mathbf{q} \nabla T / T \geq 0. \quad (4)$$

Вважаємо, що вільна енергія є функціоналом [1], залежним не тільки від історії деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і температури $T(t)$, а й від внутрішніх змінних $\xi^{(\alpha)}(t)$ – скалярних параметрів, що описують вплив деформацій на окремі компоненти тіла:

$$\dot{\xi}^{(\alpha)}(t) = a_{ij}^{(\alpha)} \dot{\varepsilon}_{ij}(t), \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

Припускаємо, що ці функції є неперервними в інтервалі $-\infty < t < \infty$ та що при $t \rightarrow -\infty$ виконується $\varepsilon_{ij}(t) \rightarrow \varepsilon_{ij}^0$, $T(t) \rightarrow T^0$. Використовуючи теорему Стоуна – Веєрштраса, при $-\infty < \tau \leq t$ апроксимуємо вибраний функціонал багаточленом з множини неперервних дійсних лінійних функціоналів, залежних від $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $T(\tau)$, $\xi^{(\alpha)}(\tau)$. Виразимо їх за допомогою інтегралів, приймаючи, що $(T(\tau) - T^0)/T^0$ – величина порядку $O(\varepsilon)$. Обмеживши розклад лінійними та квадратними функціоналами, одержимо

$$\begin{aligned} \rho A &= \rho A^0 + \int_{-\infty}^t D_{ij}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t \beta(t-\tau) \dot{T}(\tau) d\tau + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{-\infty}^t B^{(\alpha)}(t-\tau) \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau, t-\tau') \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau') d\tau d\tau' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t m(t-\tau, t-\tau') \dot{T}(\tau) \dot{T}(\tau') d\tau d\tau' + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t n^{(\alpha)(\beta)}(t-\tau, t-\tau') \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau) \dot{\xi}^{(\beta)}(\tau') d\tau d\tau' - \\ &- \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t W_{ij}(t-\tau, t-\tau') \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) \dot{T}(\tau') d\tau d\tau' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \Psi_{ij}(t-\tau, t-\tau') \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau') d\tau d\tau' - \\
 & - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t l^{(\alpha)}(t-\tau, t-\tau') \dot{T}(\tau) \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau') d\tau d\tau'.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Продиференціюємо (6), використовуючи формули Лейбніца, та підставимо результат у нерівність (4). Увівши позначення $\int_{-\infty}^t F(t-\tau) f(\tau) d\tau \equiv F * f$, упорядкувавши та врахувавши симетрію інтегральних ядер, матимемо

$$\begin{aligned}
 & \left[-\rho S + \beta(0) + m * \dot{T} + W_{ij} * \dot{\epsilon}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^2 l^{(\alpha)} * \dot{\xi}^{(\alpha)} \right] \dot{T}(t) + \\
 & + \left[\sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{(\alpha)} - D_{ij}(0) - G_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl} + W_{ij} * \dot{T} - \sum_{\alpha=1}^2 \Psi_{ij}^{(\alpha)} * \dot{\xi}^{(\alpha)} \right] \dot{\epsilon}_{ij}(t) + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \left[-B^{(\alpha)}(0) - \sum_{\beta=1}^2 n^{(\alpha)(\beta)} * \dot{\xi}^{(\beta)} - \Psi_{ij}^{(\alpha)} * \dot{\epsilon}_{ij} + l^{(\alpha)} * \dot{T} \right] \dot{\xi}^{(\alpha)}(t) + R - \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T_0} \geq 0,
 \end{aligned} \quad (7)$$

де $\beta(0)$, $D_{ij}(0)$ – початкові значення ентропії та напружень.

Нерівність (7) повинна виконуватись при довільних значеннях $\dot{\epsilon}_{ij}(t)$, $\dot{T}(t)$. Це означає, що коефіцієнти при них повинні дорівнювати нулю. Підставивши в них ще (5), одержимо визначальні співвідношення для напружень та ентропії:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{(\alpha)} = D_{ij}(0) + (G_{ijkl} + \sum_{\alpha=1}^2 a_{kl}^{(\alpha)} \Psi_{ij}^{(\alpha)}) * \dot{\epsilon}_{kl} - W_{ij} * \dot{T}; \quad (8)$$

$$\rho S = \beta(0) + m * \dot{T} + (W_{ij} + \sum_{\alpha=1}^2 a_{ij}^{(\alpha)} l^{(\alpha)}) * \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (9)$$

Враховуючи, що для сумарних напружень повинно виконуватись співвідношення

$$\sigma_{ij} = D_{ij}(0) + G_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl} - W_{ij} * \dot{T}, \quad (10)$$

з порівняння (8) і (10) випливає, що

$$\sum_{\alpha=1}^2 a_{kl}^{(\alpha)} \Psi_{ij}^{(\alpha)} * \dot{\epsilon}_{kl} = 0. \quad (11)$$

Умова (11) є обмеженням на коефіцієнти з (5).

Після підстановки (1) у (8) та виконано необхідних перетворень запишемо співвідношення для складових напружень у матриці $\sigma_{ij}^{(1)}$ та волокнах $\sigma_{ij}^{(2)}$:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{(1-\beta)\rho^{(1)}}{\rho} D_{ij}(0) + \left[\frac{(1-\beta)\rho^{(1)}}{\rho} G_{ijkl} + a_{kl}^{(1)} \Psi_{ij}^{(1)} \right] * \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{(1-\beta)\rho^{(1)}}{\rho} W_{ij} * \dot{T}, \quad (12)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \frac{\beta\rho^{(2)}}{\rho} D_{ij}(0) + \left[\frac{\beta\rho^{(2)}}{\rho} G_{ijkl} + a_{kl}^{(2)} \Psi_{ij}^{(2)} \right] * \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\beta\rho^{(2)}}{\rho} W_{ij} * \dot{T}. \quad (13)$$

За допомогою рівнянь (12) і (13) можна обчислити перерозподіл напружень між матрицею та волокнами з плином часу. Принципи використання моделі опишемо на такому прикладі.

Розглянемо пружний ізотропний шар з фібробетону товщиною $2h$ ($-h \leq z \leq h$), що перебуває під дією згинного моменту M . Припустимо, що температура шару стала. В такому разі рівняння (12) і (13) зводяться до вигляду

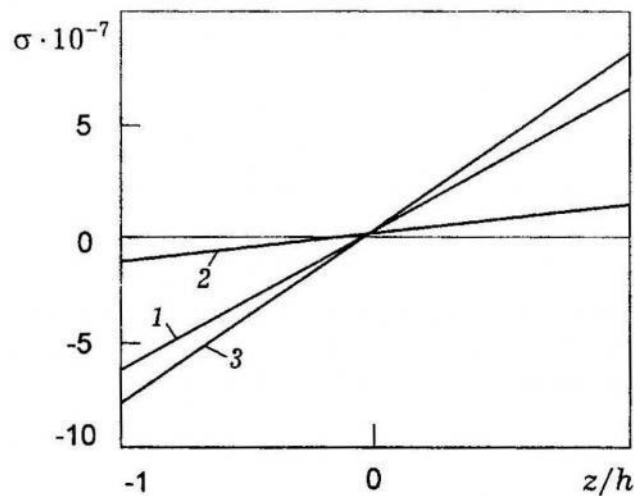
$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)M}{4E} \left[\frac{2(1-\beta)\rho^{(1)}E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} - A \right] \frac{z}{h}; \quad (14)$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)M}{4E} \left[\frac{2\beta\rho^{(2)}E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} + A \right] \frac{z}{h}, \quad (15)$$

де A – параметр, відповідальний за перерозподіл напружень між складниками, E і ν – усереднені значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона. Усереднення виконують так само, як і для густини:

$$E = (1-\beta)E^{(1)} + \beta E^{(2)}, \quad \nu = (1-\beta)\nu^{(1)} + \beta\nu^{(2)}. \quad (15)$$

Повні напруження обчислюють з (2).



Розподіл напружень по товщині шару.

На рисунку показано розподіл напружень по товщині шару в бетоні (1) і волокнах (2), а також повних напружень (3) у безрозмірному вигляді. Прийнято $M = 50$ МНм, $\rho^{(1)} = 2410$ кг/м³, $\rho^{(2)} = 7870$ кг/м³, $E^{(1)} = 25$ ГПа, $E^{(2)} = 210$ ГПа, $\nu^{(1)} = 0,15$, $\nu^{(2)} = 0,3$, $A = 5$ ГПа. Параметр A оцінено з урахуванням експериментальних даних [2, 5].

1. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
2. Brandt A. M. Własności mechaniczne i struktura kompozytów betonowych. – Warszawa: PAN, Ossolineum, 1974. – 586 s.
3. Erdelyi A. The toughness of steel fibre reinforced concretes // Period. Politechn. Civ. Eng. – 1993. – Vol. 52, No. 1. – P. 329–336.
4. Kasperkiewicz J. Mechanika kompozytów betonopodobnych. – Wrocław: Ossolineum, 1983. – 625 s.
5. Song Yupu, Zhao Guofan, Peng Fang et al. Strength behavior and failure criterion of steel fibre concrete under triaxial stresses // China Civ. Eng. J. – 1994. – Vol. 27, No. 3. – P. 14–9.
6. Truesdell C. Rational thermodynamics. – McGraw Hill, 1969. – 422 p.

MODELLING OF PHYSICOMECHANICAL PROCESSES IN COMPOSITES REINFORCED WITH SHORT FIBRES

Oleksij Onyshko

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

A model for description of thermomechanical behavior of composites similar to fibroconcrete built by the methods of mechanics of solids and thermodynamics is proposed. This model permits to describe redistribution of stresses between matrix and fibres in the composite in dependence of time by introducing of corresponding interior parameters. Physical equations of the proceeding processes are written. The distribution of stresses over the thickness of bended fibroconcrete plate is calculated.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.1999