ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 186–189

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 186–189

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В СИСТЕМІ ШАР-ПІВПРОСТІР, ЗУМОВЛЕНЕ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Ольга Турчин

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо шар товщиною h, що лежить на масивному тілі (моделюється півпростором) з іншими теплофізичними характеристиками. Шар з певного моменту часу починають нагрівати джерела тепла, що рухаються по його вільній поверхні прямолінійно в додатному напрямі осі Oy зі сталою швидкістю v. Тепловий контакт між шаром і півпростором будемо вважати ідеальним, а початкову температуру шару і півпростору такою, що дорівнює нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерела тепла в напрямі перпендикулярному до напряму руху, значно більші від товщини шару, а тому зміною температури в цьому напрямі знехтуємо (плоска задача).

Отже, задача полягає у відшуканні розв'язку двох рівнянь нестаціонарної теплопровідності

$$\partial^2_{\eta\eta}T^{(i)} + \partial^2_{\zeta\zeta}T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1}\partial_\tau T^{(i)}, \quad i = 1,2 \tag{1}$$

за початкових

$$T^{(i)}(\eta,\zeta,0) = 0, \qquad i = 1,2 \tag{2}$$

крайових

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\zeta T^{(1)} = -q(\eta,\tau)\,, \quad \zeta = 0\,; \tag{3}$$

$$T^{(2)} = 0, \quad \zeta \to \infty \tag{4}$$

та умовах спряження

$$T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\zeta T^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)}\partial_\zeta T^{(2)}, \quad \zeta = 1\,. \tag{5}$$

Тут і надалі всі функції і величини з індексом «1» стосуються шару, а з індексом «2» – до півпростору; $T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau)$ – температура, $\eta = x/h$, $\zeta = y/h$, $\tau = a_0 t/h^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $q(\eta,\tau) = q(\eta)\left[S_+\left(v^*\tau + \tilde{l}\right) - S_+\left(v^*\tau - \tilde{l}\right)\right]/\left(\lambda_T^{(0)}h\right)$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(0)}$, $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності; $\tilde{l} = l/h$, l – півдовжина рухомої смуги, на якій розташовані джерела тепла; $q(\eta)$ – закон розподілу густини джерел тепла по рухомій області; $v^* = vh/a_0$ – безрозмірна швидкість; $\lambda_T^{(0)}$, a_0 – деякі розмірні величини, які вибираємо згідно з завданнями числового аналізу.

Застосувавши до рівнянь (1), крайових умов (3), (4) та умов спряження (5) інтегральне перетворення Фур'є за змінною η та інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ, а також після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d_{\gamma\gamma}^2 \overline{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \overline{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \overline{T}_m^{(i)}, \quad i = 1,2; \tag{6}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta \left. \overline{T}_n^{(1)} \right|_{\zeta=0} = -\overline{q}_n(\xi) ; \tag{7}$$

$$\left. \overline{T}_n^{(2)} \right|_{\zeta\to\infty} = 0 ; \tag{8}$$

$$\overline{T}_n^{(1)} = \overline{T}_n^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta \overline{T}_n^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} d_\zeta \overline{T}_n^{(2)}, \quad \zeta = 1 . \tag{9}$$

У формулах (6)–(9) $n = \overline{0,\infty}$; $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$ – зображення за Лагерром і Фур'є; $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра; $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$, $\beta_i = \lambda / \tilde{a}_i$; λ – масштабний множник; $\overline{q}_n(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int\limits_{v^*\tau-\tilde{l}}^{v^*\tau+\tilde{l}} q(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (6) наведемо у вигляді алгебричної згортки:

$$\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi,\zeta) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi,\zeta) \right], \quad i = 1,2; \quad n = \overline{0,\infty}, \tag{10}$$

де $$G_j^{(i)}(\zeta,\omega_i) = e^{-\omega_i\zeta} \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(\omega_i\zeta)^k}{k!}; \quad W_j^{(i)}(\zeta,\omega_i) = e^{\omega_i\zeta} \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i\zeta)^k}{k!}. \tag{11}$$

Коефіцієнти $a_{j,k}^i(\xi)$ у цьому разі задовольняють рекурентне співвідношення:

$$a_{j,k+1}^i = \frac{1}{2} \left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right),$$

де $a_{j,k}^i \equiv 0$, при $k > j$, а $a_{j,0}^i$ – довільні.

Задовольняючи умові на безмежності (8), одержимо

$$B_n^{(2)}(\xi) \equiv 0, \quad n = \overline{0,\infty} .$$

Приймемо $a_{0,0}^i(\xi) \equiv 1$, $a_{j,0}^i \equiv 0$, $j = \overline{1,\infty}$. Тоді, задовольняючи крайову умову (7) та умови спряження (9) одержимо трикутну послідовність систем функційних рівнянь

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 & \omega_1 & 0 \\ e^{-\omega_1} & e^{\omega_1} & -e^{-\omega_2} \\ -\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 e^{-\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 e^{\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 e^{-\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)} \\ f_n^{(2)} \\ f_n^{(3)} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\overline{q}_n(\xi) - \sum_{j=1}^{n} \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi,0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi,0) \right];$$

$$f_n^{(2)}(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j^{(2)}(\xi,1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,1) - B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j^{(1)}(\xi,1)\right];$$

$$f_n^{(3)}(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\left[\tilde\lambda_T^{(2)}A_{n-j}^{(2)}(\xi)\partial_\zeta G_j^{(2)}(\xi,1)-\tilde\lambda_T^{(1)}A_{n-j}^{(1)}(\xi)\partial_\zeta G_j^{(1)}(\xi,1)-\tilde\lambda_T^{(1)}B_{n-j}^{(1)}(\xi)\partial_\zeta W_j^{(1)}(\xi,1)\right].$$

З систем (13) невідомі $A_n^{(1)}(\xi)$, $B_n^{(1)}(\xi)$, $A_n^{(2)}(\xi)$ отримаємо у такому вигляді:

$$A_n^{(1)}(\xi) = \frac{-e^{\omega_1}\left(\tilde\lambda_T^{(1)}\omega_1 + \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_2\right)f_n^{(1)} + \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_1\omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1\left(\tilde\lambda_T^{(1)}\omega_1\,\mathrm{sh}(\omega_1) + \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_2\,\mathrm{ch}(\omega_1)\right)},$$

$$A_n^{(2)}(\xi) = \frac{e^{-\omega_1}\left(\tilde\lambda_T^{(1)}\omega_1 - \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_2\right)f_n^{(1)} + \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_1\omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1\left(\tilde\lambda_T^{(1)}\omega_1\,\mathrm{sh}(\omega_1) + \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_2\,\mathrm{ch}(\omega_1)\right)},$$

$$A_n^{(3)}(\xi) = \frac{-\tilde\lambda_T^{(1)}f_n^{(1)} - \tilde\lambda_T^{(1)}\omega_1\,\mathrm{sh}(\omega_1)f_n^{(2)} + \mathrm{ch}(\omega_1)f_n^{(3)}}{e^{-\omega_2}\left(\tilde\lambda_T^{(1)}\omega_1\,\mathrm{sh}(\omega_1) + \tilde\lambda_T^{(2)}\omega_2\,\mathrm{ch}(\omega_1)\right)}. \tag{15}$$

Легко переконатись, що знаменник у формулах (15) (визначник матриці систем (14)) не перетворюється у нуль при довільних додатних дійсних значеннях ω_1, ω_2, а тому за формулами (15) можна послідовно обчислити всі невідомі $A_n^{(1)}(\xi)$, $B_n^{(1)}(\xi)$, $A_n^{(2)}(\xi)$.

Розв'язок вихідної задачі (1)-(5) одержимо у вигляді ряду за поліномами Лагерра

$$T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) = \frac{\lambda}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\bar T_n^{(i)}(\xi,\zeta)e^{-i\xi\eta}d\xi\right]L_n(\lambda\tau). \tag{16}$$

Приймемо, що густина джерел тепла є сталою. Тоді

$$\bar q_n(\xi) = q^*\int_0^{+\infty}e^{-\lambda\tau}\left[\int_{v^*\tau-\tilde l}^{v^*\tau+\tilde l}e^{i\xi\eta}d\eta\right]L_n(\lambda\tau)d\tau = q^*\frac{2\sin(\xi\tilde l)}{\xi}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda-iv^*\xi)\tau}L_n(\lambda\tau)d\tau =$$

$$= q^*\frac{2\sin(\xi\tilde l)}{\xi}\left(\int_0^{\infty}e^{-\lambda\tau}\cos(v^*\xi\tau)\,L_n(\lambda\tau)d\tau + i\int_0^{\infty}e^{-\lambda\tau}\sin(v^*\xi\tau)\,L_n(\lambda\tau)d\tau\right) =$$

$$= q^*\frac{2\sin(\xi\tilde l)}{\xi}\left(y_{c,n}(\xi) + iy_{s,n}(\xi)\right). \tag{17}$$

Інтеграли $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$ у формулі (17) можна обчислити, проте зручніше використати те, що ці інтеграли є трансформантами за Лагерром від функцій $\cos(v^*\xi\tau)$ і $\sin(v^*\xi\tau)$ – розв'язків відповідних задач Коші:

$$\ddot y_c + x^2 y_c = 0,\qquad y_c(0) = 1,\qquad \dot y_c(0) = 0,$$

$$\ddot y_s + x^2 y_s = 0,\qquad y_s(0) = 0,\qquad \dot y_s(0) = x, \tag{19}$$

де $x = v^*\xi$.

Застосувавши до диференціальних рівнянь у (18) і (19) інтегральне перетворення Лагерра і врахувавши відповідні початкові умови, одержимо трикутні послідовності рівнянь

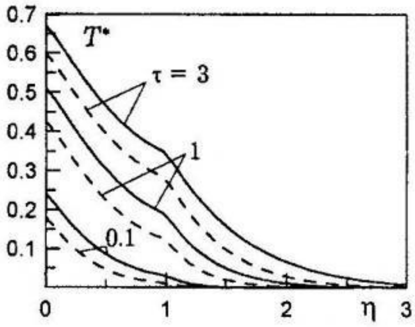
$$\lambda^2 \sum_{m=0}^{n} (n-m+1)\, y_{c,m} + x^2 y_{c,n} = \lambda(n+1)\,;\ \lambda^2 \sum_{m=0}^{n} (n-m+1)\, y_{s,m} + x^2 y_{s,n} = x\,.$$

Звідси випливають формули для визначення функцій $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$:

$$y_{c,n}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2 + (v^*\xi)^2}\left[\lambda(n+1) - \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1)\, y_{c,m}\right];$$

$$y_{s,n}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2 + (v^*\xi)^2}\left[v^*\xi - \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1)\, y_{s,m}\right].$$

За формулою (16) розраховано нестаціонарне температурне поле у неоднорідному тілі за таких значень вхідних параметрів: $\tilde{\lambda}_T^{(1)} = 1$, $\tilde{\lambda}_T^{(2)} = 0.162$, $\tilde{a}_1 = 1$, $\tilde{a}_2 = 0.131$, $\lambda = 1$, $\tilde{l} = 0.5$. У цьому випадку для забезпечення точності в межах 0.3% достатньо обмежетись тридцятьма членами ряду (16). На рисунку зображено залежність безрозмірної температури $T^* = T^{(1)}(1;\zeta;\tau_i)/q^*$ від глибини в різні моменти часу для двох значень безрозмірної швидкості v^*. Як видно з рисунка зі збільшенням часу температура півпростору збільшується інтенсивніше ніж температура шару, а зі збільшенням швидкості знижується як у шарі, так і у півпросторі.



1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишева – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С 3-7.

TRANSIENT TEMPERATURE FIELD IN LAYER-HALFSPACE SYSTEM DUE TO MOVING HEAT SOURCES

Olga Turchyn

Ivan Franko National University of L'viv

Trancient plane problem of heat conduction for nonhomogeneous body consisting of layer and halfspace is considered. The changing temperature field in such a body due to moving heat sources is determined using Laguerre polinomials method and integral Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.1999