*ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ* *VISNYK LVIV UNIV.*
*Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 128–132* *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 128–132*

УДК 539.3

# ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТІЛА ТИПУ ЗЧЕПЛЕННЯ-КОВЗАННЯ З УРАХУВАННЯМ ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ТА ЗНОСУ

**Юрій Пир'єв**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

Розглянуто математичну модель фрикційного термопружного контакту тіла з рухомим навколишнім середовищем, що є продовженням дослідження впливу фрикційного тепловиділення, теплового розширення та зносу [1-3] на рух тіла типу зчеплення-ковзання.

**Формулювання задачі**. Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту прямокутного паралелепіпеда ($L \times a \times b$) масою $M$ з ідеально провідними тілами, що рухаються зі сталими швидкостями $V$ (рис. 1). Ця модель узагальнює попередні дослідження [1] в напрямі врахування зносу. Відстань між рухомими тілами має довжину товщини паралелепіпеда $L$ і в початковий момент зменшується на ε. Паралелепіпед утримує у вертикальному положенні пружина з жорсткістю $C$, і він може рухатися уздовж осі $Z$ декартової системи координат XYZ. Унаслідок дії сил тертя $F_{fr}$ на поверхнях контакту $X = 0$, $X = L$ відбувається теплоутворення та знос. Між поверхнями контакту прямокутного паралелепіпеда і рухомих тіл діє тепловіддача за законом Ньютона. Бічні поверхні паралелепіпеда, які не контактують, теплоізольовані і для їхніх розмірів справджується $L/a \ll 1$, $L/b \ll 1$, що виправдовує використання одновимірної моделі теплопровідності. Приймаємо, що згідно із законом Амонтона $F_{fr} = f(V_{rel})N(t)$, де $f(V_{rel})$ – коефіцієнт тертя (рис. 2), який залежить від відносної швидкості $V_{rel} = V - \dot{Z}(t)$ [4], причому $f(-V_{rel}) = -f(V_{rel})$, $N(t)$ – нормальна сила.

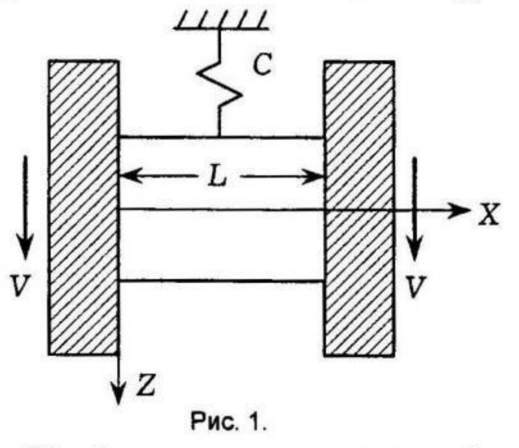


Рис. 1.

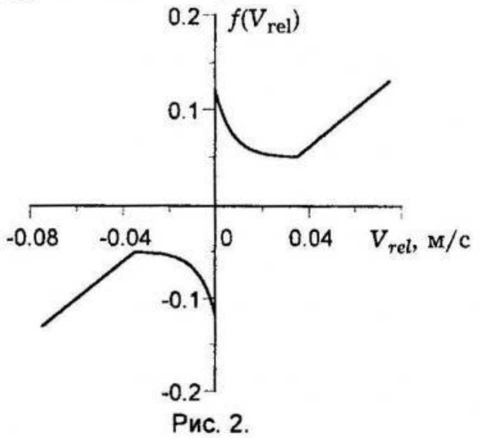


Рис. 2.

Приймаємо, що в початковий момент прямокутний паралелепіпед розташований на відстані $Z_0$ від положення статичної рівноваги паралелепіпеда, де для зручності розмістимо початок системи координат. Початкова швидкість плити дорівнює нулю. Треба визначити температуру $T(X,t)$ паралелепіпеда, переміщення $U(X,t)$, знос $U^w(t)$, нормальні напруження $\sigma_{xx}(X,t)$, зміщення паралелепіпеда $Z(t)$ стосовно положення статичної рівноваги та його швидкість.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial}{\partial X}U(X,t)-\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}T(X,t)\right]=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}T(X,t)=\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}T(X,t) \tag{2}$$

та рівняння руху паралелепіпеда як абсолютно твердого тіла:

$$m\frac{d^2}{dt^2}Z(t)+cZ(t)=2f(V_{rel})P(t) \tag{3}$$

за таких умов:

механічних крайових

$$U(0,t)=\frac{\varepsilon}{2}-U^w(t)\,,\quad U(L,t)=-\frac{\varepsilon}{2}+U^w(t)\,, \tag{4}$$

теплових крайових

$$K\frac{\partial T(0,t)}{\partial X}-\frac{1}{R}T(0,t)=-f(V_{rel})V_{rel}P(t)\,,$$

$$K\frac{\partial T(L,t)}{\partial X}+\frac{1}{R}T(L,t)=f(V_{rel})V_{rel}P(t) \tag{5}$$

початкових

$$T(X,0)=0\,,\quad Z(0)=Z_0\,,\quad \frac{d}{dt}Z(0)=0\,. \tag{6}$$

Закон абразивного зносу має вигляд

$$U^w(t)=K^w\int_0^t\left|V_{rel}(\eta)\right|P(\eta)\,d\eta\,. \tag{7}$$

Нормальні напруження в паралелепіпеді обчислюємо за формулою

$$\sigma_{XX}=\frac{E}{1-2\nu}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\partial U}{\partial X}-\alpha T\right]. \tag{8}$$

У формулах (1)–(8) $E$ – модуль Юнга; $\nu$, $K^w$, $K$, $k$, $\alpha$, $R$ – коефіцієнти Пуассона, зносу, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення, термічного опору тепловіддачі від прямокутного паралелепіпеда до рухомих тіл, відповідно: $m=M/ab$, $c=C/ab$, $P(t)=$ $=N(t)/ab=-\sigma_{XX}(0,t)$ – контактний тиск.

**Побудова розв'язання задачі**. Розв'язок крайової задачі (1)–(8) отримуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Для переходу в область оригіналів використовуємо теореми розкладу і добутку зображень. У результаті отримуємо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{z}(\tau) + z(\tau) = \Omega f\left(V\left(1 - \dot{z}(\tau)\right)\right) p(\tau), \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0, \tag{9}$$

де безрозмірний контактний тиск $p(\tau)$ є розв'язком нелінійного інтегрального рівняння

$$p(\tau) = 1 + 2\gamma\tilde{\omega} Bi \int_0^{\tau} G(\tau - \eta) f\left(V\left(1 - \dot{z}(\eta)\right)\right)\left(1 - \dot{z}(\eta)\right) p(\eta) d\eta -$$
$$- 2\xi \int_0^{t} \left|1 - \dot{z}(\eta)\right| p(\eta)\, d\eta. \tag{10}$$

Безрозмірну контактну температуру $\theta(\tau) = \theta(0,\tau) = \theta(L/L_*, \tau)$ та абразивний знос $u^w(\tau)$ знаходимо за формулами

$$\theta(\tau) = \tilde{\omega} \int_0^{\tau} g(\tau - \eta) f\left(V\left(1 - \dot{z}(\eta)\right)\right)\left(1 - \dot{z}(\eta)\right) p(\eta)\, d\eta; \tag{11}$$

$$u^w(\tau) = \xi \int_0^{\tau} \left|1 - \dot{z}(\eta)\right| p(\eta)\, d\eta. \tag{12}$$

У (10), (11) входять вирази

$$g(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(\mu_m)}{\Delta'(\mu_m)} \exp\left(-\mu_m^2 \tilde{\omega}\tau\right), \quad G(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_m)}{\Delta'(\mu_m)} \exp\left(-\mu_m^2 \tilde{\omega}\tau\right),$$

$$\Delta'(\mu_m) = 0.5\left(2BiS_m + C_m - Bi^2\left(C_m - S_m\right)/\mu_m^2\right),$$

$$\Delta(\mu_m) = 2BiC_m + S_m\left(Bi^2 - \mu_m^2\right),$$

$$\Delta_2(\mu_m) = S_m - BiC_m^0, \quad \Delta_3(\mu_m) = 1 + C_m + BiS_m,$$

$$C_m = \cos(\mu_m), \; S_m = \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m}, \quad C_m^0 = \frac{C_m - 1}{\mu_m^2},$$

де $s_m = -\mu_m^2$ – корені характеристичного рівняння $\Delta(s) = 0$. У розв'язку (9)–(12) введені такі безрозмірні величини:

$$x = \frac{X}{L_*}, \quad z = \frac{Z}{L_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad v = \frac{\dot{Z}(t)}{V}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{L_*}, \quad u = \frac{U}{L_*},$$

$$u^w = \frac{U^w}{\varepsilon}, \quad p = \frac{P}{P_0}, \; \theta = \frac{T}{T_*}, \; \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{k}{L^2\omega}, \quad Bi = \frac{R_0}{R},$$

$$R_0 = \frac{L}{K}, \quad \Omega = \frac{2P_0}{m\omega V}, \; \gamma = \tilde{E}\tilde{\alpha}\tilde{\omega}VR_0, \quad \xi = K^w\tilde{E}\frac{V}{L\omega}$$

і характерні параметри

$$t_* = \frac{1}{\omega}, \quad L_* = \frac{V}{\omega}, \quad T_* = P_0 R_0 V, \quad P_0 = \tilde{E}\frac{\varepsilon}{L}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

**Числові результати**. Співвідношення (9)-(12) є системою нелінійних інтегрального і диференціального рівнянь. Розв'язок шукаємо методом Рунге-Кутта та ітерацій із використанням квадратурної формули трапецій.

Числовий аналіз виконаний для сталевого шару ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6}\,{}^\circ C^{-1}$, $K = 21$ Вт/(м°С), $k = 5.9 \cdot 10^{-6}$ м$^2$/с, $\nu = 0.3$, $E = 19 \cdot 10^{10}$ Па) при $\mathrm{Bi} = 4.76$, $\Omega = 12.8$, $\tilde{\omega} = 0.26 \cdot 10^{-2}$ для різних значень коефіцієнта зносу. Штрихові криві відповідають випадкові знехтування значення теплового розширення $\gamma = 0$, $\xi = 0.017$, суцільні криві – $\gamma = 10$. Фазова картина руху плити (швидкість тіла у кожному його положенні) показана на рис. 3. Поведінка у часі безрозмірної величини зносу $u^w$, контактного тиску $p$ та контактної температури $\theta$ відображена відповідно на рис. 4-6. Крива *1* відповідає випадкові $\xi = 0$, крива *2* – $\xi = 0.017$, крива *3* – $\xi = 0.17$.

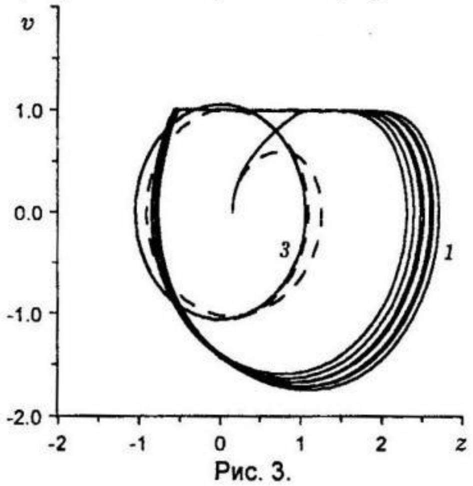

Рис. 3.

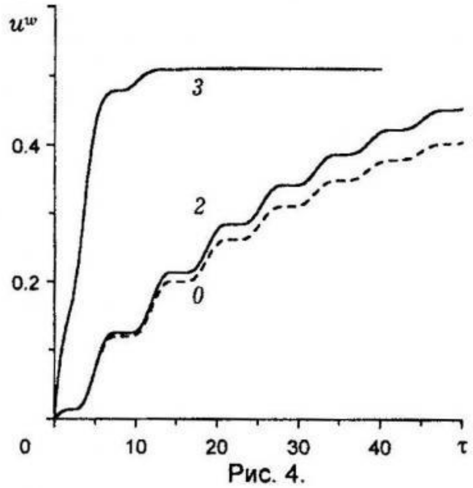

Рис. 4.

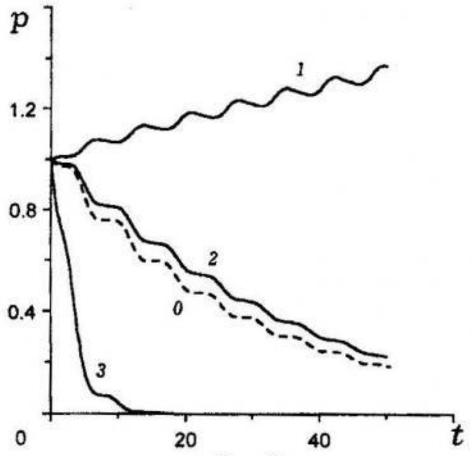

Рис. 5.

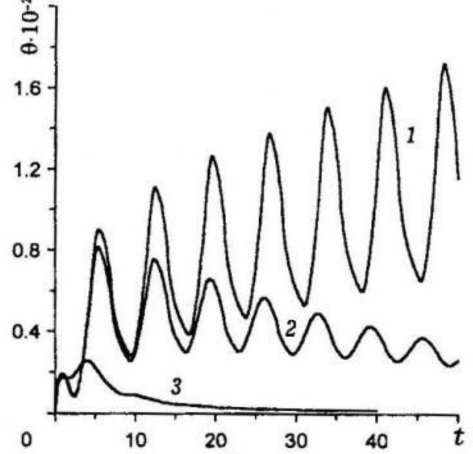

Рис. 6.

Отже, числові результати засвідчили, що коефіцієнт зносу суттєво впливає на характер поведінки характеристик контакту. Якщо зносу нема, то рух тіла має весь час характер типу зчеплення-ковзання (крива *1* на рис. 3), а контактна температура та тиск зростають маючи коливний характер (криві *1* на рис. 5, 6). Врахування зношування призводить до зниження в часі контактної температури і тиску та амплітуди їхніх коливань. У разі збільшення коефіцієнта зносу рух тіла типу зчеплення-ковзання спостерігається для малих часів, знос збільшується.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

---

1. *Пир'єв Ю., Олесяк З.* Фрикційне теплоутворення при русі пружного тіла типу «зчеплення-ковзання» // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Вип. 55. – С. 123–126.
2. *Пырьев Ю. А.* Динамическая модель термоупругого контакта в условиях фрикционного нагрева и ограниченности теплового расширения // Трение и износ. – 1994. – Т. 15, № 6. – С. 941–948.
3. *Olesiak Z. S., Pyryev, Y.* On dynamical thermoelastic contact of two solids with heat of friction generation and wear // Third International Congress on Thermal Stresses. June 13-17, 1999. – Cracow, – 1999. – P. 599–602.
4. *Grudziński K., Wedman S.* Symulacyjne badania ruchu stick-slip przy kinematycznych wymuszeniach zewnętrznych // Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Sliaskiej. XXXVII Sympozjon Modelowanie w mechanice. – 1998, – N. 6–7. – P. 135–142.

## GENERATION OF FRICTIONAL HEAT IN A STICK-SLIP MOTION OF ELASTIC SOLIDS

**Yuriy Pyryev**

*Ivan Franko National University of L'viv*

The one-dimensional thermoelastic frictional contact problem for a plate is considered. The massive plate is kept in a vertical position by a spring and can oscillate in this direction along half-spaces, which are moving with a constant speed. The thermal heat generation takes place on contact surfaces of half-spaces. It is considered, that the coefficient of friction depends on a relative speed. The algorithm of a solution is offered. The contact characteristics are investigated.

Стаття надійшла до редколегії 17.11.1999