ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 146–153 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 146–153*

УДК 539.3

ФУНКЦІЇ ПЕРЕМІЩЕНЬ ГРІНА ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПІВПРОСТОРУ

Борис Процюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного простору, що складається з двох ідеально контактуючих півпросторів, побудовані в [5, 2].

Ми побудуємо функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору.

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z пружне кусково-однорідне тіло, складові частини якого – півпростір $(z \le 0)$ і шар $(0 \le z \le h)$, жорстко з'єднані між собою. До тіла прикладена в напрямі, паралельному до осі r або z, одинична сила, яка зосереджена на колі радіусом ρ, що розміщене на відстані ς від межі поділу. Зовнішня поверхня шару вільна від навантажень. Для визначення переміщень $G_r^{(k)}$ і $G_z^{(k)}$, де індекс «k» вказує напрям дії сили, використовуємо систему рівнянь

$$\mu(z)\left[\nabla^2 + (\delta_{zi} - 1) r^{-2}\right] G_i^{(k)} + [\lambda(z) + \mu(z)]\varepsilon_{,i}^{(k)} + \delta_{ik}\rho^{-1}\delta(r-\rho)\delta(z-\varsigma) +$$

$$+\left[(\mu_2 - \mu_1)\left(G_{i,z}^{(k)} + G_{z,i}^{(k)}\right) + \delta_{zi}(\lambda_2 - \lambda_1)\varepsilon^{(k)}\right]_{|z=-0} \delta(z) = 0,\ i,k = r,z, \qquad (1)$$

з граничними умовами

$$G_r^{(k)}, G_{r,r}^{(k)}, G_z^{(k)}, G_{z,r}^{(k)} \ne \infty \text{ при } r = 0; \quad G_r^{(k)}, G_{r,r}^{(k)}, G_z^{(k)}, G_{z,r}^{(k)} \to 0 \text{ при } r \to \infty;$$

$$G_r^{(k)}, G_z^{(k)} \to 0 \text{ при } z \to -\infty;\ \tau_{rz}^{(k)} = \tau_{zz}^{(k)} = 0 \text{ при } z = h. \qquad (2)$$

Тут і далі фізико-механічні характеристики та їхні комбінації мають вигляд $p(z) = p_1 + (p_2 - p_1) S(z)$; λ_j, μ_j – коефіцієнти Ляме півпростору $(j = 1)$ та шару $(j = 2)$; $S(x)$ – функція Гевісайда; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; δ_{ik} - символ Кронекера;

$$\nabla^2 = \partial_{,rr} + r^{-1}\partial_{,r} + \partial_{,zz},\ \varepsilon^{(k)} = G_{r,r}^{(k)} + r^{-1}G_r^{(k)} + G_{z,z}^{(k)}.$$

Рівняння (1) отримані шляхом підстановки $\tau_{ij}^{(k)} = \mu(z)\left(G_{i,j}^{(k)} + G_{j,i}^{(k)}\right) + \lambda(z)\varepsilon^{(k)}\delta_{ij}$, $i,j = r,z$; $\tau_{\varphi\varphi}^{(k)} = 2\mu(z) r^{-1} G_r^{(k)} + \lambda(z)\varepsilon^{(k)}$ в рівняння рівноваги в напруженнях і використання правила Лейбніца диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій

$$[\varphi(x)\psi(x)]' = \varphi(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi(x) \qquad (3)$$

та операції некомутативного, однак асоціативного множення

$$\varphi(x)\,\delta(x-a)=\varphi(a+0)\,\delta(x-a),\ \ \delta(x-a)\,\varphi(x)=\varphi(a-0)\,\delta(x-a). \quad (4)$$

Застосуємо до задачі (1), (2) інтегральне перетворення Ханкеля. З урахуванням (4) відповідно одержимо

$$\frac{d^2\overline{G}_r^{(k)}}{dz^2}-\frac{2(1-v(z))}{1-2v(z)}\xi^2\overline{G}_r^{(k)}-\frac{\xi}{1-2v(z)}\frac{d\overline{G}_z^{(k)}}{dz}+\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{d\overline{G}_r^{(k)}}{dz}-\xi\overline{G}_z^{(k)}\right)\Big|_{z=-0}\delta(z)=$$

$$=-\frac{X_{kr}}{\mu(\varsigma)}\delta(z-\varsigma),$$

$$\frac{d^2\overline{G}_z^{(k)}}{dz^2}-\frac{1-2v(z)}{2(1-v(z))}\xi^2\overline{G}_z^{(k)}+\frac{\xi}{2(1-v(z))}\frac{d\overline{G}_r^{(k)}}{dz}+\frac{1-2v_2}{2\mu_2(1-v_2)}\Big[2(\mu_2-\mu_1)\frac{d\overline{G}_z^{(k)}}{dz}+$$

$$+(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\varepsilon}^{(k)}\Big]\Big|_{z=-0}\delta(z)=\frac{1-2v(z)}{2\mu(z)(1-v(z))}X_{kz}\delta(z-\varsigma), \quad (5)$$

$$\overline{G}_r^{(k)},\overline{G}_z^{(k)}\to 0 \ \text{при}\ z\to-\infty,\ \overline{\tau}_{rz}^{(k)}=\overline{\tau}_{zz}^{(k)}=0\ \text{при}\ z=h, \quad (6)$$

де $\overline{G}_r^{(k)}=\int\limits_0^\infty rG_r^{(k)}J_1(\xi r)\,dr$, $\overline{G}_z^{(k)}=\int\limits_0^\infty rG_z^{(k)}J_0(\xi r)\,dr$;

$$X_{kr}=\delta_{kr}J_1(\xi\rho),\quad X_{kz}=\delta_{kz}J_0(\xi\rho);\ \ \overline{\varepsilon}^{(k)}=\frac{d\overline{G}_z^{(k)}}{dz}+\xi\overline{G}_r^{(k)},$$

$$\overline{\tau}_{rz}^{(k)}=\mu(z)\left(\frac{d\overline{G}_r^{(k)}}{dz}-\xi\overline{G}_z^{(k)}\right),\ \ \overline{\tau}_{zz}^{(k)}=\frac{2\mu(z)}{1-2v(z)}\left[(1-v(z))\frac{d\overline{G}_z^{(k)}}{dz}+\xi v(z)\,\overline{G}_r^{(k)}\right].$$

Розв'язання системи рівнянь (5) з використанням правил (3), (4) зводимо до інтегрування рівняння четвертого порядку

$$l\left(G_r^{(k)}\right)\equiv\overline{G}_r^{(k)IV}-2\xi^2\overline{G}_r^{(k)''}+\xi^4\overline{G}_r^{(k)}-A_0^{(k)}\delta(z)-\xi A_1^{(k)}\delta'(z)+A_2^{(k)}\delta''(z)=$$

$$=X_{kr}\left[\frac{1-2v(\varsigma)}{2\mu(\varsigma)(1-v(\varsigma))}\xi^2\delta(z-\varsigma)-\frac{1}{\mu(\varsigma)}\delta''(z-\varsigma)\right]-\frac{\xi X_{kz}}{2\mu(\varsigma)(1-\nu(\varsigma))}\delta'(z-\varsigma) \quad (7)$$

та визначення $\overline{G}_z^{(k)}$ і $\overline{G}_z^{(k)'}$ за формулами

$$\overline{G}_z^{(k)}=\frac{2(1-v(z))}{\xi^3}\Big[\overline{G}_r^{(k)'''}+\frac{2v(z)-3}{2(1-v(z))}\xi^2\overline{G}_r^{(k)'}-\xi A_1^{(k)}\delta(z)+A_2^{(k)}\delta'(z)+$$

$$+\frac{\xi X_{kz}}{2\mu(\varsigma)(1-v(\varsigma))}\delta(z-\varsigma)+\frac{X_{kr}}{\mu(\varsigma)}\delta'(z-\varsigma)\Big],$$

$$\overline{G}_z^{(k)'}=\frac{1-2v(z)}{\xi}\overline{G}_r^{(k)''}-2(1-v(z))\xi\overline{G}_r^{(k)}+\frac{k_{12}}{\xi}A_2^{(k)}\delta(z)+X_{kr}\frac{1-2v(\varsigma)}{\xi\mu(\varsigma)}\delta(z-\varsigma), \quad (8)$$

де $$A_0^{(k)}=\frac{v_2-v_1}{k_{01}k_{02}}\xi^3\overline{G}_z^{(k)}(-0)+\left(\frac{k_{11}}{k_{01}}-\frac{k_{12}}{k_{02}}m\right)\frac{\xi^2\overline{\tau}_{rz}^{(k)}(-0)}{2\mu_1},$$

$$A_1^{(k)} = \left(\frac{m}{k_{02}} - k_{01}^{-1}\right)\frac{\overline{\tau}_{zz}^{(k)}(-0)}{2\mu_1} + \frac{v_2 - v_1}{k_{01}k_{02}}\xi\overline{G}_r^{(k)}(-0)\,,\ A_2^{(k)} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}\frac{\overline{\tau}_{rz}^{(k)}(-0)}{\mu_1}\,,$$

$$k_{0i} = 1 - v_i\,,\ k_{1i} = 1 - 2v_i\,,\ i = 1,2\,;\ m = \mu_1/\mu_2\,.$$

Розв'язок рівняння (7), який задовольняє видозміненим з використанням (8) граничним умовам (6), відшукуємо за допомогою функції Гріна диференціального оператора, породженого диференціальним виразом $l(\Gamma)$ і граничними умовами

$$\Gamma\big|_{z\to-\infty} \to 0\,,\ k_{02}\xi^{-2}\Gamma''' + (v_2 - 2)\Gamma' = k_{02}\xi^{-1}\Gamma'' + (v_2 - 2)\Gamma = 0 \ \text{при}\ z = h\,. \qquad (9)$$

Для побудови функції Гріна використовуємо фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $l(\Gamma) = 0$ і метод варіації сталої. Фундаментальну систему розв'язків будуємо згідно з [1, 3].

Узявши до уваги симетричність функцій переміщень Гріна, для їхніх трансформант після низки перетворень одержимо

$$\overline{G}_{ij}^{(kl)}(z,\varsigma) = X_{kk}\overline{\overline{G}}_{ij}^{(kl)}(z,\varsigma)\,,\quad i,k = r,z\,;\quad l,j = 1,2\,,$$

$$\overline{\overline{G}}_{i1}^{(i1)}(z,\varsigma) = M_{01}\xi^{-1}\left(k_{41}q_{11}^{+} - \delta_i\xi y q_{11}^{-}\right) + M_{11}\left(P_1^{*}\xi\right)^{-1}\Big\{\left(\gamma_{11}z\varsigma\xi^2 + \delta_i\gamma_{12}x\xi - d_{11}\right)q_{12} +$$

$$+4\left(2m_0^2h^2z\varsigma\xi^4 + \delta_i\gamma_{13}h^2x\xi^3 + \varphi_{11}\xi^2 + \delta_i\varphi_{12}\xi + d_{15}\right)\exp\left[-\xi\left(2h - x\right)\right]\Big\},$$

$$\overline{\overline{G}}_{i2}^{(i2)}(z,\varsigma) = M_{02}k_{42}\xi^{-1}q_{11}^{+} + M_{31}\left(P_1^{*}\xi\right)^{-1}\Big\{\delta_i\xi y\left(d_0q_{11}^{-} + d_{31}q_{31}^{-}\right) - 2d_{31}k_{42}\,e^{-4\xi h} \times$$

$$\times\operatorname{ch}\xi y + 2m_1^{-1}\Big[\left(\delta_i\varphi_{31}\xi^3 + k_{42}m_0h^2\xi^2 + \delta_i\left(\varphi_{32} - k_{42}^2m_0h\right)\xi - d_{33}\right)\operatorname{ch}\xi y -$$

$$-k_{42}m_0hy\xi^2\operatorname{sh}\xi y\Big]\exp(-2\xi h) + (2m_1)^{-1}\left(2m_0z\varsigma q_{32}^{-}\xi^2 - \delta_ik_{42}m_0xq_{32}^{+}\xi +\right.$$

$$\left.+d_{34}q_{32}^{-}\right) - 2(\varsigma - h)(z - h)q_{33}^{+}\xi^2 - \delta_ik_{42}(x - 2h)q_{33}^{-}\xi - v_2^{*}q_{33}^{+}\Big\}\,,$$

$$i = r,z\,,\ \delta_r = 1\,,\ \delta_z = -1\,,$$

$$\overline{\overline{G}}_{z1}^{(r1)}(z,\varsigma) = M_{01}yq_{11}^{+} + M_{11}\left(P_1^{*}\xi\right)^{-1}\Big\{\left(-\gamma_{11}z\varsigma\xi^2 + \gamma_{12}y\xi - \gamma_{15}\right)q_{12} +$$

$$+4\left(\gamma_{13}h^2y\xi^3 + \varphi_{13}\xi^2 + \gamma_{14}y\xi + \gamma_{16}\right)\exp[-\xi(2h - x)]\Big\},$$

$$\overline{\overline{G}}_{r1}^{(r2)}(z,\varsigma) = \overline{\overline{G}}_1^{*}(z,\varsigma)\Big|_{c=-1},\quad \overline{\overline{G}}_{z2}^{(z1)}(z,\varsigma) = \overline{\overline{G}}_1^{*}(\varsigma,z)\Big|_{c=1},$$

$$\overline{\overline{G}}_1^{*}(z,\varsigma) = M_{21}\left(P_1^{*}\xi\right)^{-1}\Big\{(c\varphi_{21}\xi + d_{21})\exp(-\xi y) + \left(\varphi_{22}\xi^2 + c\varphi_{23}\xi + d_{23}\right)\times$$

$$\times\exp[-\xi(2h - x)] + \left(c\varphi_{24}\xi^3 - \varphi_{25}{}^{+}\xi^2 + c\varphi_{26}\xi - d_{25}\right)\exp[-\xi(2h + y)] +$$

$$+\left(-2m_0z\varsigma\xi^2 + c\varphi_{27}{}^{+}\xi - d_{22}\right)\exp[-\xi(4h - x)]\Big\},$$

$$\bar{\bar{G}}_{z1}^{(r2)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_2^{*}(z,\varsigma)\Big|_{c=1}, \qquad \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r1)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_2^{*}(\varsigma,z)\Big|_{c=-1},$$

$$G_2^{*}(z,\varsigma) = M_{21}\left(P_1^{*}\xi\right)^{-1}\Big\{(c\varphi_{21}\xi - d_{16})\exp(-\xi y) + \left(-\varphi_{22}\xi^2 + c\varphi_{29}\xi + d_{26}\right)\times$$
$$\times\exp[-\xi(2h-x)] + \left(c\varphi_{24}\xi^3 - \varphi_{25}^{-}\xi^2 - c\varphi_{28}\xi - d_{27}\right)\times\exp[-\xi(2h+y)] +$$
$$+\left(2m_0 z\varsigma\xi^2 - c\varphi_{27}^{-}\xi - d_{16}\right)\exp[-\xi(4h-x)]\Big\},$$

$$\bar{\bar{G}}_{z2}^{(r2)}(z,\varsigma) = M_{31}\left(P_1^{*}\xi\right)^{-1}\Big\{-\xi y\left(d_0 q_{11}^{+} + d_{31}q_{31}^{+}\right) + 2m_1^{-1}\exp(-2\xi h)\times$$
$$\times\Big[\left(\varphi_{31}\xi^3 + \varphi_{32}\xi\right)\operatorname{sh}\xi y + k_{42}\left(m_0 h(x-h)\xi^2 + d_{35}\right)\operatorname{ch}\xi y\Big] + (2m_1)^{-1}\times$$
$$\times\left(2m_0 z\varsigma q_{32}^{+}\xi^2 + k_{42}m_0 y q_{32}^{-}\xi - d_{32}q_{32}^{+}\right) + 2(\varsigma-h)(z-h)\,q_{33}^{-}\xi^2 - k_{42}yq_{33}^{+}\xi - d_{36}q_{33}^{-}\Big\},$$

$$\bar{\bar{G}}_{r1}^{(z1)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_{z1}^{(r1)}(\varsigma,z), \quad \bar{\bar{G}}_{r2}^{(z2)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r2)}(\varsigma,z), \quad \bar{\bar{G}}_{r2}^{(z1)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_{z1}^{(r2)}(\varsigma,z),$$

$$\bar{\bar{G}}_{r1}^{(z2)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r1)}(\varsigma,z), \quad \bar{\bar{G}}_{z1}^{(z2)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_{z2}^{(z1)}(\varsigma,z), \quad \bar{\bar{G}}_{r2}^{(r1)}(z,\varsigma) = \bar{\bar{G}}_{r1}^{(r2)}(\varsigma,z). \qquad (10)$$

Тут другі нижні і верхні індекси біля трансформант функцій переміщень означають, у якій області є відповідно точки спостереження і прикладання зосередженої сили;

$$P_1^{*} = \left(16k_{02}^2\right)^{-1}\left[-d_0 + d_{31}\exp(-4\xi h) - m_1^{-1}\left(2m_0h^2\xi^2 + m_0v_2^{*} - d_{32}\right)\exp(-2\xi h)\right],$$

$$q_{11}^{\pm} = \exp(-\xi y)S(y) \pm \exp(\xi y)S(-y), \quad q_{12} = \exp(\xi x) + \exp[-\xi(4h-x)],$$

$$q_{31}^{\pm} = \exp[-\xi(4h+y)]S(-y) \pm \exp[-\xi(4h-y)]S(y), \quad y = \varsigma - z, \quad x = z + \varsigma,$$

$$q_{32}^{\pm} = \exp(-\xi x) \pm \exp[-\xi(4h-x)],$$

$$q_{33}^{\pm} = d_0\exp[-\xi(2h-x)] \pm d_{31}\exp[-\xi(2h+x)],$$

$$\varphi_{11} = d_{12}h^2 + d_{13}z\varsigma - d_{14}hx, \qquad \varphi_{12} = \gamma_{14}x - k_{41}d_{14}h,$$

$$\varphi_{13} = -4mk_{01}d_{17}h^2 - d_{13}z\varsigma + d_{14}hx, \quad 2\varphi_{21} = zm_2^{-1} + \varsigma m_1^{-1}, \quad \varphi_{22} = \left(zm_2^{-1} + hm_1^{-1}\right)(h-\varsigma),$$

$$\varphi_{23} = (2m_2)^{-1}(k_{42}z + k_{41}\varsigma) + 2d_{21}h, \qquad \varphi_{24} = 4m_0hz(h-\varsigma),$$

$$\varphi_{25}^{\pm} = 2m_0h[k_{41}(h-\varsigma) \pm k_{42}z], \qquad \varphi_{26} = m_0z + 2d_{22}h - d_{24}\varsigma,$$

$$\varphi_{27}^{\pm} = m_0(k_{41}\varsigma \pm k_{42}z), \qquad \varphi_{28} = 2d_{16}h - m_0z + d_{24}\varsigma,$$

$$\varphi_{29} = 2d_{16}h - (2m_2)^{-1}(k_{41}\varsigma - k_{42}z), \qquad \varphi_{31} = 2m_0h(z\varsigma - h\varphi_0),$$

$$\varphi_{32} = d_{32}(h - x + \varphi_0) + \tfrac{1}{2}k_{42}^2m_0x - m_0v_2^{*}\varphi_0, \quad \varphi_0 = zS(y) + \varsigma S(-y);$$

$$m_2\gamma_{11} = m_0, \quad 2\gamma_{12} = k_{41}\gamma_{11}, \quad \gamma_{13} = k_{41}m_0^2, \quad 2\gamma_{14} = k_{41}d_{13},$$

$$\gamma_{15} = 4k_{01}md_{16}, \ \gamma_{16} = mk_{01}d_{18}, \quad d_0 = (4m_1m_2)^{-1},$$

$$d_{11} = -4d_{21}mk_{01} - d_0k_{41}, \ d_{12} = k_{51} + k_{41}m_0(2m_1)^{-1}, \ d_{13} = k_{52} - m_0(2m_2)^{-1},$$

$$d_{14} = 8mk_{01}k_{02}, \ d_{15} = k_{52}v_1^* + d_{11}, \ d_{16} = k_{41}k_{12} - mk_{42}k_{11},$$

$$d_{17} = k_{41} - mk_{11}, d_{18} = 2mk_{11}v_2^* + 2k_{41}k_{12}, \ d_{21} = d_0(k_{42}m_2 - k_{41}m_1),$$

$$d_{22} = 2(k_{41}k_{02} - mk_{42}k_{01}), \ d_{23} = v_2^*(2m_1)^{-1} - k_{42}d_{16}, \ d_{24} = k_{41} - mk_{42},$$

$$d_{25} = m_0k_{41}v_2^* - k_{42}d_{16}, d_{26} = k_{42}d_{21} - v_2^*(2m_1)^{-1}, \ d_{27} = m(v_2^* - 2k_{01}) - k_{41}k_{12},$$

$$d_{31} = m_0d_{24}, \ d_{32} = 8m_1d_{16}k_{02}, \ 2d_{33} = k_{42}\left(d_{32} - v_2^*m_0\right), \ d_{34} = k_{42}^2m_0 - d_{32},$$

$$2d_{35} = d_{34} - m_0v_2^*, \ d_{36} = v_2^* - 1, \ 2m_1 = (m + k_{41})^{-1},$$

$$2m_2 = -(1 + mk_{42})^{-1}, \quad m_0 = 1 - m,$$

$$k_{4i} = 3 - 4v_i, \ k_{5i} = 8m^2k_{0i}^2, \ v_i^* = 8v_i^2 - 12v_i + 5, \ M_{0i} = (8\mu_ik_{0i})^{-1}, \ i = 1,2,$$

$$M_{11} = \left(128k_{01}k_{02}^2\mu_1\right)^{-1}, \ M_{21} = \left(32k_{02}^2\mu_2\right)^{-1}, \ M_{31} = \left(128k_{02}^3\mu_2\right)^{-1}.$$

У разі переходу в (10) до оригіналів дріб $\left(P_1^*\right)^{-1}$, припустивши, що $\mu_1 > \mu_2$, розглядаємо як суму нескінченної геометричної прогресії

$$\left(P_1^*\right)^{-1} = m^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} k_{00}^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} b_{nksl}h^{2l}\xi^{2l}\exp\left[-2\xi h(2s+k)\right], \tag{11}$$

де $$b_{nksl} = C_n^kC_{n-k}^sC_k^l\left(d_0 + k_{00}^2\right)^{n-k-s}(-d_{31})^s m_1^{-k}(2m_0)^l\left(m_0v_2^* - d_{32}\right)^{k-l},$$

$$k_{00} = 4k_{02}m, \ C_q^p = \frac{p!}{(p-q)!\,q!}$$ – біноміальні коефіцієнти.

Виділяючи доданки, які мають особливості, для функцій переміщень Гріна отримуємо такі співвідношення:

$$G_{i1}^{(i1)}(r,\rho,z,\varsigma) = M_{01}\left[k_{41}A_{ii}^0(y) - \delta_i yA_{ii}^1(y) - d_0^{-1}B_{ii}^{(1,0)}(-x)\right] +$$
$$+M_{11}m^{-2}\left\{\sum{}^{(1)}a_{nksl}h^{2l}B_{ii}^{(1,2l)}\left(p_1^-\right) + \sum{}^{(0)}b_{nksl}h^{2l}\left[B_{ii}^{(1,2l)}\left(p_2^-\right) +\right.\right.$$
$$\left.\left.+4\left(2m_0^2h^2z\varsigma A_{ii}^{4+2l} + \delta_i\gamma_{13}h^2xA_{ii}^{3+2l} + \varphi_{11}A_{ii}^{2+2l} + \delta_i\varphi_{12}A_{ii}^{1+2l} + d_{15}A_{ii}^{2l}\right)\Big|_{p=p_3^-}\right]\right\},$$
$$i = r, z,$$

$$G_{z1}^{(r1)}(r,\rho,z,\varsigma)=M_{01}\left[yA_{01}^{1}(y)-d_0^{-1}B_{01}^{(2,0)}(-x)\right]+M_{11}m^{-2}\left\{\sum{}^{(1)}a_{nksl}h^{2l}B_{01}^{(2,2l)}(p_1^-)+\right.$$

$$\left.+\sum{}^{(0)}b_{nksl}h^{2l}\left[B_{01}^{(2,2l)}\left(p_2^-\right)+4\left(\gamma_{13}h^2yA_{01}^{3+2l}+\varphi_{13}A_{01}^{2+2l}+\gamma_{14}yA_{01}^{1+2l}+\gamma_{16}A_{01}^{2l}\right)\Big|_{p=p_3^-}\right]\right\},$$

$$G_{r1}^{(r2)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_1^*(r,\rho,z,\varsigma)\Big|_{c=-1},\ G_{z2}^{(z1)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_1^*(r,\rho,\varsigma,z)\Big|_{c=1},$$

$$G_1^*(r,\rho,z,\varsigma)=-\left(2\mu_2d_0\right)^{-1}\left[\mathrm{c}\varphi_{21}H^1(\mathrm{c})+d_{21}H^0(\mathrm{c})\right]_{|p=y}+$$

$$+M_{21}m^{-2}\left\{\sum{}^{(1)}a_{nksl}h^{2l}\left(\mathrm{c}\varphi_{21}H^{1+2l}(\mathrm{c})+d_{21}H^{2l}(\mathrm{c})\right)\Big|_{p=p_4^+}+\right.$$

$$+\sum{}^{(0)}b_{nksl}h^{2l}\left[\left(\varphi_{22}H^{2+2l}(\mathrm{c})+\mathrm{c}\varphi_{23}H^{1+2l}(\mathrm{c})+d_{23}H^{2l}(\mathrm{c})\right)\Big|_{p=p_3^-}+\right.$$

$$+\left(\mathrm{c}\varphi_{24}H^{3+2l}(\mathrm{c})-\varphi_{25}^+H^{2+2l}(\mathrm{c})+\mathrm{c}\varphi_{26}H^{1+2l}(\mathrm{c})-d_{25}H^{2l}(\mathrm{c})\right)\Big|_{p=p_5^+}+$$

$$\left.\left.+\left(-2m_0z\varsigma H^{2+2l}(\mathrm{c})+\mathrm{c}\varphi_{27}^+H^{1+2l}(\mathrm{c})-d_{22}H^{2l}(\mathrm{c})\right)\Big|_{p=p_2^-}\right]\right\},$$

$$G_{z1}^{(r2)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_2^*(r,\rho,z,\varsigma)\Big|_{c=1},\ G_{z2}^{(r1)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_2^*(r,\rho,\varsigma,z)\Big|_{c=-1},$$

$$G_2^*(r,\rho,z,\varsigma)=-\left(2\mu_2d_0\right)^{-1}\left(\mathrm{c}\varphi_{21}A_{01}^1-d_{16}A_{01}^0\right)\Big|_{p=y}+$$

$$+M_{21}m^{-2}\left\{\sum{}^{(1)}a_{nksl}h^{2l}\left(\mathrm{c}\varphi_{21}A_{01}^{1+2l}-d_{16}A_{01}^{2l}\right)\Big|_{p=p_4^+}+\right.$$

$$+\sum{}^{(0)}b_{nksl}h^{2l}\left[\left(-\varphi_{22}A_{01}^{2+2l}+\mathrm{c}\varphi_{29}A_{01}^{1+2l}+d_{26}A_{01}^{2l}\right)\Big|_{p=p_3^-}+\right.$$

$$+\left(\mathrm{c}\varphi_{24}A_{01}^{3+2l}-\varphi_{25}^-A_{01}^{2+2l}-\mathrm{c}\varphi_{28}A_{01}^{1+2l}-d_{27}A_{01}^{2l}\right)\Big|_{p=p_5^+}+$$

$$\left.\left.+\left(2m_0z\varsigma A_{01}^{2+2l}-\mathrm{c}\varphi_{27}^-A_{01}^{1+2l}-d_{16}A_{01}^{2l}\right)\Big|_{p=p_2^-}\right]\right\},$$

$$G_{i2}^{(i2)}(r,\rho,z,\varsigma)=M_{02}\left[k_{42}A_{ii}^0(y)-\delta_iyA_{ii}^1(y)-2m_2B_{ii}^{(3,0)}(x)+B_{ii}^{(4,0)}(2h-x)\right]+$$

$$+M_{31}m^{-2}\left(\sum{}^{(1)}a_{nksl}h^{2l}\left\{\delta_iyd_0\left[A_{ii}^{1+2l}\left(p_4^+\right)S(y)-A_{ii}^{1+2l}\left(p_4^-\right)S(-y)\right]+\right.\right.$$

$$\left.+(2m_1)^{-1}B_{ii}^{(3,2l)}\left(p_1^+\right)-d_0B_{ii}^{(4,2l)}\left(p_3^-\right)\right\}+$$

$$+\sum{}^{(0)}b_{nksl}h^{2l}\left\{\delta_iyd_{31}\left[A_{ii}^{1+2l}\left(p_6^+\right)S(-y)-A_{ii}^{1+2l}\left(p_6^-\right)S(y)\right]-\right.$$

$$-k_{42}d_{31}\left[A_{ii}^{2l}\left(p_6^+\right)+A_{ii}^{2l}\left(p_6^-\right)\right]+m_1^{-1}\left[\delta_i\varphi_{31}A_{ii}^{3+2l}-k_{42}m_0h(y-h)A_{ii}^{2+2l}+\right.$$

$$+\delta_i\left(\varphi_{32}-k_{42}^2 m_0 h\right)A_{ii}^{1+2l}-d_{33}A_{ii}^{2l}\Big]\Big|_{p=p_5^-}+m_1^{-1}\Big[\delta_i\varphi_{31}A_{ii}^{3+2l}+$$

$$+k_{42}m_0h(y+h)A_{ii}^{2+2l}+\delta_i\left(\varphi_{32}-k_{42}^2 m_0 h\right)A_{ii}^{1+2l}-d_{33}A_{ii}^{2l}\Big]\Big|_{p=p_5^+}-$$

$$-(2m_1)^{-1}\left(2m_0 z\varsigma A_{ii}^{2+2l}+\delta_i k_{42}m_0 x A_{ii}^{1+2l}+d_{34}A_{ii}^{2l}\right)\Big|_{p=p_2^-}-$$

$$-d_{31}\left[2(\varsigma-h)(z-h)A_{ii}^{2+2l}-\delta_i k_{42}(x-2h)A_{ii}^{1+2l}+v_2^* A_{ii}^{2l}\right]\Big|_{p=p_3^+}\Big\}\Big),\quad i=r,z,$$

$$G_{z2}^{(r2)}(r,\rho,z,\varsigma)=M_{02}\left[yA_{01}^{1}(y)-2m_2B_{01}^{(5,0)}(x)-B_{ii}^{(6,0)}(2h-x)\right]-$$

$$-M_{31}m^{-2}\Big(\sum{}^{(1)}a_{nksl}h^{2l}\Big\{yd_0\left[A_{01}^{1+2l}\left(p_4^+\right)S(y)+A_{01}^{1+2l}\left(p_4^-\right)S(-y)\right]-$$

$$-(2m_1)^{-1}B_{01}^{(5,2l)}\left(p_1^+\right)-d_0B_{01}^{(6,2l)}\left(p_3^-\right)\Big\}+$$

$$+\sum{}^{(0)}b_{nksl}h^{2l}\Big\{yd_{31}\left[A_{01}^{1+2l}\left(p_6^+\right)S(-y)+A_{01}^{1+2l}\left(p_6^-\right)S(y)\right]-$$

$$-m_1^{-1}\left[\varphi_{31}A_{01}^{3+2l}+k_{42}m_0h(x-h)A_{01}^{2+2l}+\varphi_{32}A_{01}^{1+2l}+k_{42}d_{35}A_{01}^{2l}\right]\Big|_{p=p_5^-}+$$

$$+m_1^{-1}\left[\varphi_{31}A_{01}^{3+2l}-k_{42}m_0h(x-h)A_{01}^{2+2l}+\varphi_{32}A_{01}^{1+2l}-k_{42}d_{35}A_{01}^{2l}\right]\Big|_{p=p_5^+}-$$

$$-2m_1^{-1}\left(2m_0z\varsigma A_{01}^{2+2l}-k_{42}m_0yA_{01}^{1+2l}-d_{32}A_{01}^{2l}\right)\Big|_{p=p_2^-}+$$

$$+d_{31}\left[2(\varsigma-h)(z-h)A_{01}^{2+2l}+k_{42}yA_{01}^{1+2l}-d_{36}A_{01}^{2l}\right]\Big|_{p=p_3^+}\Big\}\Big),$$

$$G_{r1}^{(z1)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_{z1}^{(r1)}(\rho,r,\varsigma,z),\qquad G_{r2}^{(z2)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_{z2}^{(r2)}(\rho,r,\varsigma,z),$$

$$G_{r2}^{(z1)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_{z1}^{(r2)}(\rho,r,\varsigma,z),\qquad G_{r1}^{(z2)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_{z2}^{(r1)}(\rho,r,\varsigma,z),$$

$$G_{z1}^{(z2)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_{z2}^{(z1)}(r,\rho,\varsigma,z),\qquad G_{r2}^{(r1)}(r,\rho,z,\varsigma)=G_{r1}^{(r2)}(\rho,r,\varsigma,z).\tag{12}$$

Тут уведені такі позначення:

$$\sum{}^{(j)}=\sum_{n=j}^{\infty}k_{00}^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\;,\; a_{n000}=0,\; a_{nksl}=b_{nksl}\text{ при } k+s+l\neq 0,$$

$$B_{ii}^{(1,\alpha)}(p)=\gamma_{11}z\varsigma A_{ii}^{2+\alpha}(p)+\delta_i\gamma_{12}xA_{ii}^{1+\alpha}(p)-d_{11}A_{ii}^{\alpha}(p),$$

$$B_{ii}^{(3,\alpha)}(p)=2m_0z\varsigma A_{ii}^{2+\alpha}(p)-\delta_i k_{42}m_0xA_{ii}^{1+\alpha}(p)+d_{34}A_{ii}^{\alpha}(p),$$

$$B_{ii}^{(4,\alpha)}(p)=2(\varsigma-h)(z-h)A_{ii}^{2+\alpha}(p)+\delta_i k_{42}(x-2h)A_{ii}^{1+\alpha}(p)+v_2^*A_{ii}^{\alpha}(p),\; i=r,z,$$

$$A_{rr}^{\alpha}(p)=A_{11}^{\alpha}(p),\; A_{zz}^{\alpha}(p)=A_{00}^{\alpha}(p),\; H^{\alpha}(-1)=A_{11}^{\alpha},\; H^{\alpha}(1)=A_{00}^{\alpha},$$

$$B_{01}^{(2,\alpha)}(p)=-\gamma_{11}z\varsigma A_{01}^{2+\alpha}(p)+\gamma_{12}yA_{01}^{1+\alpha}(p)-\gamma_{15}A_{01}^{\alpha}(p),$$

$$B_{01}^{(5,\alpha)}(p) = 2m_0 z\varsigma A_{01}^{2+\alpha}(p) + k_{42} m_0 y A_{01}^{1+\alpha}(p) - d_{32} A_{01}^{\alpha}(p),$$

$$B_{01}^{(6,\alpha)}(p) = 2(\varsigma - h)(z - h) A_{01}^{2+\alpha}(p) - k_{42} y A_{01}^{1+\alpha}(p) - d_{36} A_{01}^{\alpha}(p),$$

$$p_1^{\pm} = p_0 \pm x,\ p_2^{\pm} = p_0 + 4h \pm x,\ p_3^{\pm} = p_0 + 2h \pm x,\ p_4^{\pm} = p_0 \pm y,$$

$$p_5^{\pm} = p_0 + 2h \pm y,\ p_6^{\pm} = p_0 + 4h \pm y,\ p_0 = 2h(s + k).$$

Інтеграли $A_{\mu\nu}^{\alpha}(p) = \int\limits_0^{\infty} \xi^{\alpha} e^{-p\xi} J_{\mu}(\xi r) J_{\nu}(\xi\rho)\, d\xi$ виражені через спеціальні функції [4].

Зауважимо, що ряди в формулах (12) – рівномірно збіжні.

Отже, залежно від області прикладання і напряму дії зосередженої сили наведено розв'язки чотирьох осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору, вільного від зовнішнього поверхневого навантаження. Це дає змогу розв'язувати методом граничних інтегральних рівнянь широкий клас осесиметричних просторових задач пружності та термопружності для однорідних тіл складної форми, що контактують з шаром товщиною $h > 0$, обминаючи процедуру задоволення, зокрема, умов контакту на ділянці ідеального з'єднання.

---

1. *Процюк Б. В.* О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 11. – С. 1019–1021.
2. *Процюк Б. В.* Функції переміщень Гріна кусково-однорідного простору // Тези доп. IV міжнар. конф. з механіки неоднорідних структур. – 1995. – С. 118.
3. *Процюк Б. В.* Фундаментальна система розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності. – Київ: Ін-т математики НАНУ, 1996. – Ч. 2. – С. 89–94.
4. *Прудников А. П. Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
5. *Hasegawa H., Lee V.-G. Mura T.* Green's Functions for Axisymmetric Problems of Dissimilar Elastic Solids // Trans. of the ASME. J. of Appl. Mech. – 1992. – Vol. 59. – P. 312–320.

GREEN'S DISPLACEMENT FUNTIONS OF ELASTICITY AXISYMMETRIC PROBLEM FOR A PIECEWISE-HOMOGENEOUS HALF-SPACE

Boris Protsiuk

Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

Green's displacement functions for axisymmetric elasticity problem are constructed for half space-layer rigid fixing. The regular components are presented in terms of uniformly convergent series.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.1999