ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 120–123 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 120–123*

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ ПО ДУЗІ КОЛА

Віктор Опанасович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Формулювання задачі. Дослідимо стаціонарний термопружний стан ізотропної пластини з теплоізольованими основами, яка містить тріщину по дузі кола радіусом R. Вважаємо, що пластина перебуває під дією однорідного поля напружень на нескінченності, крім того, відомий сталий тепловий потік q_∞ у нескінченно віддаленій точці. Береги тріщини теплоізольовані і вступають у гладкий контакт по всій її довжині.

Виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі кола, напрямивши вісь Ox через середину тріщини. Область всередині кола позначимо через S^+, а зовні – через S^-, частину кола, де розміщена тріщина – через L, центральний кут розхилу тріщини – через 2φ. Вважаємо, що тепловий потік q_∞ утворює кут α з віссю Ox.

Згідно з постановкою задачі матимемо такі граничні умови:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^{\pm} = 0 \quad \text{на} \quad L, \tag{1}$$

$$rr^+ = rr^- = rr, \quad r\vartheta^+ = r\vartheta^- = 0, \quad v_r^+ - v_r^- = 0 \quad \text{на } L, \tag{2}$$

де T – температура пластини; rr, $r\vartheta$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат з початком у центрі кола радіуса R [1]; v_r – радіальна складова вектора переміщення; значками «+» і «–» позначено граничне значення відповідних функцій при прямуванні точки пластини до лінії L відповідно з S^+ і S^-.

Задача теплопровідності. Введемо у розгляд температурний комплексний потенціал $\Psi_0(z)$ [2], тоді $T = 2\,\mathrm{Re}\,\Psi_0(z)$, і, крім того, виконуються розвинення

$$\Psi_0(z) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots & z \in S^+, \\ \overline{a}_0 z + b_*/z + C + \ldots & z \in S^-. \end{cases} \tag{3}$$

Тут $z = x + iy$, x, y – декартові координати точки комплексної площини, $i = \sqrt{-1}$; α_i, $i = \overline{0,\infty}$, b_*, C – невідомі комплексні сталі; $a_0 = -(2k)^{-1} q_\infty e^{i\alpha}$, k – коефіцієнт теплопровідності.

Введемо нову функцію $V(z) = \dfrac{z}{R}\Psi_0'(z)$, тоді

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R}{r}\left(V(z) + \overline{V(z)}\right). \tag{4}$$

Задовольняючи крайову умову (1) та враховуючи (4), одержуємо такі задачі лінійного спряження:

$$\left(V(t)+\bar{V}(u)\right)^{+}+\left(V(t)+\bar{V}(u)\right)^{-}=0, \quad t\in L,$$

$$\left(V(t)-\bar{V}(u)\right)^{+}-\left(V(t)-\bar{V}(u)\right)^{-}=0, \quad t\in L, \quad u=R^2/t,$$

розв'язавши які та врахувавши (3), знайдемо

$$\Psi_0(z)=0.5\left(\bar{a}_0 z+a_0R^2z^{-1}\right)+0.5R\left(b_2-d_0R^{-2}z^{-1}\right)X(z), \tag{5}$$

де $d_0=-a_0R^2$, $b_2=\bar{a}_0/R$, $X(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $a=e^{-i\varphi}R$, $b=\bar{a}$.

Беручи до уваги (5) та (3), можемо записати

$$C=0.5R\left(a_0-\bar{a}_0\cos\varphi\right),\ b_*=R^2\sin^2\varphi/2\left(a_0+\bar{a}_0\cos^2\varphi/2\right),\ \alpha_0=-\bar{C}.$$

Задача термопружності. Введемо у розгляд комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини матимемо формули [2]

$$2\mu\left(v_r+iv_\theta\right)=e^{-i\vartheta}\left[\kappa\varphi(z)+\omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)-z\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\overline{\Phi(z)}+\beta\psi_0(z)\right], \tag{6}$$

$$rr+ir\vartheta=\Phi(z)-\frac{R^2}{r^2}\Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left[\overline{\Phi(z)}-\bar{z}\overline{\Phi'(z)}\right], \tag{7}$$

де $\Omega(z)=-\bar{\Phi}\left(\dfrac{R^2}{z}\right)+\dfrac{R^2}{z}\bar{\Phi}'\left(\dfrac{R^2}{z}\right)+\dfrac{R^2}{z^2}\bar{\Psi}\left(\dfrac{R^2}{z}\right)$, $\psi_0'(z)=\Psi_0(z)$, $\varphi'(z)=\Phi(z)$,

$\omega'(z)=\Omega(z)$, $\bar{\Phi}\left(\dfrac{R^2}{z}\right)=\overline{\Phi\left(\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right)}$, μ – модуль зсуву; κ,β – відомі сталі [2], вирази для яких не наводимо.

Задовольняючи першу групу граничних умов (2) на підставі (7), отримаємо

$$\left(\Phi(t)+\Omega(t)\right)^{+}-\left(\Phi(t)+\Omega(t)\right)^{-}=0,\ t\in L. \tag{8}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (8), матимемо

$$\Omega(z)=-\Phi(z)+\Gamma-\bar{A}_1+\frac{R^2\bar{\Gamma}'}{z^2}+\frac{\bar{b}_\infty}{z}, \tag{9}$$

де $\Gamma=\dfrac{1}{4}(N_1+N_2)$, $\Gamma'=-\dfrac{1}{2}(N_1-N_2)e^{-2i\gamma}$, $A_1=\Phi(0)$, $\bar{b}_\infty=-2\beta_0R^2\times$ $\times\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\left(a_0+\bar{a}_0\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right)$, $\beta_0=\dfrac{\beta}{2(1+\kappa)}$, N_i – головні напруження на нескінченності, γ – кут, який головне напруження N_1 утворює з віссю Ox.

Беручи до уваги (7) та (9), з першої граничної умови (2) одержимо

$$\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=rr+\Gamma-\bar{A}_1+R^2\bar{\Gamma}'t^{-2}+\bar{b}_\infty t^{-1},\ t\in L. \tag{10}$$

Введемо функцію

$$D(z)=\Phi(z)-\bar{\Phi}\left(R^2z^{-1}\right)+2\beta_0\left(\Psi_0(z)-\bar{\Psi}_0\left(R^2z^{-1}\right)\right)-z\Phi'(z)+R^2z^{-1}\bar{\Phi}'\left(R^2z^{-1}\right), \tag{11}$$

яка, як видно з останньої граничної умови (2) та залежності (6), є розв'язком такої задачі лінійного спряження:

$$D^+(t) - D^-(t) = 0, t \in L. \tag{12}$$

Розв'язавши крайову задачу (12), отримаємо

$$D(z) = \Gamma - \overline{A}_1 + 2Q + 2\beta_0\left(\overline{a}_0 z - \frac{a_0 R^2}{z}\right), Q = (a_0 - \overline{a}_0\cos\varphi)\beta_0 R. \tag{13}$$

Якщо врахувати (10), то на підставі (13) можемо записати

$$rr'_\theta = \frac{3}{2}i\left(\frac{R^2\overline{\Gamma}'}{t^2} - \frac{\Gamma' t^2}{R^2}\right) + 2B_1 - 2i\beta_0\left(\overline{a}_0 t - a_0 R^2 t^{-1}\right) + i\left(\overline{b}_\infty t^{-1} - \frac{b_\infty}{R^2}t\right),$$

$$\operatorname{Re} A_1 = \Gamma + 2\operatorname{Re} Q, B_1 = \operatorname{Im} Q. \tag{14}$$

Розв'язуючи рівняння (13) стосовно невідомих контактних напружень rr, одержимо

$$rr = -\frac{3}{4}\left(\frac{\overline{\Gamma}'}{t^2}R^2 + \frac{\Gamma' t^2}{R^2}\right) + 2B_1\theta - 2\beta_0 R\left(\frac{\overline{a}_0 t}{R} + \frac{a_0 R}{t}\right) - \left(\frac{\overline{b}_\infty}{t} + \frac{b_\infty}{R^2}t\right) + C_1, \tag{15}$$

де C_1 – невідома дійсна стала.

Підставивши (15) в (10) та розв'язуючи одержану задачу лінійного спряження, знайдемо

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \frac{1}{X(z)}\Bigg\{&C_2 z + C_3 + \frac{1}{2}\bigg[-C_5(z+\gamma_5) - \frac{1}{4}\frac{R^2\overline{\Gamma}'}{z^2}(\gamma_{05} + \gamma_{06}z) + \frac{3\Gamma'}{4R^2}(z^3 \\ &+ \gamma_5 z^2 + \gamma_6 z + \gamma_7) + \left(2\beta_0\overline{a}_0 + \frac{b_\infty}{R^2}\right)(z^2 + \gamma_5 z + \gamma_6) + 2\beta_0 R^2 a_0\left(\frac{\gamma_{05}}{z} + 1\right)\bigg]\Bigg\} + \\ &+ \frac{1}{2}\left[C_5 + \frac{1}{4}\left(\frac{R^2\overline{\Gamma}'}{z^2} - \frac{3\Gamma' z^2}{R^2}\right) - \frac{b_\infty}{R^2}z - 2\beta_0 R\left(\frac{\overline{a}_0 z}{R} + \frac{a_0}{z}R\right)\right] + \frac{2B_1}{2\pi i X(z)}\times \\ &\times\int_L \frac{\theta X^+(t)\,dt}{t-z} = \Phi_0(z)/X(z) + f(z),\end{aligned} \tag{16}$$

де $C_2 = \Gamma$, $C_3 = -2\beta_0 R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(a_0 + \overline{a}_0\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) - \Gamma R\cos\varphi$, $C_5 = \Gamma - \overline{A}_1 + C_1$,

$$\gamma_5 = -R\cos\varphi,\ \ \gamma_6 = \frac{R^2}{2}\sin^2\varphi,\ \ \gamma_7 = \frac{R^3}{2}\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \ \gamma_{05} = -R,\ \ \gamma_{06} = \cos\varphi.$$

Задовольняючи умову $\Phi(0) = A_1$ та враховуючи (16), отримаємо

$$\operatorname{Im} A_1 = -\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}(1 + 3\cos\varphi)\operatorname{Im}\Gamma' + 2\beta_0\operatorname{Im} a_0\left(q - R\sin^6\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$C_1 = 2\Gamma + \frac{1}{8}\cos^2\frac{\varphi}{2}(3\cos\varphi - 1)\left(\overline{\Gamma}' + \Gamma'\right) + 2\beta_0 R\left(3\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^6\frac{\varphi}{2} + 1\right)\operatorname{Re} a_0.$$

Розподіл напружень поблизу вершини тріщини наведено в багатьох монографіях, наприклад [3,4], коефіцієнти інтенсивності напружень визначимо за формулами

$$K_{2j} = -2\delta_j\operatorname{Re}\left[\Phi_0(z_j)e^{i\delta_j\varphi/2}\right](R\sin\varphi)^{-1/2},\ \ K_{1j} = 0,\ \ \delta_j = (-1)^j,\ \ z_j = e^{-i\delta_j\varphi}R.$$

Як частковий випадок з наведених результатів одержимо відомий розв'язок силової задачі [5].

Коли пластина перебуває під дією тільки теплового потоку, контактні напруження і коефіцієнти інтенсивності напружень знайдемо за формулами

$$rrk/(2\beta_0 Rq_\infty) = -\theta\sin\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\cos(\theta-\alpha) - \frac{1}{4}\sin^2\varphi\cos(\theta+\alpha) - \\ - \frac{1}{2}\cos\alpha\left(3\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^6\frac{\varphi}{2} + 1\right), \tag{17}$$

$$K_{2j}k/\left(\beta_0 R^{3/2}q_\infty\right) = \cos\alpha\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin\varphi}\left[\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\varphi\theta\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}d\theta\times \right.\right. \\ \left.\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \delta_j\left(2\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin^2\varphi\right)\right].$$

Враховуючи вираз для контактних напружень (17), можна зробити такі висновки: 1) область контакту не залежить від радіуса кола, де розміщена тріщина; 2) якщо контакт відбувається для даних φ, α і $q_\infty \succ 0$, то контакт відбуватиметься і для $\varphi, -\alpha$, $q_\infty \succ 0$, розподіл контактних напружень у цьому випадку буде дзеркальним відображенням стосовно осі Ox контактних напружень при додатному α; 3) якщо контакт відбувається при заданих φ і α та заданому напрямі теплового потоку, то, змінивши його напрям на протилежний, контакту не матимемо; 4) контакт берегів тріщини достатньо досліджувати при $0 \le \alpha \prec \pi/2$; 5) при $\alpha = 0$ контакт по всій довжині тріщини можливий при будь-якому куті розхилу тріщини φ.

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 198 с.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Рапределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280с.
5. *Опанасович В. К.* Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола // Праці Наук. т-ва ім. Шевченка, – 1997. – Т. 1. – С. 483–491.

THERMOELASTIC CONTACT PROBLEM ABOUT PLATE WITH CRACK LYING ON THE ARC OF CIRCLE

Victor Opanasovych

Ivan Franko National University of L'viv

In the paper stress state of thermoinsulated plate containing the crack lying on the circle arc is considered. Banks of the crack have unfigured contact with each other under the influence of known homogenous stress field and determined thermal flood on the infinity. The analytical expressions for temperature complex potential and complex potentials of Kolocov and Muskhelishvili are shown. In particular case known results from the literature are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.2000