

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛИТИ З ДВОМА ПРЯМОЛІНІЙНИМИ КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА ТЕОРІЄЮ РЕЙССНЕРА

Віктор Опанасович, Роман Селіверстов

Львівський національний університет імені Івана Франка

Дослідимо згин ізотропної пластини постійної товщини h , яка містить дві колінеарні прямолінійні тріщини різної довжини. Вважаємо, що до берегів тріщин прикладені самозрівноважені згинальні моменти, під дією яких береги тріщин не контактують. Згин пластини описується рівняннями за теорією Рейсснера. Треба визначити напружено-деформований стан пластини.

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат з початком посередині перемички між тріщинами, направивши вісь Ox по прямій, на якій вони розміщені. Довжину тріщин позначимо через $2l_j$, тут і надалі індекс j набуває значення 1 або 2. Відстань між їхніми внутрішніми вершинами дорівнює $2c$. Частину дійсної осі, де розміщена j тріщина, позначимо через L_j , крім того, $L = L_1 + L_2$.

Крайові умови задачі матимуть вигляд:

$$M_y^{\pm} = \frac{1}{2}q(x), \quad Q_y^{\pm} = 0, \quad H_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L. \quad (1)$$

Значками «+» і «-» позначено граничне значення функцій при $y \rightarrow \pm 0$; M_y – згинальний момент, H_{xy} – крутильний момент, Q_y – поперечна сила, $q(x)$ – відома функція.

Крайові умови (1) запишемо так

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \quad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$M_y^+ + M_y^- = q(x), \quad Q_y^+ + Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = 0, \quad x \in L. \quad (3)$$

Введемо в розгляд комплексні потенціали $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ та функцію $\Omega(z, \bar{z})$ [1, 6], тоді згинальні і крутні моменти, а також поперечні сили виразимо за формулами

$$M_x + M_y = 2m[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}],$$

$$M_y + iH_{xy} = m[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + n[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi'(z)}] + \rho\left[2\overline{\Phi''(z)} + i\frac{\partial^2\Omega(z, \bar{z})}{\partial z^2}\right], \quad (4)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D\left(2\Phi'(z) - i\frac{\partial\Omega(z, \bar{z})}{\partial z}\right), \quad (5)$$

де $m = -D(1 + \nu)$, $n = D(1 - \nu)$, $\rho = 4D/k^2$, $k = \sqrt{10}/h$, $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$,
 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $i = \sqrt{-1}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, E, ν - відповідно модуль
Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Функції $\Omega(z, \bar{z})$ і $\Phi(z)$ виберемо у вигляді

$$\Omega(z, \bar{z}) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_L f(t) \frac{w K_1(w)}{t - z} dt \right], \quad (6)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z}, \quad (7)$$

де $w = k\sqrt{(t - x)^2 + y^2}$, $f(t)$ - невідома дійсна функція; тут і надалі $K_i(x)$ - функція Макдональда першого порядку.

Беручи до уваги (6) і (7), формулу (5) перепишемо так:

$$Q_x - iQ_y = -\frac{2D}{\pi} \int_L \left[\frac{w^2 \tilde{K}_1(w)}{(t - z)^2} + \frac{k^4(t - \bar{z})K_0(w)}{w^2} (t - x) \right] f(t) dt. \quad (8)$$

Введемо в розгляд функцію

$$V(z) = q\bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z), \quad (9)$$

де $q = -(1 + \nu)/(1 - \nu)$, $\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$.

Враховуючи (6) і (9), формулу (4) подамо у вигляді

$$M_y + iH_{xy} = n \left[q\Phi(z) + V(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z) + i\rho_1 \overline{\Omega_9(z, \bar{z})} \right], \quad (10)$$

де $\Omega_9(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{w [2\tilde{K}_1(w) + wK_0(w)] f(t)}{(t - z)^3} dt + \frac{k^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[i \int_L \frac{w K_1(w) f(t)}{t - z} dt \right] + \frac{k^6}{\pi} \times$
 $\times \int_L \frac{(x - t)y}{w^3} K_1(w) (\bar{z} - t) f(t) dt, \quad K_1(w) = \frac{1}{w} + \tilde{K}_1(w), \quad \rho_1 = \frac{2h^2}{5(1 - \nu)}.$

Функцію $V(z)$ запишемо

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{t - z}. \quad (11)$$

Тут $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, $g_j(t)$ - дійсні функції.

На підставі крайових умов (2) та (8)-(11) отримаємо, що $g_1(t) = 0$,
 $g_2(t) = -\rho_2 f(t)$, $\rho_2 = (5 + \nu)/(1 - \nu)$.

Задовольняючи крайові умови (3), одержимо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження невідомої функції $f(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{\rho_3}{t - x} + \frac{2\rho_1 w^2 \tilde{K}_2(w)}{(t - x)^3} \right] f(t) dt = -\frac{1}{n} q(x), \quad x \in L, \quad (12)$$

де $\tilde{K}_2(w) = K_2(w) - 2/w^2$, $w = k(t - x)$, $\rho_3 = 2(3 + \nu)/(1 - \nu)$.

Рівняння (12) доповнимо додатковими умовами

$$\int_{L_j} f_j(t) dt = 0, \quad f_j(t) = f(t), \quad t \in L_j, \quad (13)$$

які виражають собою однозначність кутів повороту [5], обходячи j -ої тріщини.

Зауважимо таке, коли в (12), (13) зробити граничний перехід, тобто $c \rightarrow \infty$, то отримаємо відповідну систему рівнянь [3].

Систему рівнянь (12), (13) подамо у вигляді

$$\int_{-1}^1 \frac{\rho_3 + \rho_4 \tilde{K}_2(\kappa_j |t - x|)}{t - x} \tilde{f}_j(t) dt + \int_{-1}^1 \frac{\rho_3 + \rho_4 \tilde{K}_2(\tilde{w}_{3-j})}{v_{3-j}} \tilde{f}_{3-j}(t) dt = -\frac{\pi}{n} \tilde{q}_j(x), \quad (14)$$

$$|x| < 1, \quad \int_{-1}^1 \tilde{f}_j(t) dt = 0,$$

де $\gamma_1 = 2c/l_1$, $\delta_1 = l_2/l_1$, $\kappa_1 = \lambda^{-1}$, $\kappa_2 = \gamma_2/\lambda$, $\lambda = h/(l_1 \sqrt{10})$, $\rho_4 = 8/(1 - \nu)$,
 $\delta_2 = \delta_1^{-1}$, $\gamma_2 = \gamma_1/\delta_1$, $\tilde{w}_j = \kappa_j |v_j|$, $v_j = t - \delta_j x + (-1)^{j+1}(1 + \gamma_j + \delta_j)$,
 $(\tilde{q}_j, \tilde{f}_j)(t) = (q_j, f_j)((-1)^{j+1}(c + l_j) + l_j t)$.

Рівняння (14) розв'язуватимемо числово за допомогою методу механічних квадратур [4]. Коефіцієнти інтенсивності напружень [2] можна знайти через вузлові значення шуканих функцій у нулях полінома Чебишова першого роду, але у зв'язку з обмеженістю об'єму статті відповідних числових залежностей для них не наводимо, тільки зауважимо, що в часткових випадках вони збігаються з відомими в літературі [3, 1].

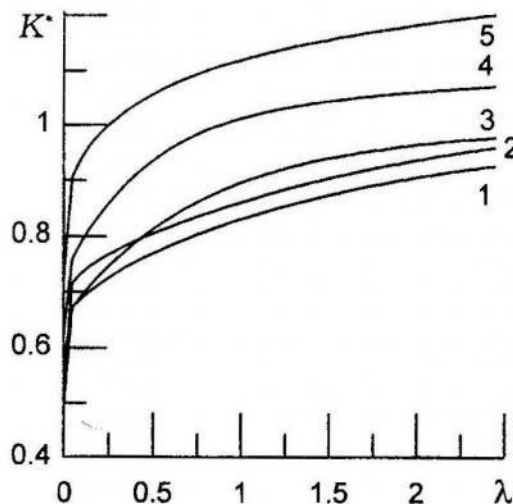


Рис. 1.

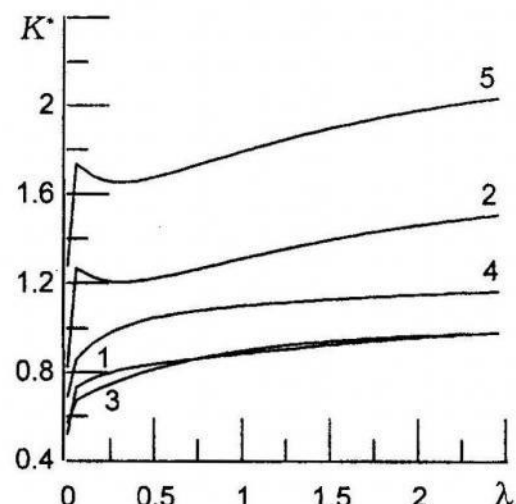


Рис. 2.

Обчислення проводили за допомогою програми мовою Паскаль для СЛАР із 100 рівнянь при $\nu = 0.3$, $\delta_1 = 0.5$. На рис. 1 і рис. 2 залежність на-

веденого коефіцієнта інтенсивності напружень $K^* = K^P / K^K$ від параметра λ відповідно у зовнішніх і внутрішніх вершинах тріщин. Тут K^P – коефіцієнт інтенсивності напружень за Рейснером, K^K – за Кірхгофом для однієї тріщини завдовжки $2l_1$ при постійному згинальному моменті на її берегах. Крива 1 відповідає 2-й тріщині при $\gamma_1 = 1$, крива 2 – 2-й при $\gamma_1 = 0.1$, крива 3 – 1-й при $\gamma_1 = 10$, крива 4 – 1-й при $\gamma_1 = 1$, крива 5 – 1-й при $\gamma_1 = 0.1$.

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1990. – 256 с.
3. Опанасович В. К., Делявський М. В., Подхорецькі А. Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейснера / Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: У 3 т. / За заг. ред. В. В. Панасюка. Т. 2. Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – Львів: Каменяр, 1999. – С. 186-189.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
5. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
6. Угодчиков А. Г., Соболев В. А. Концентрация напряжений около отверстий в плитах по теории Рейснера // Прикл. механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 58-66.
7. Knowles J. K., Wang N. M. On the bending of an elastic plate a crack // J. Math. and Phys. – 1970. – Vol. 39, No. 3. – P. 223-236.

STRESS STATE IN THE PLATE CONTAINING TWO STRAIGHT COLINEAR CRACKS BY REISSNER THEORY

Victor Opanasovych, Roman Seliverstov

Ivan Franko National University of L'viv

In the paper the problem about bending of constant thickness isotropic plate with two different length straight cracks lying on the same line is considered. It is assumed that the selfequilibrium load and bending moments are applied to the banks of the cracks. Using the methods of the theory of functions of complex variable the solution of this problem is reduced to system of two singular integral equations. This system is numerically solved by mechanical quadratures method. Numeric analysis of stress intensity factors is realized. In particular cases results from the scientific literature are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 06.12.1999