ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 137–141 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 137–141*

УДК 536.2

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ МЕТОДОМ ПОЕТАПНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Василь Попович, Галина Гарматій

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Донедавна процеси передавання тепла досліджували на основі лінійних математичних моделей. Безумовно, повніше описують реальні процеси поширення тепла, особливо в умовах високотемпературного нагрівання, нелінійні моделі, отримані з урахуванням залежності теплофізичних характеристик матеріалу конструкції від температури. Знаходження аналітичних розв'язків таких нелінійних задач теплопровідності пов'язане зі значними математичними труднощами і тому для їхнього розв'язування застосовують переважно числові методи.

Водночас безперечну цінність становлять аналітичні чи аналітично-числові розв'язки таких задач. Вони дають змогу виконувати якісний аналіз знайдених температурних полів, а також можуть слугувати еталонами для побудови різних числових методів.

Нижче пропонуємо метод побудови аналітично-числових розв'язків нестаціонарних нелінійних задач теплопровідності для основних елементів конструкцій (пластина, циліндр, труба, порожниста чи суцільна сфера) за наявності конвективного теплообміну на їхніх поверхнях.

Розглянемо задачу про визначення температурного поля $t(x,\tau)$ в тілі, виготовленому з матеріалу з простою нелінійністю (коефіцієнт теплопровідності $\lambda_t(t)$ і об'ємна теплоємність $c_v(t)$ залежать від температури, а їхнє відношення – коефіцієнт температуропровідності $a = \lambda_t(t)/c_v(t)$ прийнято сталим). Нехай на поверхні тіла $x = c$ задана температура або тепловий потік, а на поверхні $x = b$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем сталої температури t_b. У початковий момент часу температура тіла стала і дорівнює t_p.

Математична модель задачі має такий вигляд [6]:

$$\frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^k\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right] = c_v(t)\frac{\partial t}{\partial \tau} - w_t, \tag{1}$$

$$t\big|_{x=c} = t_c \qquad \text{або} \qquad \lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=c} = q, \tag{2}$$

$$\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=b} - \alpha(t - t_b)\big|_{x=b} = 0, \tag{3}$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_p, \tag{4}$$

де $k = 0$; 1; 2 відповідає декартовій, циліндричній і сферичній системам координат; α – коефіцієнт теплообміну з поверхні $x = b$; w_t – густина джерел тепла.

В основі запропонованої тут методики є поетапна лінеаризація крайової задачі (1)–(4), яка включає введення інтегральної змінної Кірхгофа з подальшою лінеаризацією крайової умови конвективного теплообміну за допомогою сплайн-апроксимації температури на поверхні $x = b$. Унаслідок цього отримуємо лінійну крайову задачу на змінну Кірхгофа, розв'язок якої можна знайти за допомогою відомих класичних методів [1–3,7]. Після конкретизації залежності $\lambda_t(t)$ невідомі коефіцієнти сплайн-апроксимації визначаємо з системи рівнянь, яку отримуємо з умови рівності значень сплайну у вузлах апроксимації відповідним значенням температури тіла на поверхні $x = b$.

Якщо $\lambda_t(t)$ і $c_v(t)$ зобразити у вигляді $\lambda_t(t) = \lambda_{t0}\overline{\lambda_t}(T)$, $c_v(t) = c_{v0}\overline{c_v}(T)$, де λ_{t0}, c_{vo} – так звані опорні коефіцієнти, які мають відповідну розмірність, а $\overline{\lambda_t}(T)$, $\overline{c_v}(T)$ – функції безрозмірної температури $T = t / t_0$, де t_0 – деяка характерна для цього процесу температура; а також переписати задачу (1) –(4) у безрозмірних величинах $\overline{x} = x / l$, $\mathrm{Fo} = a\tau / l^2$, $\mathrm{Bi} = \alpha l / \lambda_{t0}$, де l – деякий характерний розмір тіла та застосувати до неї інтегральне перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^{T} \overline{\lambda_t}(T)dT, \tag{5}$$

то з нелінійного рівняння теплопровідності (1) отримаємо таке лінійне рівняння на змінну Кірхгофа:

$$\frac{1}{\overline{x}^k}\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left[\overline{x}^k \frac{\partial \theta}{\partial \overline{x}}\right] = \frac{\partial \theta}{\partial\, \mathrm{Fo}} - W_t, \tag{6}$$

де $W_t = \dfrac{w_t l^2}{t_0 \lambda_{t0}}$.

Крайові умови (2) та початкова умова (4) трансформуються у такі лінійні умови на змінну θ:

$$\theta\big|_{\overline{x}=\overline{c}} = \theta_1 \quad \text{або} \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{c}} = Q, \qquad \theta\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \tag{7}$$

де $\theta_1 = \int_{T_p}^{T_c} \overline{\lambda_t}(T)dT$, $T_p = \dfrac{t_p}{t_0}$, $T_c = \dfrac{t_c}{t_0}$, $Q = \dfrac{lq}{\lambda_{t0}}$.

Крайова умова конвективного теплообміну на поверхні $\overline{x} = \overline{b}$ лінеаризується частково і набуває вигляду

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=\bar{b}} - \mathrm{Bi}\left[T(\theta)|_{\bar{x}=\bar{b}} - T_b\right] = 0\,, \tag{8}$$

де $T(\theta)$ – залежність температури від змінної Кірхгофа, знайдена для конкретного коефіцієнта теплопровідності зі співвідношення (5); $T_b = t_b / t_0$.

Наприклад, у випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури $\lambda_t(t) = \lambda_{t0}(1 - kT)$ ця залежність має вигляд

$$T(\theta) = \frac{1}{k}\left(1 - \sqrt{1 - 2k(\theta + T_p - \frac{k}{2}T_p^2)}\right). \tag{9}$$

Отже, введення змінної Кірхгофа дало змогу повністю лінеаризувати рівняння теплопровідності, задану нелінійну умову другого роду на поверхні $\bar{x} = \bar{c}$ і лише частково умову конвективного теплообміну на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$.

У працях [4, 5] нелінійний вираз $T(\theta)$ в умові конвективного теплообміну (8) замінено змінною Кірхгофа θ. Така лінеаризація крайової умови (8) може призвести не тільки до числових, а й фізично неправильних результатів [6].

Тут же пропонуємо лінеаризувати крайову умову (8) шляхом зображення $T(\theta)|_{\bar{x}=\bar{b}}$ за допомогою спеціально побудованих сплайнів нульового або першого порядку.

Оскільки для задачі (6)–(8) температурне поле в тілі описує функція координати і часу $T(\bar{x}, \mathrm{Fo})$, то шукана температура на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ є функцією лише змінної $\mathrm{Fo}: T(\bar{b}, \mathrm{Fo})$. Виберемо з області неперервної зміни аргументу Fo шуканої функції на границі $\bar{x} = \bar{b}$ деяку кінцеву множину точок Fo_i ($i = \overline{1, n}$), причому $0 = \mathrm{Fo}_0 < \mathrm{Fo}_1 < \mathrm{Fo}_2 < \cdots < \mathrm{Fo}_n$, яка розділить область зміни часу на $n+1$ проміжок. Позначимо таке розбиття через Δ і побудуємо на ньому сплайн нульового порядку $S_\Delta^0(T, \mathrm{Fo})$, значення якого в моменти часу Fo_i збігаються зі значеннями функції $T(\bar{b}, \mathrm{Fo})$, а на кожному з проміжків інтерполює її сталою величиною. Використовуючи одиничну функцію $S_+(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_i) = \begin{cases} 1, & \mathrm{Fo} > \mathrm{Fo}_i \\ 0, & \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_i \end{cases}$, цей сплайн запишемо у вигляді

$$S_\Delta^0(T, \mathrm{Fo}) = T_1 S_+(\mathrm{Fo}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[T_{i+1} - T_i\right] S_+(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_i), \tag{10}$$

де T_i – значення шуканої температури на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ у момент часу Fo_i.

Після зображення температури на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ сплайном (10) крайова умова (8) повністю лінеаризується і набуває вигляду

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{b}} - \mathrm{Bi}\left[S_{\Delta}^{0}(T,\mathrm{Fo}) - T_b\right] = 0. \tag{11}$$

Аналогічно, на наведеному вище розбитті Δ можна побудувати сплайн першого порядку $S_{\Delta}^{1}(T,\mathrm{Fo})$, який збігається з функцією $T(\overline{b},\mathrm{Fo})$ в точках Fo_i, а на кожному з проміжків розбиття наближає $T(\overline{b},\mathrm{Fo})$ багаточленом першого степеня $P_i(\mathrm{Fo}) = a_{i,0} + a_{i,1}\,\mathrm{Fo}$. Такий сплайн можна записати за допомогою одиничної функції у такому вигляді:

$$S_{\Delta}^{1}(T,\mathrm{Fo}) = P_1(\mathrm{Fo})S_{+}(\mathrm{Fo}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[P_{i+1}(\mathrm{Fo}) - P_i(\mathrm{Fo})\right]S_{+}(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_i), \tag{12}$$

де коефіцієнти $a_{i,0}$, $a_{i,1}$ багаточленів $P_i(\mathrm{Fo})$ виражені формулами

$$a_{i,1} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\mathrm{Fo}_i - \mathrm{Fo}_{i-1}}, \qquad a_{i,0} = T_{i-1} - a_{i,1}\mathrm{Fo}_{i-1}.$$

Після зображення $T(\overline{b},\mathrm{Fo})$ сплайном $S_{\Delta}^{1}(T,\mathrm{Fo})$ гранична умова (8) повністю лінеаризується і набуває вигляду

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{b}} - \mathrm{Bi}\left[S_{\Delta}^{1}(T,\mathrm{Fo}) - T_b\right] = 0. \tag{13}$$

Унаслідок розв'язування лінеаризованої задачі (6), (7), (11) або (6), (7), (13) отримаємо змінну Кірхгофа як функцію координати $\overline{x}$, часу Fo, моментів часу Fo_i і невідомих значень T_i, тобто

$$\theta = \theta(\overline{x},\mathrm{Fo},\mathrm{Fo}_i,T_i) \qquad (i = \overline{1,n}). \tag{14}$$

Підставивши θ у вираз $T(\theta)$ (наприклад, (9)), визначимо остаточну формулу для обчислення температури в будь-якій точці $\overline{x}$ цього тіла в довільний момент часу Fo:

$$T = T(\overline{x},\mathrm{Fo},\mathrm{Fo}_i,T_i) \qquad (i = \overline{1,n}). \tag{15}$$

Приймаючи в (15) по черзі $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_i$ $(i = \overline{1,n})$ і враховуючи умову збіжності значень побудованих вище сплайнів зі значеннями температури на поверхні $\overline{x} = \overline{b}$ в моменти часу Fo_i, отримуємо таку систему рівнянь для знаходження невідомих T_i:

$$\begin{cases} T_1 = f(\overline{b},\mathrm{Fo}_1,T_1), \\ T_2 = f(\overline{b},\mathrm{Fo}_1,\mathrm{Fo}_2,T_1,T_2), \\ \vdots \\ T_n = f(\overline{b},\mathrm{Fo}_1,\mathrm{Fo}_2,\cdots,\mathrm{Fo}_n,T_1,T_2,\cdots,T_n). \end{cases} \tag{16}$$

Завдяки специфіці побудованих вище сплайнів $S_{\Delta}^{0}(T,\mathrm{Fo})$, $S_{\Delta}^{1}(T,\mathrm{Fo})$ перше рівняння системи містить одну невідому T_1, друге – дві невідомі T_1,

T_2 і т.д. Розв'язавши перше рівняння, знайдемо значення T_1. Підставивши T_1 в друге рівняння, обчислимо значення T_2. Так послідовно визначимо з відповідних нелінійних рівнянь (16) усі невідомі T_i. Остаточний розв'язок задачі (1)–(4) отримаємо після підстановки значень T_i у формулу (15). Зауважимо, що у випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури розв'язок системи рівнянь (15) відшукують в аналітичному вигляді.

Розумно моменти часу Fo_i можна вибрати, виходячи з апріорного оцінювання поведінки шуканої температури на поверхні $\overline{x} = \overline{b}$. Близький до оптимального вибір значень Fo_i можна виконати, якщо скористатися відомими розв'язками відповідних крайових задач для аналогічних нетермочутливих тіл.

---

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк. 1967. – 599 с.
4. *Недосека А. Я.* Основы расчета сварных конструкций. – К.: Выща шк., 1988. – 263 с.
5. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
6. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні. – Львів, 1993. – 66 с. – (Препринт / АН України, Ін-т прик. проблем мех.).
7. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М.: Изд-во. иностр. лит. 1955 – 668 с.

SOLUTION OF THE NONLINEAR HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE BODIES BY THE STAGE–BY–STAGE LINEARIZATION METHOD

Vasyl Popovych, Galyna Harmatij

Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

The method to construct the solutions of nonstationary heat conduction problems for bodies (with dependent on the temperature characteristics) under convective heat exchange on their surfaces is proposed. The stage–by–stage linearization by introducing the Kirchhoff integral variable with subsecvent linearization of boundary condition of convective heat exchange with the help of spline approximations makes the basis of the method.

Стаття надійшла до редколегії 13.12.1999