ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 142–145 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 142–145*

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БІЛЯ ГОСТРОЇ ВЕРШИНИ ЖОРСТКО ПІДКРІПЛЕНОГО М'ЯКОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Василь Пороховський*, Ярослав Кунець*, Віктор Міщенко*, Ірина Желавська**

**Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*
***Хмельницький політехнічний коледж*

Як відомо, розподіл напружень поблизу гострої вершини пружного включення, що має форму кута нульового розхилу та перебуває в матриці в умовах ідеального контакту, такий же, як і в разі відсутності неоднорідності [2, 4]. Водночас у випадку прямування відношень модулів Юнга включення та матриці до нуля або безмежності характер розв'язку задачі різко змінюється: з'являється коренева особливість у напруженнях. Ми на прикладі задачі антиплоского зсуву вивчали подібне явище у випадку, коли тонке пружне включення жорстко закріплене з одного боку.

Нехай в однорідному пружному середовищі з модулем зсуву μ перебуває тонкостінне пружне включення з модулем зсуву μ_0, що займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2)\colon\ -a \le x_1 \le a,\ -\varepsilon f(x_1) \le x_2 \le \varepsilon f(x_1) = h(x_1)/2\}$, обмежену ∂W_ε. Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; $h(x_1)$ – товщина включення, a – довжина включення; $f(x_1)$ – достатньо гладка додатно визначена функція; ε – малий безрозмірний параметр.

За умов антиплоскої динамічної стаціонарної задачі відмінна від нуля компонента вектора зміщень задовольняє у відповідних областях рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u^s(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\varepsilon, \qquad (\Delta + k_0^2)u^0(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \tag{1}$$

і такі умови спряження на межі ∂W_ε:

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}),\ \ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n^0} = \gamma \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial n^0},\ \ \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon \setminus W_1,\ \gamma = \mu_0/\mu,$$

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_1, \quad W_1 = \{|x_1| \le a,\ x_2 = -\varepsilon f(x_1)\},$$

$$u(\mathbf{x}) = u^s(\mathbf{x}) + u^*(\mathbf{x}). \tag{2}$$

У співвідношеннях (1), (2) $u^s(\mathbf{x})$ – розсіяне неоднорідністю поле, що задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда, $u^0(\mathbf{x})$ – зміщення у включенні; $u^*(\mathbf{x})$ – відомі зміщення в середовищі у разі відсутності неоднорідності; k та k_0 – хвильові числа в матриці та у включенні, відповідно; n^0 – зовнішня нормаль до ∂W_ε. В умовах спряження (2) враховано, що нижня межа включення з'єднана з матрицею через нерухомий абсолютно жорсткий прошарок нульової товщини.

Нехай $\mathbf{t} = (\tau_1, \tau_2)$ – локальна система координат з початком в одній із точок ($x_1 = \pm a$, $x_1 = 0$), уведена так, що осі τ_1 та τ_2 відповідно напрямлені по дотичній та граничній нормалі до серединної лінії включення. Надалі припускаємо, що включення гострокінцеве. Тоді в системі координат $\mathbf{t}$ асимптотика функції $f(x_1)$ при $x_1 \to \pm a$ має вигляд

$$f(\tau_1) = f_0 |\tau_1|^\delta + \ldots, \quad \tau_1 \to 0, \quad f_0 = \text{const} \neq 0, \quad \delta > 1. \tag{3}$$

У праці [7] зазначено, що при $\gamma \ll 1$ умови спряження (2) можна замінити спрощеними умовами контакту матриці та включення, заданими на серединній лінії неоднорідності:

$$\gamma_1 \left[u^s(x_1,+0) + u^*(x_1,0) \right] = f(x_1) \left[\frac{\partial u^s(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{\partial u^*(x_1,0)}{\partial x_2} \right], \quad \gamma_1 = \gamma / \varepsilon,$$

$$u^s(x_1,-0) + u^*(x_1,0) = 0, \quad |x_1| < a;$$

$$u^0(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2x_2}{h(x_1)}\right]\left[u^s(x_1,+0) + u^*(x_1,0) \right], \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon. \tag{4}$$

Коли $f(x_1)$ функція має асимптотику (3), співвідношення (4) асимптотично точно описують напружено-деформований стан у всьому композиті [2, 7].

У випадку, коли $\gamma_1 \neq 0$, розв'язок задачі $u^s(\mathbf{x})$ має асимптотику [3, 7] (r, ϕ − полярні координати)

$$u^s(r,\phi) = a_0 + a_1 \sqrt{r} \cos\frac{\phi}{2} + O(r), \ \ r \to 0, \ \ \tau_1 = r\cos\phi, \tau_2 = r\sin\phi, \ \ -\pi \leq \phi \leq \pi. \tag{5}$$

Водночас при $\gamma_1 = 0$ для $u^s(\mathbf{x})$ матимемо [1, 3]

$$u^s(r,\phi) = b_0 + b_1 r^{\nu_1}(\cos\nu_1\phi + \sin\nu_1\phi) + b_2 r^{\nu_2}(\cos\nu_2\phi - \sin\nu_2\phi) + O(r), r \to 0,$$

$$\nu_1 = 1/4, \quad \nu_2 = 3/4. \tag{6}$$

За допомогою методу зрощування асимптотичних розкладів обґрунтуємо різку зміну поведінки напружено-деформованого стану композита при $\gamma_1 \to 0$, а, отже, з'ясуємо зв'язок між коефіцієнтами a_i ($i = 0,1$) та b_i ($i = 0, 1, 2$) в розкладах (5) та (6).

Запишемо розв'язок задачі (1), (4) у вигляді асимптотичного розкладу за малим параметром γ_1:

$$u^s(\mathbf{x}) = u_0^s(\mathbf{x}) + \gamma_1 u_1^s(\mathbf{x}) + \ldots, \quad \gamma_1 \to 0. \tag{7}$$

Підставляючи розклад (7) у співвідношення (1), (4) та прирівнюючи вирази при однакових степенях γ_1, отримаємо рівняння та крайові умови для визначення членів розкладу $u_i^s(\mathbf{x})$ ($i = 1,2$)

$$(\Delta + k^2) u_i^s(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad i = 1,2,$$

$$\frac{\partial u_0^s(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{\partial u^i(x_1,0)}{\partial x_2} = 0, \quad u_0^s(x_1,-0) + u^i(x_1,0) = 0, \ \ |x_1| < a,$$

$$\frac{\partial u_1^s(x_1,+0)}{\partial x_2} = f^{-1}(x_1)\left[u_0^s(x_1,+0) + u^i(x_1,0) \right], \ u_1^s(x_1,-0) = 0, \ \ |x_1| < a. \tag{8}$$

Дослідження задач (8) поблизу кінців включення ґрунтується на так званій процедурі розщеплення, запропонованій та обґрунтованій для іншої ситуації в працях [4, 6]. Тому, використовуючи згадану процедуру, для функцій $u_i^s(\mathbf{x})$ ($i = 1,2$) при $x_1 \to \pm a$ маємо асимптотику

$$u_0^s(r,\phi) = a_0^0 + a_1^0 r^{\nu_1}(\cos\nu_1\phi + \sin\nu_1\phi) + b_1^0 r^{\nu_2}(\cos\nu_2\phi - \sin\nu_2\phi) + O(r), \ \ r \to 0,$$

$$u_1^s(r,\phi) = Ca_0^1 + a_1^1 r^{\nu_{11}} \sin[\nu_{11}(\phi+\pi)] + b_1^1 r^{\nu_{12}} \sin[\nu_{12}(\phi+\pi)] + O(r), \quad r \to 0,$$

$$\nu_{11} = \nu_1 + 1 - \delta, \ \ \nu_{12} = \nu_2 + 1 - \delta, \ \ a_0^0 = -a_0^*, \ \ a_1^1 = -\sqrt{2}a_1^0 (f_0 \cos 2\pi\nu_{11})^{-1},$$

$$b_1^1 = \sqrt{2}\, b_1^0 (f_0 \cos 2\pi\nu_{12})^{-1}, \ C = 1 \text{ при } \nu_{12} \ge 0, \ C = 0 \text{ при } \nu_{12} < 0. \qquad (9)$$

Тут коефіцієнти a_1^0, b_1^0 визначені в процесі розв'язування задачі (8); a_0^*, a_1^*, b_1^* – відомі коефіцієнти розкладу функції $u^*(\mathbf{x})$ при $x_1 \to \pm a$:

$$u^*(r,\phi) = a_0^* + a_1^* r\cos\phi + b_1^* r \sin\phi + \ldots, \quad r \to 0.$$

Зазначимо, що розклади (9) отримані у випадку, коли показники ν_{11}, ν_{12} не є власними числами спектральної задачі

$$\frac{d^2 v(\phi)}{d\phi^2} + \nu_{1i}^2 v(\phi) = 0, \ \frac{dv(\phi)}{d\phi} = 0 \quad \text{при } \phi = \pi, \quad v(-\pi) = 0, \quad i = 1,2,$$

тобто коли $\nu_{1i} \ne \pm 1/4 + n$, $i = 1,2$ (n – ціле число). В іншому випадку для функції $u_1^s(\mathbf{x})$ маємо

$$u_1^s(r,\phi) = Ca_0^1 + 2\nu_{11}^{-1} a_1^1 r^{\nu_{11}} \ln(r) \cos[\nu_{11}(\phi+\pi)] + 2\nu_{12}^{-1} b_1^1 r^{\nu_{12}} \ln r \cos[\nu_{12}(\phi+\pi)] -$$
$$- a_1^1 r^{\nu_{11}} \phi \sin[\nu_{11}(\phi+\pi)] - b_1^1 r^{\nu_{12}} \phi \sin[\nu_{12}(\phi+\pi)] + Ca_2^1 r^{\nu_{11}} (\cos\nu_{11}\phi + \sin\nu_{11}\phi) +$$
$$+ C b_2^1 r^{\nu_{12}} (\cos\nu_{12}\phi + \sin\nu_{12}\phi) + \ldots, \quad r \to 0,$$

$$a_1^1 = -\sqrt{2}\, a_1^0 (f_0 \sin 2\pi\nu_{11})^{-1}, \quad b_1^1 = \sqrt{2}\, b_1^0 (f_0 \sin 2\pi\nu_{12})^{-1}. \qquad (10)$$

Асимптотичний розклад (7) з точністю до величин порядку γ_1 дає розв'язок розглядуваної задачі всюди, за винятком деяких околів кінців включення, умову визначення яких запишемо у вигляді

$$u_0^s(r,\phi) / u_1^s(r,\phi) = O(\gamma_1), \quad r \to 0, \quad \gamma_1 \to 0. \qquad (11)$$

Зі співвідношень (9)–(11) знаходимо, що розклад (7) перестає бути асимптотичним в околі $r = O(\gamma_2)$, $\gamma_2 = \gamma_1^{1/(\delta-1)}$, тому для визначення розв'язку сформульованої задачі в цій області потрібно побудувати відповідні внутрішні асимптотичні розклади. Введемо внутрішню змінну

$$\overline{r} = r / \gamma_2 \qquad (12)$$

Врахувавши асимптотику (9), (10) полів $u_0^s(\mathbf{x})$ і $u_1^s(\mathbf{x})$ при $r \to 0$ та використавши принцип зрощування [5], знаходимо, що внутрішній асимптотичний розв'язок задачі треба шукати у вигляді

$$u^s(\mathbf{x}) = \omega_0(\overline{r},\phi) + \gamma_{11}\omega_1(\overline{r},\phi) + \gamma_{12}\omega_2(\overline{r},\phi) + o(\gamma_{12}), \ \overline{r} = \text{const}, \ \gamma_1 \to 0,$$

$$(\overline{r},\phi) \in R^2, \quad \gamma_{1i} = \gamma_1^{\kappa_i}, \ \kappa_i = \nu_{1i}/(\delta - 1), \ i = 1,2. \qquad (13)$$

У цьому випадку члени розкладу (13) задовольняють умови

$$\omega_0(\overline{r},\phi) \equiv -a_0^*, \qquad \omega_1(\overline{r},\phi) = a_1^0\, \overline{r}^{\nu_1} (\cos\nu_1\phi + \sin\nu_1\phi) + o(1),$$

$$\omega_2(\overline{r},\phi) = b_1^0\, \overline{r}^{\nu_2} (\cos\nu_2\phi - \sin\nu_2\phi) + o(1), \ \overline{r} \to \infty \qquad (14)$$

Підставляючи розклад (13) у рівняння (1) та умови спряження (4) (попередньо записавши їх у змінних $\overline{r},\phi$) та зрівнявши значення при однакових степенях γ_1, знайдемо

$$\Delta\omega_i(\overline{r},\phi)=0,\quad (\overline{r},\phi)\in R^2,\quad i=1,2,$$

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\phi}=0,\quad \phi=\pi,\quad \overline{r}>0;\quad \omega_i=0,\quad \phi=-\pi,\quad \overline{r}>0. \tag{15}$$

Як бачимо, функції примежового шару ω_i $(i=1,2)$ визначають як розв'язки рівняння Лапласа (15), що задовольняють на безмежності умови (14). Розв'язок таких задач існує та єдиний в енергетичних класах функцій [5]. Функції ω_i $(i=1,2)$ при $\overline{r}\to 0$ мають асимптотику $\omega_i(\overline{r},\phi)=c_i^0+c_i^1\sqrt{\overline{r}}\times\times\cos(\phi/2)+O(\overline{r})$, $\overline{r}\to 0$, тобто у зображенні (5) коефіцієнти a_i $(i=0,1)$ визначені такими співвідношеннями

$$a_0\approx -a_0^*,\ a_1\approx\gamma_1^{\nu_{21}}c_1^1+\gamma_1^{\nu_{22}}c_2^1,\ \nu_{2i}=(2\nu_1-2\delta+1)/[2(\delta-1)],\ i=1,2.$$

Отже, маючи розв'язок задачі (1), (4) при $\gamma_1=0$ та розв'язок задачі (14), (15) (з урахуванням, що в (14) $a_1^0=b_1, b_1^0=b_2$) можна знайти напружено-деформований стан композита, коли $\gamma_1\neq 0$, $\gamma_1\ll 0$. Інші числово-аналітичні алгоритми дослідження задачі (1), (4) при $\gamma_1\neq 0$, $\gamma_1\ll 0$, як звичайно, нестійкі внаслідок наявності швидкозмінного примежового шару в околі кінців включення.

1. *Грилицький Д. В., Піддубняк О. П.* Мішана задача кручення пружного тіла з щілиною // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 85–90.
2. *Кіт Г. С., Ємець В. Ф., Кунець Я. І.* Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41, № 1. – С. 54–61.
3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
4. *Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Напряженно-деформированное состояние в вершине острого включения // Механика твердого тела. – 1986. – № 3. – С. 155–163.
5. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. – Л., 1983. – 117 с.
6. *Назаров С. А.* Асимптотика на бесконечности решения задачи Неймана с условиями сопряжения в угле // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 1. – С. 18–25.
7. *Emets V. F., Kunets Ya. I.* Effective boundary conditions for a thin curved layer with tips // DIPED-98. Proceedings of IV International Seminar. – Lviv, 1999. – P. 152–157.

THE STRESSED-STRAINED STATE NEAR A SHARP TIP OF RIGID REINFORCED SOFT INCLUSION

Vasyl Porochovs'ky*, Yaroslav Kunets*, Victor Mishchenko*, Iryna Zhelavs'ka**

* *Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics*
National Academy of Sciences of Ukraine
** *Khmelnytskiy polytechnical college*

The phenomenon of sudden charge in the behaviour of stressed-strained state in the vicinity of a rigid reinforced soft inclusion, when its shear modulus tends to zero, is explained. To validate this phenomenon (the construction of corresponding boundary layers) the method of joining the asymptotic expansion is used.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.2000