ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
*Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 158–161*

VISNYK LVIV UNIV.
*Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 158–161*

УДК 539.3

# ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА З ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ЖОРСТКИХ ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

**Мирон Стадник, Ігор Горбачевський**

*Український державний лісотехнічний університет*

Розглянемо безмежне ізотропне пружне тіло, що містить одне або систему абсолютно жорстких тунельних включень, ідеально зчеплених з основним матеріалом (матрицею). Початок прямокутної системи координат $Oxyz$ збігається з геометричним центром поперечного перерізу одного з включень, а вісь $Oy$ – з його циліндричною віссю. Поперечні перерізи включення, перпендикулярні до осі $Oy$, мають форму еліпсів, що описуються так: $z = \pm h(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}/\beta$ $(\beta = a/c >> 1)$. На нескінченності до тіла прикладені рівномірно розподілені зусилля розтягу $p$, що діють вздовж осі $Oz$ і викликають в однорідному тілі тензор напружень $\hat{\sigma}^0$ і вектор переміщень $\vec{u}^0$. У тілі реалізується плоска деформація. Необхідно визначити концентрацію напружень у матриці поблизу дефектів, а також напруження у включеннях.

**Випадок ізольованого включення.** Введемо поняття суми $(A)_*$ і стрибка $[A]_*$ величини $A$ на поверхнях $z = \pm h(x)$, $-\infty < y < \infty$ включення $(A)_* = A^+ + A^-$, $[A]_* = A^+ - A^-$, де $A^\pm = A|_{z=\pm h(x)}$. Поставлена задача зводиться [3] до крайової задачі теорії пружності для безмежного тіла з включенням, на поверхнях якого виконуються умови

$$\left[u_z^в\right]_* = 0; \qquad \left[u_x^в\right]_* = 0, \qquad (x, y) \in S, \tag{1}$$

де $S$ – серединна область включення, для якої $-a \le x \le a$, $-\infty < y < \infty$, $z = 0$; $u_z^в$ – компонента вектора переміщення у вибраній системі координат.

Для розв'язування задачі використаємо відомий [3] підхід, за яким концентрацію напружень поблизу дефекта можна обчислювати через стрибки напружень і переміщень відповідної сингулярної задачі для тіла з математичним розрізом $S$, на поверхнях якого діють невідомі напруження

$$\tilde{\sigma}_{zx}^{\pm} = -\sigma_{zx}^{0\pm} + \sigma_{zx}^{в\pm}; \qquad \tilde{\sigma}_{zz}^{\pm} = -\sigma_{zz}^{0\pm} + \sigma_{zz}^{в\pm}, \qquad (x, y) \in S, \tag{2}$$

що спонукають переміщенню $\tilde{u}_z = u_z^в - u_z^0$. Зв'язок між ними в $S$ є відомим [3].

Розв'язок задачі для однорідного (бездефектного) тіла при заданому навантаженні задається формулами $\left[u_z^0\right]_* = p(1-\mu)h(x)/G$; $\left(\sigma_{zz}^0\right)_* = 2p$, де $G$ і $\mu$ – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Для побудови сингулярного інтегрального рівняння (СІР) задачі використаємо математичні залежності [3], які описують зв'язок між напруженнями та деформаціями на поверхнях включення

$$\partial\left(u_x^в\right)_* / \partial x = 0; \qquad \partial\left(u_z^в\right)_* / \partial x = 0. \tag{3}$$

Підставляючи відповідні вирази у (3), зводимо задачу до знаходження стрибка невідомих напружень $\left[\tilde{\sigma}_{zx}\right]_*$ з рівняння

$$\int_{-a}^{a} \frac{[\tilde{\sigma}_{zx}]_*}{t-x} dt = -\frac{4p\pi\mu(1-\mu)}{3-4\mu} + \frac{2G(1-2\mu)}{3-4\mu} \int_{-a}^{a} \frac{[\tilde{u}_z]'_*}{t-x} dt, \quad [\tilde{u}_z]'_* = d[\tilde{u}_z]_* / dt. \tag{4}$$

Його розв'язок знаходимо, використовуючи відоме значення $[\tilde{u}_z]_* = -p(1-\mu)h(x)/G$. Він має такий вигляд:

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_*^{(із)} = 2p(1-\mu)(1-2\mu-2\mu\beta)(\beta(3-4\mu))^{-1} x / \sqrt{a^2 - x^2}, \quad |x| \le a. \tag{5}$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) $K_I$ для сингулярної задачі (2) можна [2] обчислити за формулою

$$K_I = -\lim_{x\to a} \sqrt{2\pi(a-x)} \left\{ \frac{G}{2(1-\mu)} [\tilde{u}_z]'_* + \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \right\}, \tag{6}$$

звідки знаходимо значення КІН для ізольованого включення

$$K_I^{(із)} = p\sqrt{\pi a} \left(\mu\beta(1-2\mu) - 2(1-\mu)^2\right) / (\beta(3-4\mu)). \tag{7}$$

Спрямувавши $\beta \to \infty$, з формули (7) отримаємо (з точністю до позначень) значення $K_I$ для абсолютно жорсткого лінійного включення [1]. Напруження $\sigma_{zz}^в$ на поверхнях включення обчислюють на підставі виразів (2)

$$\sigma_{zz}^{в\,(із)} = p(1-\mu)[2(1-\mu) + \beta(3-2\mu)] / (\beta(3-4\mu)), \tag{8}$$

а торцеві напруження $\sigma_{xx}^в$ – за формулою [2]

$$\sigma_{xx}^в(x) = \sigma_{xx}^0(x) - \frac{1}{2h(x)} \int_{-a}^{x} \left[\sigma_{zx}^в\right]_* dt, \tag{9}$$

$$\sigma_{xx}^{в(із)}(x) = p(1-\mu)(1-2\mu-2\mu\beta)/(3-4\mu). \tag{10}$$

Згідно з принципом мікроскопа [2, 4] напруження у матриці поблизу включення можуть визначатися через розв'язок крайової задачі (1)

$$\sigma_{zz}\big|_{x=\pm a} = 2\beta K_I / \sqrt{\pi a} + \tilde{\sigma}_{xx}(a) + p. \tag{11}$$

На підставі співвідношень (7) і (11) знайдемо, що

$$\sigma_{zz}^{(із)} = p\mu(1-2\mu-2\mu\beta)/(3-4\mu). \tag{12}$$

За умов плоского напруженого стану (ПНС) вираз (12) збігається з відомим [4].

**Періодична система компланарних включень.** Нехай у тілі розташована компланарно і періодично (період $d$) безмежна система однакових еліптичних тунельних включень. У цьому випадку з врахуванням періодичності та симетрії задача зводиться до такого СІР:

$$\int_{-a}^{a} [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d} dt = -\frac{4pd\mu(1-\mu)}{3-4\mu} + \frac{2G(1-2\mu)}{3-4\mu} \int_{-a}^{a} [\tilde{u}_z]'_* \operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d} dt \tag{13}$$

стосовно $\left[\tilde{\sigma}_{zx}\right]_*$. Використаємо подання ядра цього рівняння у вигляді ряду

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d} \cong \frac{d}{\pi(t-x)} - \frac{\pi}{3d}(t-x) - \frac{\pi^3}{45d^3}(t-x)^3 - \frac{2\pi^5}{945d^5}(t-x)^5 - \ldots;$$

$$\frac{|t-x|}{d} \leq \lambda = \frac{2a}{d} < 1.$$

Розв'язок шукатимемо в такому вигляді:

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \left(A_0 + A_2x^2 + A_4x^4\right)x\Big/\sqrt{a^2-x^2},$$

де коефіцієнти $A_0, A_2, A_4$ підлягають визначенню. Прирівнюючи в рівнянні (13) ліворуч й праворуч коефіцієнти при однакових степенях $x$ знайдемо, що

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{2p(1-\mu)}{\beta(3-4\mu)}\left[1 - 2\mu - 2\mu\beta\left(A_0^{(1)} + \frac{x^2}{d^2}A_2^{(1)} + \frac{x^4}{d^4}A_4^{(1)}\right)\right], \tag{15}$$

де $$A_0^{(1)} = 1 + \frac{\pi^2\lambda^2}{3\cdot 2^3} + \frac{7\pi^4\lambda^4}{3^2\cdot 5\cdot 2^7} + \frac{31\pi^6\lambda^6}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^{10}} + o\left(\lambda^6\right),$$

$$A_2^{(1)} = \frac{\pi^4\lambda^2}{3\cdot 5\cdot 2^3} + \frac{41\pi^6\lambda^4}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^6} + \frac{67\pi^8\lambda^6}{3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^7} + o\left(\lambda^6\right),$$

$$A_4^{(1)} = \frac{\pi^6\lambda^2}{3^3\cdot 7\cdot 2^2} + \frac{83\pi^8\lambda^4}{3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 2^7} + \frac{2173\pi^{10}\lambda^6}{3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 2^{10}} + o\left(\lambda^6\right).$$

За формулою (6) знаходимо значення КІН $K_I$ для цього випадку

$$K_I = K_I^{(is)}\left[1 + \mu\beta(1-2\mu)F(\lambda)\Big/\left(\mu\beta(1-2\mu) - 2(1-\mu)^2\right)\right], \tag{16}$$

причому $F(\lambda) = \dfrac{\pi^2\lambda^2}{3\cdot 2^3} + \dfrac{19\pi^4\lambda^4}{3^2\cdot 5\cdot 2^7} + \dfrac{55\pi^6\lambda^6}{3^3\cdot 7\cdot 2^{10}} + o\left(\lambda^{10}\right)$. Спрямувавши $\beta \to \infty$ та за умов ПНС, з (16) отримаємо КІН [1] для пластини з жорсткими лініями.

Напруження у включеннях та в матриці визначають залежностями

$$\sigma_{zz}^{в}(x) = \sigma_{zz}^{в(is)}\left\{1 - \frac{2(1-\mu)}{2(1-\mu)+\beta(3-2\mu)}\left[\frac{\pi^2\lambda^2}{3\cdot 2^3} + \frac{\pi^4\lambda^4}{15\cdot 2^7} + \frac{\pi^6\lambda^6}{3^3\cdot 7\cdot 2^9} + \frac{x^2}{d^2}\left(\frac{\pi^4\lambda^2}{15\cdot 2^3} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\pi^6\lambda^4}{63\cdot 2^5} + \frac{\pi^8\lambda^6}{45\cdot 2^{10}}\right) + \frac{x^4}{d^4}\left(\frac{\pi^6\lambda^2}{3^3\cdot 7\cdot 2^2} + \frac{\pi^8\lambda^4}{3^2\cdot 5\cdot 2^7} + \frac{\pi^{10}\lambda^6}{3^3\cdot 11\cdot 2^8}\right)\right]\right\}, \quad |x| \leq a, \tag{17}$$

$$\sigma_{xx}^{в}(\pm a) = \sigma_{xx}^{в(is)}F_1(\lambda); \qquad \sigma_{zz}\big|_{x=\pm a} = \sigma_{zz}^{(is)}F_1(\lambda), \tag{18}$$

де $F_1(\lambda) = 1 + 2\mu\beta/(2\mu\beta - (1-2\mu))F(\lambda)$. Вирази $K_I^{(is)}$, $\sigma_{zz}^{в(is)}$, $\sigma_{xx}^{в(is)}$, $\sigma_{zz}^{(is)}$ даються відповідними формулами п.1.

**Періодична система паралельних включень.** У цьому разі у тілі періодично вздовж осі $Oz$ розташована нескінченна система включень, серединні площини яких паралельні. Аналогічно, як і в попередньому пункті, задача зводиться до СІР

$$\int_{-a}^{a}[\tilde{\sigma}_{zx}]_* L(t,x)\,dt = -\frac{4pd\mu(1-\mu)}{3-4\mu} + \frac{2G(1-2\mu)}{3-4\mu}\int_{-a}^{a}\left[\tilde{u}_z\right]'_* L(t,x)\,dt, \quad |x| \leq a, \tag{19}$$

причому $L(t,x) = 2\,\mathrm{cth}\,\dfrac{\pi(t-x)}{d} - \dfrac{\pi(t-x)}{d}\,\mathrm{cosech}^2\,\dfrac{\pi(t-x)}{d}$. Провівши дії, схожі до дій у попередньому розділі, знайдемо, що напруженнями

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{2p(1-\mu)}{\beta(3-4\mu)}\left[1-2\mu-2\mu\beta\left(B_0^{(1)}+\frac{x^2}{d^2}B_2^{(1)}+\frac{x^4}{d^4}B_4^{(1)}\right)\right], \tag{20}$$

де $B_0^{(1)} = 1-\dfrac{\pi^2\lambda^2}{2^3}+\dfrac{5\pi^4\lambda^4}{3\cdot 2^7}-\dfrac{17\pi^6\lambda^4}{3^2\cdot 2^{10}}+o\left(\lambda^6\right)$; $\quad B_2^{(1)} = \dfrac{\pi^4\lambda^2}{3\cdot 2^3}-\dfrac{13\pi^6\lambda^4}{3^3\cdot 2^6}+$

$$+\frac{\pi^8\lambda^6}{3^3 2^5}+o\left(\lambda^6\right); \qquad B_4^{(1)} = -\frac{\pi^6\lambda^2}{3\cdot 2^2}+\frac{47\pi^8\lambda^4}{3^3\cdot 5\cdot 2^7}-\frac{221\pi^{10}\lambda^6}{3^4\cdot 5\cdot 2^{10}}+o\left(\lambda^6\right). \tag{21}$$

КІН $K_I$ у цьому випадку дорівнює

$$K_I = K_I^{(iz)}\left[1-\mu\beta(1-2\mu)\Phi(\lambda)\big/\left(\mu\beta(1-2\mu)-2(1-\mu)^2\right)\right], \tag{22}$$

де $\Phi(\lambda) = \dfrac{\pi^2\lambda^2}{2^3}-\dfrac{3\pi^4\lambda^4}{2^7}+\dfrac{247\pi^6\lambda^6}{3^3 2^{10}}+o\left(\lambda^{10}\right)$.

Розв'язок поставленої задачі задається формулами

$$\sigma_{zz}^{в}(x) = \sigma_{zz}^{в(iz)}\left\{1+\frac{2(1-\mu)}{2(1-\mu)+\beta(3-2\mu)}\left[\frac{\pi^2\lambda^2}{2^3}-\frac{\pi^4\lambda^4}{3\cdot 2^7}+\frac{\pi^6\lambda^6}{3^3\cdot 2^8}-\frac{x^2}{d^2}\left(\frac{\pi^4\lambda^2}{3\cdot 2^3}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\pi^6\lambda^4}{3^2\cdot 2^5}+\frac{\pi^8\lambda^6}{5\cdot 2^{10}}\right)+\frac{x^4}{d^4}\left(\frac{\pi^6\lambda^2}{3^3\cdot 2^2}-\frac{\pi^8\lambda^4}{5\cdot 2^7}+\frac{\pi^{10}\lambda^6}{3^3\cdot 2^8}\right)\right]\right\}, \quad |x|\le a; \tag{23}$$

$$\sigma_{xx}^{в}(\pm a) = \sigma_{xx}^{в(iz)}\Phi_1(\lambda); \qquad \sigma_{zz}\big|_{x=\pm a} = \sigma_{zz}^{(iz)}\Phi_1(\lambda), \tag{24}$$

де $\Phi_1(\lambda) = 1-2\mu\beta/(2\mu\beta-(1-2\mu))\,\Phi(\lambda)$.


1. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук М. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
2. *Стадник М. М.* Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 30–40.
3. *Стадник М. М., Горбачевський І. Я.* Пружна задача для тіла з тонким тунельним включенням овальноподібної конфігурації // Доп. НАН України. Сер. А. – 1997. – № 8. – С. 82–87.
4. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.


## PLANE DEFORMATION OF A BODY WITH THE PERIODICAL ARRAYS OF RIGID ELLIPTICAL INCLUSIONS


**Myron Stadnyk, Ihor Horbachevskyj**

*Ukrainian state forestry engineering university*



The infinite elastic body under normal tension containing the complanar and parallel systems of thin rigid cylindrical inclusions of the elliptical cross-section has been considered. The solutions of these problems by the method of small parameter were obtained.


Стаття надійшла до редколегії 20.12.1999