ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 170–173 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 170–173*

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ТОНКОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Любомир Тисовський

Український державний лісотехнічний університет

Загальна схема розв'язування задач про визначення напружено-деформованого стану в тілах з сторонніми включеннями полягає в сумісному розв'язку рівнянь рівноваги для області, зайнятої основним матеріалом (матриці), і області, зайнятої включенням. Потім отримані розв'язки спрягаються по лінії розділу матеріалів шляхом задоволення граничних умов. Однак згаданий підхід досить трудомісткий особливо тоді, коли геометричні розміри включення не є співмірними. В цьому випадку виникають сильно неоднорідні поля шуканих характеристик. Якщо врахувати тонкостінність прошарку і його механічні та теплофізичні характеристики, то можна ввести різні спрощення в постановку і розв'язування задачі. Один з таких підходів пропонуємо нижче.

Розглянемо безмежну матрицю, яка містить криволінійне тонкостінне пружне включення постійної ширини $2h$. Серединну лінію включення позначимо через L з додатним напрямом обходу на ній проти ходу годинникової стрілки. Композит перебуває в заданому зовнішньому температурному і силовому полі, а на лінії розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного і теплового контакту, які можна зобразити так:

теплові

$$\left(T_* + i\eta\right)_0 \big|_{\delta=\pm h} = \left(T_* + i\eta\right) \big|_{\delta=\pm h} ,$$

$$\kappa_0 \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0\Big|_{\delta=\pm h} = \kappa \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)\Big|_{\delta=\pm h}; \tag{1}$$

механічні

$$(N + iT)_0 \big|_{\delta=\pm h} = (N + iT) \big|_{\delta=\pm h} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0\Big|_{\delta=\pm h} + i\gamma = \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)\Big|_{\delta=\pm h}, \tag{2}$$

де $N \equiv N(t)$; $T \equiv T(t)$; $u \equiv u(t)$; $v \equiv v(t)$; $T_* \equiv T_*(t)$ – відповідно нормальна і дотична компоненти зовнішніх зусиль; компоненти вектора переміщень і температура, обчислені в точці t лінії розділу матеріалів; $\eta = \eta(t)$ – допоміжна гармонійна функція; κ – коефіцієнт теплопровідності; γ – поворот тонкого включення як жорсткого цілого; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; δ – відрізок перпендикуляра, проведеного до лінії L в точці t. Тут і далі всі характеристики тонкого включення позначають індексом «0», а характеристики матриці вживають без індексів.

Припустимо, що композит перебуває в умовах плоскої задачі термопружності, тобто напружено-деформований стан і температурне поле в тілі можна зобразити комплексними потенціалами Колосова – Мусхелішвілі $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ і комплексні потенціали температурного поля $F_1(z)$, $Q_1(z)$

$$N + iT = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\overline{z}}{dz}\left[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\right],$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial t}(u + iv) = \chi\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} -$$

$$-\frac{d\overline{z}}{dz}\left[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\right] + H\left[F_1(z) + \overline{Q_1}(z)\right], \qquad (3)$$

$$T_* + i\eta = F_1(z) + Q_1(\overline{z}). \qquad (4)$$

Тут σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; $H = \alpha_t E$, $\chi = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації і $H = \alpha_t E/(1+\nu)$, $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ – для плоского деформованого стану; α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення; ν – коефіцієнт Пуассона; $\mu = E/(2(1+\nu))$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; z – комплексна змінна.

Нехай тепер тонкостінне включення буде геометричним об'єктом, який утворюється так. З точки $u \in L$ відкладаємо по нормалі до L в одну і іншу сторону відрізок довжиною h. Тоді біжуча координата сторін включення визначається співвідношенням

$$t^{\pm} = u \pm he^{i\alpha}, \qquad \alpha = \alpha(u),$$

де t^+, t^- – відповідно точки лівого і правого берегів включення по відношенню до вибраного додатного напряму; α – кут, який становить нормаль до контура з віссю Ox.

Скориставшись поняттям похідної за напрямом, зі співвідношення (4) можна отримати

$$\frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta) = e^{i\alpha}F(z) + e^{-i\alpha}Q(\overline{z}),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta) = -i\left(e^{i\alpha}F(z) - e^{-i\alpha}Q(\overline{z})\right),$$

де $F(z) = F_1'(z)$, $Q(z) = Q_1'(z)$.

Запишемо співвідношення (3), (5) для області, зайнятої тонким включенням і, враховуючи тонкостінність прошарку, розвинемо комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі і функції $F(z)$, $Q(z)$ в ряди Тейлора в околі точки $u \in L$. Залишаючи в одержаних розкладах лише члени першого порядку малості порівняно з h, після перетворень одержимо

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^- = 2h\rho'(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^- = 2hg'(u), \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^- = -2i\left[e^{i\alpha}F_0(u) - e^{-i\alpha}Q_0\left(\overline{u}\right)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^- = 2\left[e^{i\alpha}F_0(u) + e^{-i\alpha}Q_0\left(\overline{u}\right)\right], \tag{7}$$

$$(N + iT)_0^+ - (N + iT)_0^- = 2hK'(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^+ - \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^- = \frac{h}{\mu_0}M'(u), \tag{8}$$

$$(N + iT)_0^+ + (N + iT)_0^- = 2\left[\Phi_0(u) + \overline{\Phi_0(u)} - e^{-2i\alpha}R_0(u)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^+ + \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^- =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[\chi_0\Phi_0(u) - \overline{\Phi_0(u)} + e^{-2i\alpha}R_0(u) + 2H_0 f_0(u)\right]. \tag{9}$$

Функції стрибка потоків тепла $\rho'(u)$, $g'(u)$, контактних напружень $K'(u)$ і похідних від вектора переміщень $M'(u)$ у точці u кривої L пов'язані з комплексними потенціалами співвідношеннями

$$\rho'(u) = -i\left[e^{2i\alpha}F_0'(u) - e^{-2i\alpha}Q_0'(\overline{u})\right],$$

$$g'(u) = e^{2i\alpha}F_0'(u) + e^{-2i\alpha}Q_0'(\overline{u}),$$

$$K'(u) = e^{i\alpha}\Phi_0'(u) - e^{-i\alpha}\overline{\Phi_0'(u)} + e^{-i\alpha}R_0'(u),$$

$$M'(u) = \chi_0 e^{i\alpha}\Phi_0'(u) + e^{-i\alpha}\overline{\Phi_0'(u)} - e^{-i\alpha}R_0'(u) + H_0 e^{i\alpha} f_0'(u),$$

$$R_0(u) = u\overline{\Phi_0'(u)} + \overline{\Psi_0(u)}. \tag{10}$$

Отже, співвідношеннями (6)–(10) повністю описуються умови взаємодії криволінійного тонкого термопружного включення з навколишнім середовищем. Співвідношення (6), (8) треба вважати визначальними для функцій стрибка відповідних теплових і пружних компонент, а співвідношення (7), (9) і є власне моделлю тонкого включення.

Накінець, зауважимо, що:

а) функція f_0, дійсна частина якої має фізичний зміст температури, перебуває у процесі розв'язування задачі теплопровідності;

б) якщо в співвідношеннях (8)–(9) прийняти, що $f_0(u) \equiv 0$, то отримаємо модель тонкого криволінійного пружного включення [1];

в) одержані умови взаємодії тонкого включення з навколишнім середовищем є досить загальними і дають змогу отримати розв'язок у широкому діапазоні зміни як пружних, так і теплофізичних характеристик задачі: від тріщини до абсолютно жорсткого включення і від абсолютно теплопровідної тріщини (включення) до теплоізольованої тріщини (включення). Прийнявши, що $\alpha = \pi / 2$ одержимо модель прямолінійного тонкого термопружного включення [2].

---

1. *Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О.* Упругое равновесие изотропной пластины с криволинейным тонким упругим включением // Прикл. механика. – 1989. – Т. 26, № 12. – С. 86–93.
2. *Грилицкий Д. В., Драган М. С., Опанасович В. К.* Температурное поле и термоупругое состояние пластин с тонкостенным упругим включением // Прикл. математика и механика. – 1980. – Т. 44, Вып. 2. – С. 338–345.

A MODEL OF A THIN CURVELINEAR ELASTIC INCLUSION FOR THE PLANAR PROBLEM OF THERMOELASTICITY

Lubomir Tisowskij

Ukrainian state forestry engineering university

This paper is concerned with the problem, of a thin curvelinear elastic inclusion in an infinite isotropic medium under the action of a temperature field. Taking account of the thin – walled nature of an inclusion, let us expand the complex potentials in a Taylor series in the neighbourhood of a point a middle line of an inclusion.

Стаття надійшла до редколегії 02.12.1999