

УДК 539.3

ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ДВОЗВ'ЯЗНИХ СИМЕТРИЧНИХ ГОСТРОКУТНИХ ШТАМПІВ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Андрій Сяський, Володимир Сяський

Рівненський державний гуманітарний університет

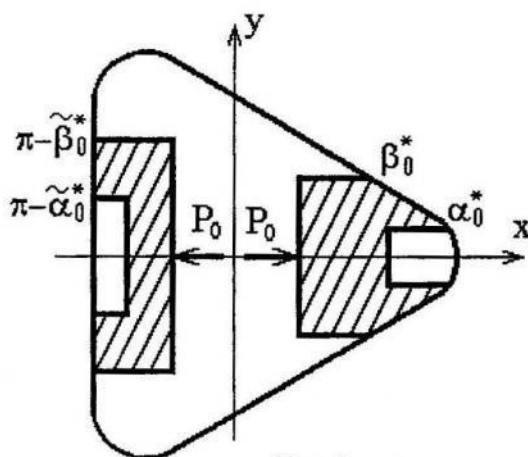


Рис. 1.

Нехай у криволінійний отвір безмежної ізотропної пластинки, який має форму правильного N -кутника з закругленими кутами, без зазору і натягу вставлені два жорсткі симетричні штампи з кутовими точками. Контакт між пластинкою і штампами забезпечують дві сили P_0 , які діють вздовж осі симетрії отвору і штампів (рис. 1). Внаслідок цього на контурі отвору L виникають зона контакту L_1 і зона вільна від напружень. Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль T_p під штампами та кільцевих зусиль T_λ на L .

Розглянемо функцію

$$Z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right), \quad (1)$$

яка реалізує конформне відображення зовнішності одиничного кола в площині $\xi = re^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка [2]. Не порушуючи загальності, вважаємо, що $R_0 = 1$.

Позначимо через $\pm\alpha_0^*$, $\pm\beta_0^*$, $\pi \pm \tilde{\alpha}_0^*$, $\pi \pm \tilde{\beta}_0^*$ значення полярного кута, які визначають зони контакту в полярній системі координат (r, δ) з полюсом у центрі отвору. Тоді

$$L_1 \equiv [-\beta_0^*, -\alpha_0^*] \cup [\alpha_0^*, \beta_0^*] \cup [\pi - \tilde{\beta}_0^*, \pi - \tilde{\alpha}_0^*] \cup [\pi + \tilde{\alpha}_0^*, \pi + \tilde{\beta}_0^*]. \quad (2)$$

У разі відображення (1) зоні контакту L_1 буде відповідати зона

$$\gamma_1 \equiv [-\beta_0, -\alpha_0] \cup [\alpha_0, \beta_0] \cup [\pi - \tilde{\beta}_0, \pi - \tilde{\alpha}_0] \cup [\pi + \tilde{\alpha}_0, \pi + \tilde{\beta}_0] \quad (3)$$

на одиничному колі γ в площині ξ .

Формули для визначення компонентів вектора зміщення контурних точок при заданому навантаженні мають вигляд [3]

$$U = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)f_1(\lambda) + I_2(\lambda) + C]; \quad V = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)f_2(\lambda) - I_1(\lambda)], \quad (4)$$

де E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; $2h$ – товщина пластинки;

$$f_1 + if_2 = - \int_0^\lambda (T_p^* + iS_{p\lambda}^*) e^{it} dt; \quad C - \text{ стала; } T_p^* + iS_{p\lambda}^* = (T_p + iS_{p\lambda}) \omega'(\sigma);$$

$$\sigma = e^{i\lambda}; \quad I_j(\lambda) = \frac{1}{\pi} \oint_\gamma f_i(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt, \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

Граничні умови задачі при відсутності тертя в зоні контакту згідно з [3] запишемо так:

$$U + a(\lambda)V = U_0; \quad f_1'(\lambda) + a(\lambda)f_2'(\lambda) = 0; \quad \lambda \in \gamma_1; \quad a(\lambda) = \operatorname{tg} \delta. \quad (6)$$

Враховуючи властивості функцій $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ [3], знаходимо після інтегрування останнього співвідношення (5) за частинами

$$I_1(\lambda) = \left[\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2(\lambda + t)/2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\pi - \tilde{\alpha}_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2(\lambda + t)/2} \right| dt \right] \sin \lambda;$$

$$I_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\pi - \tilde{\alpha}_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt. \quad (7)$$

Введенням в (7) заміни

$$f_j(t) = f_j(t), \quad t \in [\alpha_0, \beta_0]; \quad f_j(\pi + \tilde{t}) = \tilde{f}_j(\tilde{t}), \quad t \in [\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0] \quad (8)$$

рівності (4) можна подати у вигляді

$$U = \frac{1}{2Eh} \left[(1 - \nu)f_1(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln |\cos \tilde{t} + \cos \lambda| d\tilde{t} + C \right];$$

$$V = \frac{1}{2Eh} \left[(1 - \nu)f_2(\lambda) - \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2 \frac{\lambda + t}{2}} \right| dt + \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \frac{\cos \tilde{t} + \cos \lambda}{2 \cos^2 \frac{\lambda - \tilde{t}}{2}} \right| d\tilde{t} \right] \right],$$

$$\lambda \in \gamma. \quad (9)$$

Функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ в зоні контакту через їхні похідні виражають співвідношеннями

$$f_1(\lambda) = \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + C_0; \quad f_2(\lambda) = -\frac{P_0}{2} + \int_{\beta_0}^{\lambda} f_2'(t) dt; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$f_1(\lambda) = \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \tilde{C}_0; \quad f_2(\lambda) = -\frac{P_0}{2} + \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\lambda} f_2'(t) dt; \quad \lambda \in [\pi - \tilde{\beta}_0; \pi - \tilde{\alpha}_0]. \quad (10)$$

Підставляючи (9), (10) в граничні умови (6), одержимо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_j'(\lambda)$, $\tilde{f}_j'(\tilde{\lambda})$, $(j = 1, 2)$

$$\begin{aligned}
& (1 - \nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln |\cos \tilde{t} + \cos \lambda| d\tilde{t} + \\
& + C_j + a(\lambda) \times \left\{ (1 - \nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{P_0}{2} - \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2(\lambda + t)/2} \right| dt + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \frac{\cos \tilde{t} + \cos \lambda}{2 \cos^2(\lambda + \tilde{t})/2} \right| d\tilde{t} \right] \right\} = 0; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$f_1'(\lambda) + a(\lambda)f_2'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad \lambda \in [\pi - \tilde{\beta}_0, \pi - \tilde{\alpha}_0].$$

Крім системи (11), повинні виконуватися умови рівноваги кожного штамп

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt = -\frac{P_0}{2}; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} = -\frac{P_0}{2}, \quad (12)$$

які служать для визначення сталих C_1, C_2 .

Знаходження точного розв'язку системи (11)–(12) пов'язане із значними математичними труднощами. Оскільки при відсутності тертя контактні напруження, а відповідно і функції $f_j'(\lambda)$, $\tilde{f}_j'(\tilde{\lambda})$, на кінцях зон контакту мають кореневу особливість, то наближений розв'язок цієї системи можна знайти методом колокації [2, 4].

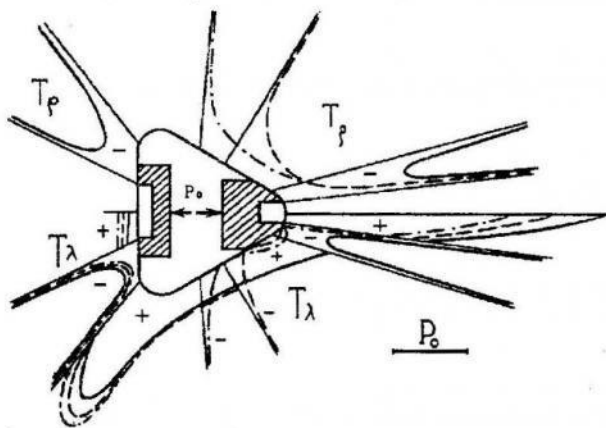


Рис. 2.

Результати обчислень нормальних T_p і кільцевих T_λ зусиль на контурі трикутного ($N = 3$; $\epsilon = 0.25$) отвору при $\alpha_0 = \frac{\pi}{12}$,

$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\pi}{12}$, $\tilde{\beta}_0 = \frac{\pi}{4}$ зображені на рис. 2. Суцільні лінії побудовані для випадку $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$, штрихові –

для випадку $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$, штрихпунк-

тирні – для випадку $\beta_0 = \frac{5\pi}{12}$.

Величини T_p і T_λ на торцях зони контакту необмежені. Кільцеві зусилля T_λ зовні зон контакту залишаються обмеженими.

Зміною параметрів N, ϵ (форма отвору) і $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \alpha_0, \beta_0$ (розміри зон контакту) з системи (11) можна одержати розв'язки окремих задач про двосторонній контакт двох симетричних штампів з криволінійним отвором ізотропної пластинки.

При $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0$ система (11) визначає розв'язок задачі для двох однозв'язних штампів з кутовими точками.

Якщо в системі (11) прийняти, що $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = \beta_0 = \tilde{\beta}_0 = 0$, то однозв'язні штампи вироджуються в клиноподібні. В цьому випадку система визначає розв'язок задачі про тиск двох зрівноважених сил на контур отвору вздовж осі його симетрії. Задачі такого класу для кругового й еліптичного отворів розглянуто в [1, 5].

Приймаючи в (11) $\alpha_0 = \beta_0 \neq 0$, $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 \neq 0$, приходимо до задачі про тиск на криволінійний отвір двох пар зв'язаних паралельних сил, відстань між якими незмінна.

Збільшуючи кути β_0 і $\tilde{\beta}_0$, можна домогтися того, що контактні зусилля в точках $\lambda = \pm\beta_0$, $\lambda = \pi \pm \beta_0$ дорівнюватимуть нулю. Якщо при цьому $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0$, то однозв'язні штампи з кутовими точками працюватимуть так само як гладкі штампи при їх посадці з нульовим зазором [4].

Якщо в системі (11) параметри $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\beta}_0$, α_0 , β_0 змінювати незалежно, то одержимо розв'язки цілого класу нових контактних задач. Для окремих з них відомі точні розв'язки, які можна використати для оцінки точності методу колокації.

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.
2. Сяський А. А. О контакте жесткого диска с криволинейным отверстием в бесконечной пластинке. — Ровно, 1988. — 10 с. — Деп в УкрНИИТИ 03.01.89. №128-Ук89.
3. Сяський А. О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір ортотропної пластинці // Волин. мат. вісн. — 1997. — Вип. 4. — С. 153–156.
4. Сяський В. А. Вдавлювання жорсткого диска в криволінійний отвір ізотропної пластинки // Волин. мат. вісн. — 1997 — Вип. 4. — С. 157–60.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.

THE TWO-SIDED CONTACT OF DOUBLY-CONNECTED SYMMETRIC ACUTE-ANGLED STAMPS WITH CURVELINEAR APERTURE IN ENDLESS PLATE

Andriy Syasky, Volodymyr Syasky

Rivno state humanitarian university

The problem about the contact interaction of curvelinear aperture in endless plate and system of doubly-connected symmetric stamps with angular points is reduced to a system of integral equations with logarithmic nuclei. Approximate solution of the problem is realized by the method of Multhopp-Calandia collocation.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.1999