ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 174–177

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 174–177

УДК 539.3

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В ДИНАМІЧНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ ОСЕСИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ігор Турчин, Ростислав Середюк

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо пружний суцільний циліндр радіуса R Вважатимемо, що джерелом нестаціонарних процесів у такому пакеті є локальне збурення внутрішньої поверхні циліндра високоінтенсивним осесиметричним нормальним навантаженням по обмеженій області. На поверхні розділу циліндра і простору виконуються умови ідеального механічного контакту.

З математичного погляду задача полягає у відшуканні розв'язку чотирьох хвильових рівнянь

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{\psi}{\rho^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2} = \kappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}, \tag{2}$$

де $\phi(\rho,\gamma,\tau)$, $\psi(\rho,\gamma,\tau)$ – хвильові потенціали; $\rho = r/R$, $\gamma = z/R$ – безрозмірні змінні циліндричної системи координат; $\tau = c_1 t/R$ – динамічний (безрозмірний) час; c_1, c_2 – відповідно швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль у матеріалі циліндра; $\kappa = c_1/c_2$.

Ненульові компоненти вектора переміщень і тензора напружень пов'язані з хвильовими потенціалами такими формулами:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial\psi}{\partial\gamma}; \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\psi}{\rho}, \tag{3}$$

а компоненти тензора напружень одержані за законом Гука. Зокрема,

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}}{\mu} = \left(\kappa^2 - 2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} + 2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\gamma}\right); \tag{4}$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}}{\mu} = -\kappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho\partial\gamma} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2}. \tag{5}$$

Згідно зі зробленими у формулюванні задачі припущеннями на граничній поверхні циліндра повинні виконуватись умови

$$\sigma_{\rho\rho} = -p(\gamma,\tau); \quad \sigma_{\rho\gamma} = 0, \text{ при } \rho = 1. \tag{6}$$

На осі симетрії циліндра компоненти вектора переміщень і тензора напружень повинні бути обмеженими:

$$\{u,\ w,\ \sigma_{\rho\rho},\ \sigma_{\gamma\gamma}\} < \infty,\ \text{при}\ \rho \to \infty. \tag{7}$$

Застосовуючи до рівнянь (1), (2) інтегральне перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегральне перетворення Фур'є за змінною γ і враховуючи нульові початкові умови, одержимо трикутну послідовність диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \overline{\phi}_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\phi}_n}{\partial \rho} - \left(\xi^2 + \lambda^2\right)\overline{\phi}_n^{(i)} = \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1}(n-m+1)\overline{\phi}_m\,; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\psi}_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\psi}_n}{\partial \rho} - \frac{\overline{\psi}_n}{\rho^2} - \left(\xi^2 + \lambda^2\kappa^2\right)\overline{\psi}_n = \lambda^2\kappa^2 \sum_{m=0}^{n-1}(n-m+1)\overline{\psi}_m\,, \tag{9}$$

де $\begin{Bmatrix} \overline{\phi}_n(\rho,\xi) \\ \overline{\psi}_n(\rho,\xi) \end{Bmatrix} = \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda\tau) \int\limits_0^\infty \begin{Bmatrix} \phi\ (\rho,\gamma,\tau)\cos(\xi\gamma) \\ \psi\ (\rho,\gamma,\tau)\sin(\xi\gamma) \end{Bmatrix} d\gamma L_n(\lambda\tau)d\tau$ – зображення за Фур'є і Лагерром.

Розв'язок рівнянь (8), (9), як відомо [1], можна записати у вигляді алгебричної згортки

$$\overline{\phi}_n = \sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}(\xi)G_{0,j}(\rho,\xi,\lambda^2) + B_{n-j}(\xi)W_{0,j}(\rho,\xi,\lambda^2)\right]; \tag{10}$$

$$\overline{\psi}_n = \sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j}(\xi)G_{1,j}(\rho,\xi,\lambda^2\kappa^2) + D_{n-j}(\xi)W_{1,j}(\rho,\xi,\lambda^2\kappa^2)\right], \tag{11}$$

де $G_{\nu,j}(\rho,\xi,x)$ і $W_{\nu,j}(\rho,\xi,x)$ є лінійно незалежними фундаментальними розв'язками такої трикутної послідовності диференціальних рівнянь:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)F_{\nu,j} - (\xi^2 + x)F_{\nu,j} = x\sum_{m=0}^{j-1}(n-m+1)F_{\nu,m}\,, \tag{12}$$

які з використанням методу невизначених коефіцієнтів можна навести у вигляді

$$G_{\nu,j}(\rho,\xi,x) = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}\left(\frac{x\rho}{2\sqrt{\xi^2+x}}\right)^k \frac{I_{k+\nu}\left(\rho\sqrt{\xi^2+x}\right)}{k!}; \tag{13}$$

$$W_{\nu,j}(\rho,\xi,x) = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}\left(-\frac{x\rho}{2\sqrt{\xi^2+x}}\right)^k \frac{K_{k+\nu}\left(\rho\sqrt{\xi^2+x}\right)}{k!}. \tag{14}$$

Тут $I_\eta(\cdot)$ і $K_\eta(\cdot)$ – відповідно, модифіковані функції Бесселя та функції Макдональда. Підставивши (13) і (14) у рівняння (12), одержимо рекурентні співвідношення для визначення невідомих коефіцієнтів $a_{j,k}$:

$$a_{n,k+1} = \sum_{m=k}^{n-1}(n-m+1)a_{m,k} \tag{15}$$

з довільними $a_{j,0}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ і $a_{j,k} \equiv 0$ при $k > j$.

Враховуючи умови на осі циліндра (7) і те, що функції Макдональда $K_\nu(x)$ необмежено зростають при $x \to 0$, одержимо, що

$$B_n = D_n \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Для визначення решти невідомих слугують умови (6). Після застосування до них інтегрального перетворення Лагерра – Фур'є в термінах хвильових функцій одержимо:

$$\kappa^2\lambda^2 \sum_{m=0}^{n} (n-m+1)\,\overline{\phi}_m + 2\xi^2\overline{\phi}_n - \frac{2}{\rho}\frac{d\overline{\phi}_n}{d\rho} - 2\xi\frac{d\overline{\psi}_n}{d\rho} = -\overline{p}_n(\xi), \quad \rho = 1 \tag{17}$$

$$\kappa^2\lambda^2 \sum_{m=0}^{n} (n-m+1)\,\overline{\psi}_m + 2\xi^2\overline{\psi}_n - 2\xi\frac{d\overline{\phi}_n}{d\rho} = 0, \quad \rho = 1 \tag{18}$$

Приймемо $a_{0,0} = 1$; $a_{j,0} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. З урахуванням формул (10), (11) після перетворень одержимо

$$A_n\left[\left(\omega_2^2 + \xi^2\right)I_0(\omega_1) - 2\omega_1 I_1(\omega_1)\right] - C_n\left[2\xi\left(\omega_2 I_0(\omega_2) - I_1(\omega_2)\right)\right] = f_n^{(1)}; \tag{19}$$

$$-A_n\left[2\xi\omega_1 I_1(\omega_1)\right] + C_n\left(\omega_2^2 + \xi^2\right)I_1(\omega_{21}) = f_n^{(2)}, \tag{20}$$

де введено такі позначення:

$$\omega_1 = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2}; \quad \omega_2 = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2\kappa^2};$$

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\overline{p}_n(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\Big\langle A_{n-j}\Big[\left(\omega_2^2 + \xi^2\right)G_{0,j}\left(1, \xi, \lambda^2\right) - 2G'_{0,j}\left(1, \xi, \lambda^2\right) +$$

$$+ \kappa^2\lambda^2\sum_{k=1}^{j}(j-k+1)\,G_{0,k}\left(1, \xi, \lambda^2\right)\Big] + C_{n-j}\left[2\xi G'_{1,j}\left(1, \xi, \kappa^2\lambda^2\right)\right]\Big\rangle;$$

$$f_n^{(1)}(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\Big\langle A_{n-j}\left[2\xi G'_{0,j}\left(1, \xi, \lambda^2\right) - C_{n-j}\Big[\left(\omega_2^2 + \xi^2\right)G_{1,j}\left(1, \xi, \kappa^2\lambda^2\right) +\right.$$

$$\left. + \kappa^2\lambda^2\sum_{k=1}^{j}(j-k+1)\,G_{1,k}\left(1, \xi, \kappa^2\lambda^2\right)\Big]\right]\Big\rangle;$$

$$G'_{\nu,j}(\rho, \xi, x) = \sum_{k=0}^{j}\frac{a_{j,k}}{k!}\left(\frac{x\rho}{2\sqrt{\xi^2 + x}}\right)^k\left[\sqrt{\xi^2 + x}\,I_{k+\nu-1}\left(\rho\sqrt{\xi^2 + x}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu}{\rho}I_{k+\nu}\left(\rho\sqrt{\xi^2 + x}\right)\right].$$

Розв'язок систем рівнянь (19), (20) відшукаємо у вигляді

$$A_n(\xi) = \frac{\left(\omega_2^2 + \xi^2\right) I_1(\omega_2) f_n^{(1)}(\xi) + \left[2\xi\left(\omega_2 I_0(\omega_2) - I_1(\omega_2)\right)\right] f_n^{(2)}(\xi)}{\left(\omega_2^2 + \xi^2\right) I_0(\omega_1) I_1(\omega_2) - 2\omega_1 I_1(\omega_1)\left(\kappa^2\lambda^2 I_1(\omega_2) + 2\xi^2\omega_2 I_0(\omega_2)\right)}; \quad (21)$$

$$C_n(\xi) = \frac{2\xi\omega_1 I_1(\omega_1) f_n^{(1)}(\xi) + \left[\left(\omega_2^2 + \xi^2\right) I_0(\omega_1) - 2\omega_1 I_1(\omega_1)\right] f_n^{(2)}(\xi)}{\left(\omega_2^2 + \xi^2\right) I_0(\omega_1) I_1(\omega_2) - 2\omega_1 I_1(\omega_1)\left(\kappa^2\lambda^2 I_1(\omega_2) + 2\xi^2\omega_2 I_0(\omega_2)\right)}. \quad (22)$$

Формули (21), (22) дають змогу послідовно визначити всі $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$, а, отже, формально завершити побудову розв'язку вихідної задачі, який запишемо у вигляді ряду за поліномами Лагерра:

$$\phi(\rho,\gamma,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\int_0^{\infty} A_{n-j}(\xi) G_{0,j}(\rho,\xi,\lambda^2)\cos(\xi\gamma)d\xi;$$

$$\psi(\rho,\gamma,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\int_0^{\infty} C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho,\xi,\lambda^2\kappa^2)\sin(\xi\gamma)d\xi;$$

$$u(\rho,\gamma,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\int_0^{\infty}\Big[A_{n-j}(\xi) G'_{0,j}(\rho,\xi,\lambda^2) -$$

$$-\xi C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho,\xi,\lambda^2\kappa^2)\Big]\cos(\xi\gamma)d\xi;$$

$$w(\rho,\gamma,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\int_0^{\infty}\Big[-\xi A_{n-j}(\xi) G_{0,j}(\rho,\xi,\lambda^2) +$$

$$+ C_{n-j}(\xi) G'_{1,j}(\rho,\xi,\lambda^2\kappa^2) + \rho^{-1} C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho,\xi,\lambda^2\kappa^2)\Big]\sin(\xi\gamma)d\xi.$$

1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишова – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С 3–7.

LAGUERRE POLYNOMIALS METHOD IN DYNAMIC PROBLEM FOR LONG CYLINDER UNDER LOCAL AXISYMMETRIC LOADING

Igor Turchyn, Rostyslav Seredyuk

Ivan Franko National University of L'viv

The solution to the dynamic elasticity problem for long solid cylinder under the action of local axisymmetric loading is constructed using Laguerre polynomials method and integral Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.1999