ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
*Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 195–198 Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 195–198*

УДК 539.3

# КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ, ЩО РОЗМІЩЕНА НА ОПОРАХ

**Василь Шваб'юк*, Ярослав Максимович****

**Луцький державний технічний університет*

***Українська академія друкарства*

Розглянемо контактну задачу теорії пружності для смуги, розміщеної на двох лінійних опорах, навантаженої вздовж межі $y = 0$ жорстким параболічним штампом та довільно прикладеними в точці $(a_j, b_j)$ зосередженими силами $X_j$, $Y_j$. Приймемо, що дотичних напружень під штампом нема, штамп діє в області $a \le x \le b$. Продовжимо дослідження сингулярного інтегрального рівняння задачі та його розв'язків, побудованих у [1]. Особливу увагу приділимо проблемі врахування явища часткового відлипання основи штампа від смуги.

Для побудови інтегрального рівняння для визначення напружень і переміщень під штампом скористаємось формулою [3]

$$2G\left(u' + iv'\right) = (\chi + 1)\Phi(z) - \left[\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)\right] \quad \text{при } z \to x, \tag{1}$$

де $u' + iv' = \dfrac{\partial}{\partial x}(u + iv)$, $\Phi(z)$ – комплексний потенціал Мусхелішвілі, куди введені розв'язки типу Гріна; $G$ – модуль зсуву; $\chi$ – відомий параметр [3].

Проаналізуємо детально задачу, коли невідома ліва межа контакту (величина $a$). Для розв'язування задачі використаємо відомий підхід, в якому будемо задавати $a$, а сила $P$, що діє на штамп, приймемо як невідому. Інтегральне рівняння такої задачі запишемо у вигляді [1]

$$\int_a^b \sigma(\zeta)\left[K(x-\zeta) - \omega(x)\right]d\zeta + \Gamma = g_2(x), \tag{2}$$

де
$$\omega(x) = -\left[\frac{c-B}{B-A}F(x-A) + \frac{A-c}{B-A}F(x-B)\right],$$

$$g_2(x) = 2Gf'(x) - g(x) - \left[Y_A^0 F(x-A) + Y_B^0 F(x-B)\right],$$

$$K(x) = (\chi+1)\operatorname{Im}\Phi_2(x,0,0); \qquad F(x) = (\chi+1)\Phi_2(x,0,-H),$$

$$g(x) = (\chi+1)\operatorname{Im}\Phi_*(x); \quad f'(x) = \frac{df}{dx}; \quad \Gamma = -2G\varphi;$$

$$Y_A^0 = \frac{M + M_0 - BY_0}{B-A}; \qquad Y_B^0 = -\frac{M + M_0 - AY_0}{B-A}; \qquad Y_0 = \sum_{j=1}^{M} Y_j;$$

$$M_0 = \sum_{j=1}^{M}(-Y_j a_j - X_j b_j), \; c = (a+b)/2;$$

$(A,-H),(B,-H)$ – точки прикладання реакцій опор $Y_A, Y_B$ смуги; $f(x)$ – функція, якою описують основу штампа; $a, b$ – межі області контакту; $H$ – висота смуги; $\sigma(\zeta)=\sigma(\zeta,0)$ – невідомі контактні напруження під штампом, які повинні задовольняти умови

$$\int_a^b \sigma(\zeta)d\zeta = P\,,\quad \int_a^b (\zeta-c)\sigma(\zeta)d\zeta = M. \tag{3}$$

Застосувавши до рівняння (1) та другої умови (2) квадратурну формулу Лобатто [4], отримаємо замкнену систему рівнянь:

$$\sum_{n=1}^{N-1} B_{nj}u_n + \Gamma = g_{2j}, \qquad j=\overline{1,N-1};$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} L_n\left(x_n-c\right)u_n = M, \tag{4}$$

де

$$g_{2j}=g_2\left(x_j\right);\quad B_{nj}=L_n\left[K\left(x_j-\zeta_n\right)-\omega\left(x_j\right)\right];$$

$$x_j = l\eta_j + c\,,\quad \zeta_n = l\theta_n + c\,,\quad l=(b-a)/2\,,$$

$$\eta_j=\cos\pi\frac{j-0,5}{N-1},\ \ j=\overline{1,N-1};\qquad \theta_n=\cos\pi\frac{n-1}{N-1},\ \ n=\overline{1,N};$$

$$L_n=\frac{\pi}{N-1},\ \ n=\overline{2,N-1};\quad L_n=\frac{\pi}{2(N-1)},\ \ n=1,N.$$

Розв'язок задачі з двома наперед заданими межами контакту $a$ і $b$ шукаємо так само, як і в [1] – шляхом задання $a$ і знаходження методом половинного ділення відповідної їй величини $b$. Їх визначаємо з системи рівнянь (4) при початкових наближеннях для $b$ – величин $b_1$ і $b_2$.

Розрахунки засвідчують, що при великих площинках контакту штамп відстає від смуги у внутрішніх точках. У таких випадках межі області контакту стають невідомими, і їх визначають з умови обмеженості напружень.

Для спрощення розглянемо такий випадок, коли прикладне навантаження і форма штампа є симетричними (тобто $a=-b$, $A=-B$, $\varphi=0$), а штамп і смуга контактують в областях $(-b,-d)$, $(d,b)$. Рівняння (2) в цьому випадку набуде вигляду

$$\int_a^b \sigma(\zeta)\left[K(x-\zeta)+K(x+\zeta)\right]d\zeta - Pw(x) = g_2(x), \tag{5}$$

де прийнято, що напруження $\sigma(\xi)=\sigma(-\xi)$, якщо $-b<\zeta<-d$. Додатковою умовою для $\sigma(\xi)$ є умова

$$\int_a^b \sigma(\zeta)\,d\zeta = P/2.$$

Зазначимо, що у наведених вище формулах треба прийняти таке:

$$c=0\,,\ \ M=0\,,\ \ M_0=0\,,\ \ Y_0=0\,,\ \ g_2(x)=2Gf'-g(x),$$

$$\omega(x) = \frac{B}{B-A}\left[F(x-A) + F(x-B)\right]. \tag{6}$$

Розв'язання такої задачі зводиться до низки лінійних рівнянь, шляхом задання наперед величинами $d_i$, (які є в околі початку координат) і визначення відповідних їм величин $P$. Рівняння (5) зводиться до розв'язання системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N-1} C_{nj} u_n = g_{2j}, \qquad j = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

де $C_{nj} = L_n\left[K\left(x_j - \zeta_n\right) + K\left(x_j + \zeta_n\right) - 2\omega\left(x_j\right)\right]$.

Для визначення напружень у довільних точках межі смуги під штампом скористаємось співвідношеннями М.І. Мусхелішвілі [3], які (після застосування формули Племеля – Сохоцького) мають вигляд

$$\sigma\left(x_j, 0\right) = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi\left(x_j, 0\right) + \sigma\left(x_j\right), \tag{8}$$

де

$$\Phi\left(x_j\right) = \int_a^b \sigma(\zeta)\Phi_2(x-\zeta, 0, 0)\,d\zeta + Y_A\Phi_2\left(x_j - A, 0, -H\right) +$$

$$+ Y_B\Phi_2\left(x_j - B, 0, -H\right) + \Phi_*\left(x_j\right),$$

$$Y_A = \frac{c-B}{B-A}P + Y_A^0, \; Y_B = \frac{A-c}{B-A}P + Y_B^0.$$

Використовуючи інтерполяційну формулу, побудовану на основі поліномів Чебишова другого роду [4], контактні напруження під штампом можна записати в такому вигляді:

$$\sigma\left(x_j\right) = \frac{u(x_j)}{\sqrt{\left(x_j - a\right)\left(b - x_j\right)}}, \tag{9}$$

де $u(x_j) = \frac{(-1)^{j+1}}{N-1}\sin\left(\pi\frac{j-0,5}{N-1}\right)\cdot\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n u_n (-1)^n \frac{1}{\eta_j - \theta_n}$, $\varepsilon_n = 1$ при $n \neq 1, N$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_N = 0,5$.

На підставі розроблених алгоритмів дослідимо напружено-деформований стан смуги, розміщеної на двох опорах і навантаженої штампом параболічної форми. Основу штампа описує функція $f(x) = \delta + x^2/2R$. Опори розміщені симетрично відносно штампа на відстані $2l$ одна від одної. Тут позначено: $\delta$ – осадка штампа, $R$ – радіус кривини основи штампа. Результати розрахунків значень для безрозмірної величини $P^* = \frac{3}{4}\frac{lR}{GH^3}(\chi+1)P$

залежно від області контакту $\beta = a / l$ і відносної довжини $2l / H$ зведені в таблиці.

Залежність значення $P^*$ від $\beta = a/l$

| $\beta = a/l$ | 0.1 | 0.2 | 0.6 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|
| $2l/H = 2$ | 0.045 | 0.173 | 0.840 (0.840) | 1.225 (1.225) |
| $2l/H = 10$ | 0.890 | 1.138 | 1.995 (1.766) | 3.186 (2.781) |
| $2l/H = 20$ | 1.101 | 1.230 | 2.282 (2.004) | 3.990 (3.502) |
| Класична теорія | 1.111 | 1.250 | 2.500 (2.500) | 5.000 (5.000) |

Значення в дужках обчислені з урахуванням ефекту відлипання штампа від смуги.

Зазначимо, що значення $P^*$ для $2l/H = 20$ і $a/l = 0{,}03$; $0{,}1$; $0{,}6$ і $0{,}8$ з точністю до 0.1% збігаються з даними, наведеними в [2] для випадку плоского деформованого стану, якщо не враховувати ефект відлипання штампа від смуги при великих областях контакту. Водночас для малих областей контакту $\theta < 0.1$ значення $P^*$ збігаються для обох випадків.

1. *Гембара В. М., Максимович Я. В., Шваб'юк В. І.* Пружна рівновага смуги, навантаженої штампом та зосередженими силами // Наук. зап. Укр. акад. друкарства. Сер. природн. наук. – Львів, 1999. – Вип. 1. – С.129.
2. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 323 с.

## A CONTACT PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR THE STRIP DISPOSED UPON SUPPORTS LOADED

**Vasyl Shvabjuk*, Jaroslav Maxymovytsh****

* *Lutsk State Technical University*

** *The Ukrainian academy of a print*

A contact problem of elasticity theory for the strip disposed upon two supports loaded with rigid parabolic die and randomly concentrated a force is considered. There is an example of figure calculates.

Стаття надійшла до редколегії 11.01.2000