ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 133–136 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 133–136*

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЗРІЗАНОГО КРУГОВОГО ПОРОЖНИСТОГО КОНУСА

Геннадій Попов, Наталія Вайсфельд

Одеський державний університет ім. І. І. Мечникова

Побудований розв'язок динамічної нестаціонарної вісесиметричної задачі про пружний стан порожнистого конуса, що зрізаний двома сферичними поверхнями (торці конуса). Конус навантажений по торцях нестаціонарним нормальним стискувальним навантаженням, на бічних конічних поверхнях конуса виконані умови проковзування. Метод розв'язування задачі ґрунтується на застосуванні нового інтегрального перетворення, виведення якого наведено у [2].

Пружний (модуль зсуву G, коефіцієнт Пуассона μ) круговий порожнистий конус: $a_1 < r < a_2$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$, $-\pi < \varphi < \pi$, що зрізаний двома сферичними поверхнями $r = a_1$ і $r = a_2$, піддається впливу по поверхні $r = a_2$ нормального ударного стискувального навантаження $f(\theta)H(t)$, інший торець конуса ($r = a_1$) вважають незавантаженим. На бічних конічних поверхнях $\theta = \omega_0$ і $\theta = \omega_1$ виконуються умови проковзування. Введемо такі позначення:

$$u_r(r,\theta,t) \equiv u,\ u_\theta(r,\theta,t) \equiv v,\ u_\varphi(r,\theta,t) \equiv w,$$

$$\sigma_r(r,\theta,t) \equiv \sigma,\ \tau_{r\theta}(r,\theta,t) \equiv \tau_\theta,\ \tau_{r\varphi}(r,\theta,t) \equiv \tau_\varphi.$$

Тоді у просторі трансформант Лапласа крайові умови задачі запишемо так:

$$\sigma_p(a_1,\theta) = 0, \sigma_p(a_2,\theta) = -f_p(\theta)p^{-1},\ \tau_{\theta p}(a_i,\theta) = 0, \omega_0 < \theta < \omega_1, i = 1,2, \tag{1}$$

$$v_p(r,\omega_0) = 0,\ v_p(r,\omega_1) = 0,\ \tau_{\theta p}(r,\omega_0) = 0,\ \tau_{\theta p}(r,\omega_1) = 0,\ a_1 < r < a_2, \tag{2}$$

де p – параметр перетворення Лапласа.

Застосування формул зв'язку зміщень пружного ізотропного середовища з хвильовими функціями Φ_p, Ω_p [2], що задовольняють хвильове рівняння

$$r^{-2}[(r^2[\Phi'_p, \Omega'_p,])' - \nabla[\Phi_p, \Omega_p] - [p^2c_1^{-2}\Phi_p, p^2c_2^{-2}\Omega_p] = 0, \tag{3}$$

приводить у просторі трансформант Лапласа до співвідношень

$$u_p = \Phi'_p + r^{-1}\nabla\Omega_p(r,\theta), \quad v_p = r^{-1}\Phi^\bullet_p + r^{-1}\Omega^\bullet_p(r,\theta) + \Omega'^\bullet_p(r,\theta),$$

$$\nabla f_p = -\sin^{-1}\theta[\sin\theta f^\bullet_p(r,\theta)]^\bullet, \tag{4}$$

тут і нижче штрих означає похідну за r, а крапка – за змінною θ. Застосовуючи закон Гука і співвідношення Коші, за трансформантами зміщень знайдемо трансформанти напружень:

$$(2\mu)^{-1}\sigma_p = \Phi_p'' + 2\mu\lambda p^2 c_1^{-2}\Phi_p - p^2 c_2^{-2}\Omega_p - p^2 c_2^{-2} r\Omega_p' + 3\Omega_p'' + r\Omega_p''', \tag{5}$$

$$(2\mu)^{-1}\tau_{\theta p} = L_p^{\bullet}(r,\theta),$$

$$L_p(r,\theta) = r^{-1}\Phi_p' - r^{-2}\Phi_p + \Omega_p'' - r^{-1}\Omega_p' - r^{-2}\Omega_p - p(2c_2^2)^{-1}\Omega_p.$$

Щоб задовольнити умови (2), достатньо, відповідно до формул (4), (5), щоб

$$\Phi_p^{\bullet}(r,\omega_j) = \Omega_p^{\bullet}(r,\omega_j) = 0,\ \ j = 0,1. \tag{6}$$

Отже, поставлену задачу зведено до проблеми розшукування хвильових потенціалів з крайових умов (6). Щоб задовольнити ці крайові умови, використаємо інтегральне перетворення

$$g_{pk}^0(r) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta\varphi_c^0(\theta,\nu_k) g_p(r,\theta)d\theta, \qquad g_p(r,\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{pk}^0(r)\varphi_c^0(\theta,\nu_k)}{\sigma_{0,k}^c(\omega_0,\omega_1)}. \tag{7}$$

Ядром цього інтегрального перетворення є власна функція задачі Штурма – Ліувілля, розв'язана у [2], яка має вигляд

$$\varphi_c^0(\theta,\nu_k) = P_{\nu_k}^0(\cos\theta)dQ_{\nu_k}^0(\cos\omega_1)/d\omega_1 - Q_{\nu_k}^0(\cos\theta)dP_{\nu_k}^0(\cos\omega_0)/d\omega_0, \tag{8}$$

ν_k розшукують з рівняння

$$\Delta_\nu^0 \equiv P_\nu^0(\cos\omega_1)Q_\nu^0(\cos\omega_0) - P_\nu^0(\cos\omega_0)Q_\nu^0(\cos\omega_1)\Big|_{\nu=\nu_k} = 0,\ \ k = 0,1,2,...$$

$$\frac{1}{\sigma_{0,k}^c(\omega_0,\omega_1)} = (2\nu_k+1)\frac{dQ_{\nu_k}^0(\cos\omega_0)}{d\omega_0}\left[\frac{dQ_{\nu_k}^0(\cos\omega_{10})}{d\omega_{10}}\frac{\partial}{\partial\nu}\Omega_{\nu,0}^0\Big|_{\nu=\nu_k}\right]^{-1}, \tag{9}$$

а функція (8) задовольняє умову

$$\varphi_c^0(\omega_j,\nu_k) = 0,\ \ j = 0,1. \tag{10}$$

Як результат, отримаємо диференціальні рівняння

$$\left[r^2\begin{bmatrix}\Phi_{pk}'(r)\\ \Omega_{pk}'(r)\end{bmatrix}\right]' - \nu_k(\nu_k+1)\begin{bmatrix}\Phi_{pk}(r)\\ \Omega_{pk}(r)\end{bmatrix} - r^2\begin{bmatrix}p^2c_1^{-2}\Phi_{pk}(r)\\ p^2c_2^{-2}\Omega_{pk}(r\end{bmatrix} = 0. \tag{11}$$

Загальний розв'язок цих рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix}\Phi_{pk}(r)\\ \Omega_{pk}(r)\end{bmatrix} = r^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}X_1 I_{\nu+\frac{1}{2}}(rpc_1^{-1})\\ X_3 I_{\nu+\frac{1}{2}}(rpc_2^{-1})\end{bmatrix} + r^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}X_2 K_{\nu+\frac{1}{2}}(rpc_1^{-1})\\ X_4 K_{\nu+\frac{1}{2}}(rpc_2^{-1})\end{bmatrix}, \tag{12}$$

Невідомі сталі X_j, $j = \overline{1,4}$ можна обчислити, виконавши крайові умови (1). Спочатку задовольнимо умови $\tau_{p\theta}(a_i, \theta) = 0$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$,. $i = 1,2$. Для цього треба, щоб

$$L_p(a_i, \theta) = 0. \tag{13}$$

До (13) застосуємо інтегральне перетворення (7) і підставимо до отриманих співвідношень (12). Це приведе до двох рівнянь відносно невідомих сталих $X_j, j = \overline{1,4}$:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{j\,i} A_\nu^j(p,k) = 0, \quad i = 1,2, \tag{14}$$

де $\quad {}_iA_\nu^1 = -3(2a_i^{5/2})^{-1} I_{\nu+\frac{1}{2}}(a_i p c_1^{-1}) + a_i^{-3/2} I'_{\nu+\frac{1}{2}}(a_i p c_1^{-1}),$

$${}_iA_\nu^3 = -3(4a_i^{5/2})^{-1} I_{\nu+\frac{1}{2}}(a_i p c_2^{-1}) + a_i^{-1/2} I''_{\nu+\frac{1}{2}}(a_i p c_2^{-1}) - (2c_2^2 a_i^{1/2})^{-1} I_{\nu+\frac{1}{2}}(a_i p c_2^{-1}).$$

У коефіцієнтах ${}_iA_\nu^j(p,k)$, $j = 2,4$ замість $I_{\nu+\frac{1}{2}}$ потрібно брати $K_{\nu+\frac{1}{2}}$. Задовольняючи аналогічно умови, з (1), отримаємо ще два рівняння, в останньому з яких, у правій частині замість нуля буде трансформанта ударного стискувального навантаження. Розв'язуючи систему лінійних алгебричних рівнянь вигляду (14), отримаємо явні вирази для невідомих сталих X_j, $j = \overline{1,4}$. Наприклад, для X_1 маємо $X_1 = I / \Lambda_{pk}$, де

$$I = f_k[-\frac{3}{4} I_\nu(a_1 p c_1^{-1}) + (2a_1^2)^{-1} I'_\nu(a_1 p c_1^{-1})][a_1^{-3/2} K'_\nu a_1 p c_1^{-1}) - 3(2a_1^{5/2})^{-1} \times$$

$$\times K_\nu(a_1 p c_1^{-1})] - [I_\nu(a_2 p c_1^{-1}) K_\nu(a_2 p c_1^{-1}) + I_\nu(a_{21} p c_2^{-1}) K_\nu(a_1 p c_2^{-1})],$$

$$\Lambda_{pk} = [-3(2a_2^{5/2})^{-1} I_\nu(a_2 p c_2^{-1}) + a_2^{-3/2} I'_\nu(a_2 p c_2^{-1})][(3c_1 + 8a_2^2)(4c_1 a_2^{5/2})^{-1} \times$$

$$\times K_\nu(a_2 p c_2^{-1}) - a_2^{-3/2} K'_\nu(a_2 p c_2^{-1}) + a_2^{-1/2} K''_\nu(a_2 p c_2^{-1})].$$

Отже, отримано точний розв'язок задачі. Розрахунки за цими формулами непрості, тому розглянемо асимптотичний розв'язок для малих значень часу. З цією метою треба розкласти трансформанти Лапласа за оберненими степенями параметра перетворення Лапласа p (що відповідає у разі обернення перетворення малим значенням t). Використовуючи розклад модифікованих функцій Бесселя для великих значень аргумента [1] та підставляючи ці співвідношення у знайдені вирази X_j, $j = \overline{1,4}$, отримаємо

$$X_{pk}^1 \sim \frac{B_1}{2A_1 a_1 a_2 p} \left\{1 + \sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^1}{(2p)^i} + O(p^{-5})\right\}, \tag{15}$$

$A_1 = (\frac{3c_1 + 8a_2^2}{4c_1a_1^4} + \frac{9c_1 + 24a_2^2}{8c_1a_1^5})^{-1}$, $B_1 = (\frac{3 - 3a_2^3 + a_2^2}{2a_1^4})^{-1}$, коефіцієнти S_i^1 визначено коефіцієнтами у розкладах модифікованих функцій Бесселя. Такого ж вигляду розклади отримані й для інших коефіцієнтів X_j, $j = \overline{2,4}$. Знайдені розклади вигляду (15) підставимо у (12) та використаємо обернене перетворення Лапласа, використовуючи теорему про згортку для перетворення Лапласа:

$$\Phi_k(t) = r^{-1/2}\int_0^t [X_k^1(\tau)F_1(t-\tau) + X_k^2(\tau)F_2(t-\tau)d\tau], \tag{16}$$

де

$$X_k^1(t) = B_1(2A_1a_1a_2)^{-1}\left\{t^{\nu+\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{4} S_i^1\Gamma^{-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)(rc_1^{-1} - t)^{\nu+i-1}\right\},$$

$$X_k^2(t) = B_2(2A_2a_1a_2)^{-1} + \sum_{i=1}^{4} S_i^2\Gamma^{-1}(i)t^i, \; F_1(t) = (2rc_1^{-1}t - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\pi^{-1/2}\Gamma^{-1}\left(\nu+\frac{1}{2}\right),$$

$$F_2(t) = (r^2c_1^{-2} - t^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\left[\left(v+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arcch}(tc_1r^{-1})\right].$$

Аналогічно визначимо функцію $\Omega_k(r,t)$ та підставимо отримані вирази у співвідношення (5).

Отже, отримані формули дають змогу визначити пружний стан конуса при малих значеннях часу.

---

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – Т. 2 – 295 с.
2. *Попов Г. Я.* Задача о напряженном состоянии упругого конуса, ослабленного трещинами // Приклад. математика и механика. – 1999. – Т. 27, № 6. – С. 89–114.

DYNAMIC NONSTATIONARY MIXED PROBLEM FOR THE CUTTED CIRCULAR HOLLOW CONE

Gennadiy Popov, Natalia Whitefield

Mechnikova State University Odessa

The problem on stress state of the circular hollow cone cutted with two spherical surfaces and loaded on the one of the ends by nonstationary normal load is considered. The method of exact solution construction is based on the application of the new integral transformation, which is proposed in [2].

Стаття надійшла до редколегії 04.01.2000