ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 162–165 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 162–165*

УДК 539.3

УЗАГАЛЬНЕНИЙ СИНГУЛЯРНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБОЛОНКИ ТИМОШЕНКА

Михайло Сухорольський

Національний університет «Львівська політехніка»

Розглянемо вільно оперту пологу трансверсально-ізотропну оболонку, план якої прямокутник. Зовнішні сили, що діють на оболонку, локалізовані в малій області і змінюються за гармонійним законом від часової координати.

Модифіковані рівняння теорії оболонок Тимошенка. Математичну модель пологої трансверсально-ізотропної оболонки Тимошенка, що враховує нормальну до серединної поверхні компоненту інерційної сили, зображають:

рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -q_i, \ \ \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i (i = 1,2),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3; \tag{1}$$

фізичними рівняннями

$$N_{11} = B\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu k_2) w\right], \ N_{22} = B\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu k_2) w\right],$$

$$M_{11} = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right), \ M_{22} = \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}\right), \ \ Q_i = \Lambda\left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i}\right) (i = 1,2),$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}\right), \ \ M_{12} = M_{21} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}\right), \tag{2}$$

де $B = \frac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \frac{h^2}{3} B$; $\Lambda = \frac{5h}{3} G'$; α_1, α_2, α_3 – ортогональні криволінійні координати; t – часова координата; 2h – товщина оболонки; δ – густина матеріалу; u_1, u_2, w, – переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі до серединної поверхні; k_1, k_2 – головні кривини; ν, E, G' – пружні сталі; N_{ij}, Q_i, M_{ij} – внутрішні сили і моменти; q_i, q_3, m_i – зовнішнє навантаження.

Переміщення довільної точки оболонки визначають за формулами $U_i = u_i + \alpha_3 \gamma_i$ $(i = 1,2)$, $U_3 = w$.

Модифіковані рівняння одержимо, знехтувавши жорсткими поворотами стосовно нормалі до серединної поверхні

$$2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \alpha_3\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}\right).$$

Вводячи за аналогією з [1] у вирази для зусиль $N_{12}, N_{21}, M_{12}, M_{21}$ допоміжні функції T, H (реакції на повороти) і малі параметри $\beta_1 = 2/B(1-\nu)$, $\beta_2 = 2/D(1-\nu)$ запишемо їх у вигляді

$$N_{12} = B(1-\nu)\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + T, \quad N_{21} = B(1-\nu)\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - T, \quad M_{12} = D(1-\nu)\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + H,$$

$$M_{21} = D(1-\nu)\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - H, \quad \beta_1 N = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \quad \beta_2 H = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}. \tag{3}$$

Вироджена система рівнянь, що відповідає (1), (2) з урахуванням (3) при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, зображає модифіковану математичну модель оболонки Тимошенка. Останні два рівняння (3) при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ мають вигляд $\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = 0$, $\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} = 0$. Їх можна задовольнити, ввівши потенціали поля переміщень і поля кутів повороту нормалі $u_i = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}$, $\gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}$ $(i = 1, 2)$.

Нормальні компоненти переміщень і зусиль вздовж деякої гладкої кривої з одиничним нормальним вектором $\{n_1(\alpha); n_2(\alpha)\}$ визначають за формулами

$$u_n = -\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \gamma_n = -\frac{\partial \gamma}{\partial n}, \quad N_n = -B\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right) - k_n w\right],$$

$$M_n = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2}\right), \quad Q_n = -\Lambda\frac{\partial}{\partial n}(\gamma - w), \tag{4}$$

де $\quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1}n_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}n_2; \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_1}n_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}n_1;$

$$k_n = (k_1 + \nu k_2)n_1^2 + (k_2 + \nu k_1)n_2^2.$$

Постановка задачі про вимушені коливання оболонки. Розглянемо динамічну задачу без початкових умов для модифікованої системи рівнянь. Позначимо через Π прямокутник зі сторонами l_1, l_2. На $\partial\Pi$ правильні умови

$$w = 0,\ u_2 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ N_{11} = 0,\ M_{11} = 0 \text{ при } \alpha_1 = 0,\ \alpha_1 = l_1;$$

$$w = 0,\ u_1 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ N_{22} = 0,\ M_{22} = 0 \text{ при } \alpha_2 = 0,\ \alpha_2 = l_2. \tag{5}$$

У квадраті $\Pi^r = \left\{\alpha(\alpha_1, \alpha_2) : \left|\alpha_i - \alpha_i^r\right| \le \varepsilon\right\}$ $(i = 1, 2)$, $\Pi^r \subset \Pi$ оболонка навантажена симетрично розподіленими стосовно його осей симетрії моментами і силами з рівнодійними $T_i^r \sin\theta_0 t$ $(i = \overline{1,3})$. Сила в серединній поверхні і момент зорієнтовані в напрямі одиничного вектора $\left\{n_1^r; n_2^r\right\}$,

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin\theta_0 t\,,\ (i = 1, 2),$$

$$q_3 = T_2^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin\theta_0 t \tag{7}$$

де

$$\delta_{\varepsilon i}(\alpha_i, \alpha_i^r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{|\,\alpha_i - \alpha_i^r\,|}{\varepsilon}\right), & |\,\alpha_i - \alpha_i^r\,| \le \varepsilon \\ 0, & |\,\alpha_i - \alpha_i^r\,| > \varepsilon \end{cases}$$

– дельта-видна функція [2]; $g(t)$ – спадна гладка функція $(0 \le t \le 1)$; $g(1) = 0$; $\int\limits_0^1 g(t)dt = 1$.

Задача полягає у відшуканні амплітуди усталених коливань оболонки.

Узагальнений сингулярний розв'язок. Розв'язок задачі, що справджує умови (5), шукаємо у вигляді суми рядів

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}^r \\ w_{km}^r \\ \gamma_{km}^r \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha)\sin\theta_0 t, \quad \begin{Bmatrix} T \\ H \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_{km}^r \\ H_{km}^r \end{Bmatrix} \Phi_{km}^*(\alpha)\sin\theta_0 t, \tag{8}$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin\lambda_{1k}\alpha_1 \sin\lambda_{2m}\alpha_2$; $\Phi_{km}^* = \cos\lambda_{1k}\alpha_1 \cos\lambda_{2m}\alpha_2$; $\lambda_{1k} = \dfrac{k\pi}{l_1}$.

Зобразивши відповідно до (8) дельта-видні функції у вигляді сум рядів, і підставивши їх разом з (8) у вихідну систему рівнянь, одержимо систему алгебраїчних рівнянь. Вирішуючи її, знайдемо

$$\begin{Bmatrix} u_{km}^r \\ w_{km}^r \\ \gamma_{km}^r \end{Bmatrix} = \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B} \begin{bmatrix} u_{1km} & u_{2km} & u_{3km} \\ w_{1km} & w_{2km} & w_{3km} \\ \gamma_{1km} & \gamma_{2km} & \gamma_{3km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_{km}^r}{\partial n} T_1^r \\ \Phi_{km}^r T_2^r \\ \dfrac{\partial \Phi_{km}^r}{\partial n} T_3^r \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

де $\Phi_{km}^r = \Phi_{km}(\alpha^r)$; $u_{1km} = \dfrac{-1}{\omega_{km}(\theta)}\left[(\Delta_{km})^2 + \left(\dfrac{Bk_0^2}{D} - \theta_0^2\right)\Delta_{km}^1\right]$;

$u_{2km} = -w_{1km} = \dfrac{-B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^1 \Delta_{km}^{\upsilon}$; $\quad u_{3km} = \gamma_{1km} = \dfrac{B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^{\upsilon}$;

$w_{2km} = \dfrac{B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^1 (\Delta_{km})^2$; $\quad w_{3km} = -\gamma_{2km} = \dfrac{-B}{D\omega(\theta)}(\Delta_{km})^2$;

$\gamma_{3km} = \dfrac{-B}{D\Delta_{km}^1}\left[\dfrac{(\Delta_{km})^2}{\omega_{km}(\theta)} + \dfrac{D}{\Lambda\Delta_{km}}\right]$; $\quad \Delta_{km} = \lambda_{1k}^2 + \lambda_{2m}^2$; $\Delta_{km}^1 = 1 + \dfrac{D}{\Lambda}\Delta_{km}$;

$$\Delta_{km}^{\nu} = (k_1 + \nu k_2)\lambda_{1k}^2 + (k_2 + \nu k_1)\lambda_{2m}^2;\ \ k_0^2 = k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2;\ \ \theta_0^2 = \frac{2h\rho\theta_0}{D};$$

$$\omega_{km}(\theta) = (\Delta_{km})^4 + \frac{B}{D}[k_0^2(\Delta_{km})^2 - (\Delta_{km}^{\upsilon})^2]\Delta_{km}^1 - \theta_0^2(\Delta_{km})^2\Delta_{km}^1;$$

$$c_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon);\qquad \varphi(\lambda) = \int_0^1 g(t)\cos\lambda t dt.$$

Зокрема, якщо $g(t) = 2(1-t)$, то $\varphi(\lambda_k\varepsilon) = [\sin(\lambda_k\varepsilon/2)/(\lambda_k\varepsilon/2)]^2$.

Формули для нормальних компонент векторів переміщень і зусиль одержимо з (4) з урахуванням (9).

Подвійні ряди в (9) при $\varepsilon \neq 0$ рівномірно збігаються [3]. Переходячи в (9) до границі при $\varepsilon \to 0$, знайдемо узагальнений сингулярний розв'язок модифікованої системи рівнянь у прямокутнику. Відповідні узагальнені суми рядів є в усіх точках прямокутника Π, крім точки $\alpha = \alpha^r$. Числові значення узагальненого розв'язку знаходимо за формулами (9) при досить малому значенні $\varepsilon \neq 0$.

---

1. *Сухорольский М. А.* Метод искусственного введения малого параметра в теории анизотропных оболочек // Актуальные проблемы неоднородной механики. Мат. Всесоюзн. научн. семинара (Ереван, 23-26 июня 1991г.). С. 320–325.
2. *Сухорольський М. А.* До проблеми наближення функції операторами усереднення. – Львів: Центр математ. моделювання ІППММ АН України (Препринт № 1–95), 1995. – 48 с.
3. *Сухорольський М. А.* Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами – частинними сумами операторів усереднення // Укр. мат. журн. – 1997. – № 5. – С. 706–714.

GENERALIZED SINGULAR SOLUTION OF THE DYNAMIC PROBLEM FOR TIMOSHENKO'S SHELL

Mikhailo Sukhorolsky

National University «Lvivska Politechnika»

The investigation is based of the mathematical model is based on the Timoshenko's shell. To construct a generalized singular solution of the initial system of equations Fourier's method is used, as well as the sequential method of constructing generalized functions.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.1999