

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 57



Львівський національний університет імені Івана Франка

2000

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

В и п у с к 57

Видається з 1965 року

Львівський національний університет імені Івана Франка

2000

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2000. Випуск 57. 206 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mathematics and Mechanics. 2000. No. 57. 206 p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, postgraduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Лянце* (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; канд. фіз.-мат. наук, доц. *Ю. Головатий* (відп. секр.); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Горбачук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*.

Адреса редакційної колегії:

79002 Львів, вул. Університетська, 1, Львівський національний університет
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь

Тел. (0322) 79-45-93

E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Department of Mechanics and Mathematics,
Lviv National University, Universytetska 1, Lviv, 79002

Відповідальний за випуск *С. Лавренюк*

Редактор *Н. Плиса, М. Мартиняк*

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного
університету імені Івана Франка

ISSN 0201-758X

ISSN 0460-0509

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2000

УДК 539.3

ІСТОРІЯ КАФЕДРИ МЕХАНІКИ ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Георгій Сулим

Львівський національний університет імені Івана Франка

Сьомого грудня 1999 року сповнилося 60 років кафедрі механіки Львівського державного університету імені Івана Франка та 50 років від часу утвердження її наукової спеціалізації. У цій порі минуло також 255 років від заснування кафедри математики у Львівському університеті, 75 років від утворення тут математично-природничого та 60 років від виокремлення фізико-математичного факультету [10].

Загальні відомості. За дуже короткий час, який формально триває від 1939 р., а фактично від кінця наступного десятиліття, кафедра з невеликого щорічного набору 25 студентів (лише шість років – з 1960 по 1965 – набирали 50) та ще меншою кількістю викладачів (кафедри механіки завжди були нечисленними) підготувала когорту відомих світові механіків і математиків. Серед її випускників три академіки НАН України (В.В. Панасюк, Я.С. Підстригач, В.Л. Рвачов), чотири члени-кореспонденти НАН України (О.Є. Андрейків, Я.Й. Бурак, Г.С. Кіт, Д.Я. Петрина), член-кореспондент Російської АН І.І. Федик, чотири директори великих академічних та дослідних інститутів України та Росії (Я.С. Підстригач, В.В. Панасюк, Г.С. Кіт, І.І. Федик), три ректори університетів та інститутів (В.В. Божидарник, В.І. Тульчій, О.М. Шаблій), понад 50 докторів фізико-математичних, технічних, філософських та економічних наук.

Випускник фізико-математичного факультету, пізніше академік НАН України О.С. Парасюк отримав диплом математика, однак свій шлях у високу науку розпочав, захистивши тут свою першу дисертацію з механіки, довший час працюючи на кафедрі і навіть два роки завідуючи нею.

На кафедрі також тривалий час працювали і завідували нею віце-президент АН України, академік АН України Г.М. Савін, академік АН Киргизії М.Я. Леонов. У трудовій книжці член-кореспондента АН України К.Л. Ющенко (Рвачової) теж є короткий запис зі згадкою про роботу на кафедрі.

Загалом диплом механіка у 50 офіційних повноцінних випусках отримали 1118 фахівців. У середньому кафедра щорічно випускала 22 фахівці-механіки, разом з ними й одного майбутнього доктора наук. Якщо зважити, що на одного доктора наук припадає приблизно від 5 до 10 кандидатів наук, то серед випускників кафедри можна сподіватися 250–500 кандидатів наук.

При кафедрі механіки ще з 13 березня 1947 р. працює аспірантура (актуальна наукова спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла). З того часу у ній під керівництвом 13 провідних учених навчалося 93 аспіранти; 73 захистили кандидатські дисертації; 11 – докторські (чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук Г.С. Кіт, доктори технічних наук Д.В. Гриліцький, В.Б. Рудницький, доктор технічних і фізико-матема-

тичних наук *І.О. Прусов*, доктори фізико-математичних наук *Т.Л. Мартинович*, *О.М. Шаблій*, *Я.М. Кізіма*, *Б.Л.Пелех*, *О.П.Піддубняк*, *Г.Т. Сулим*, *Л.М. Зорій*). З-поміж викладачів кафедри підчас роботи на ній докторські дисертації захистили *М.П. Шереметєв*, *Н.П. Флейшман*, *Д.В. Грилицький*, *Т.Л. Мартинович*, *І.О. Прусов*, *Г.Т. Сулим*.

Перший російський підручник з теорії пружності, який став віхою у розвитку російської науки, на початку століття створив у Петербурзі та Києві видатний українець – *С.П.Тимошенко*. Аналогічний український підручник [1] видали вихованці кафедри механіки. Тому можна стверджувати, що кафедра є важливим науковим та освітнім осередком української механіки.

Коротка історія. Від середніх віків до початків нашого століття університетська механіка в усьому світі розвивалася у лоні математики. Часто визначний математик був водночас і визначним механіком, оскільки механіка живила та живить математику цікавими й практично важливими проблемами, підказуючи шлях до їхнього вирішення. Це стосується і *Архімеда*, і *К.Ф. Гаусса*, і *М.В. Келдиша* та багатьох інших видатних вчених.

До другої світової війни у програмі вивчення механіки та проведення відповідних наукових досліджень у Львівському університеті завжди переважав математичний аспект. Можна назвати славне ім'я професора *Лавріна Жмурка* (9.07.1824–3.04.1889), який увійшов в історію світової механіки як спеціаліст з теорії механізмів. Його прилади (конограф, циклоїдограф, інтегратор для графічного розв'язування інтегральних рівнянь) демонстрували у Відні (1873), Львові (1877), Парижі (1878) та англійському South Kensington'і (1878). У Львівському університеті у 1871–89 рр. він був керівником кафедри математики, деканом філософського факультету 1878/79 н.р. (навчального року), ректором 1885/86 н.р. та проректором університету 1886/87 н.р. У 1878 р. отримав звання почесного доктора університету. Викладаючи курси математичного аналізу і теоретичної механіки, він формулював принципи синтезу механізмів для викреслювання циклоїди, еліпса, гіперболи, параболи, розв'язування алгебричних рівнянь шостого степеня та ін.

Мар'ян Смолуховський, який прославився теоретичним поясненням температурного стрибка на межі «газ – тверде тіло» (1898) і створив теорію броунівського руху, теж займався проблемами механіки. На основі теорії стійкості Ейлера та рівняння Кірхгофа – Лява згину тонких пластин він досліджував питання складкоутворення гір (1909). Цікавили його й теорії міцності, зокрема теорія Мора (1909), механіка руйнування ґрунту від руху льодовика (1910). Усі ці роки він працював у Львівському університеті.

Поряд у Львівській школі політехнічній працювала відома польська школа інженерів-механіків у галузі машинобудування та будівельної механіки. Її вихованцем був славнозвісний *М.Т. Губер* – засновник багатьох напрямів сучасної механіки деформівного твердого тіла, який тривалий час, аж до 1928 р., тут працював. Зі Львова походять *Ріхард фон Мізес*, визначний австрійський механік, фундатор першого у Європі спеціалізованого наукового журналу з питань механіки та прикладної математики, відомий американський фахівець у галузі механіки руйнування *Альфред Фрейден-таль*. Усе це вагомо свідчить про те, що Львів став осередком бурхливого формування і розвитку своєї школи механіки цілком не випадково.

Коли 22 вересня 1939 р. о 15-й годині за московським часом після переговорів польське військове командування передало Львів військам СРСР, усі державні й недержавні установи отримали наказ негайно розпочати свою діяльність. Нова влада дуже швидко вдалася до перетворень університету за радянськими зразками. 7 грудня 1939 р. наказом № 84 було утворено дев'ять кафедр математично-природничого факультету і призначено їхніх завідувачів. Керівником новоствореної кафедри механіки (КМ – першої в історії Університету кафедри механічного спрямування) став відомий математик *Юліуш Павло Шаудер* – учень, а потім і близький співпрацівник С. Банаха, один із фундаторів функціонального аналізу. Основним його науковим результатом є співавторство разом з французьким математиком *Жаном Лере* у створенні відомого методу непорушної точки (Лере – Шаудера), за який у 1938 р. він отримав Великий міжнародний приз. Призначення не було випадковим. У 1936/39 навч. років *Ю.П. Шаудер* викладав в Університеті курс теоретичної механіки. Перед ним два роки цей курс читав *Л. Інфельд* та шість років з 1927/28 навч. рік – *С. Банах* (як механіку загальну, чи як механіку теоретичну). Він же видав відповідний підручник, яким потім (принаймні у Львівському університеті) користувалися всі польські викладачі. Теоретичну механіку викладали й інші знані математики, зокрема у першому та другому триместрах 1924/25 навч. рік – *Г. Штейнгауз*.

В останній день календарного 1939 року, наказом №101, було оголошено про комплектування кафедр викладачами. На КМ, крім згаданого завідувача, повинні були працювати в.о. професора *В.С. Міліянчук* – один з найвидатніших українських фізиків повоєнної доби, пізніше завідувач кафедри теоретичної фізики, асистент *Антін В. Раабе* (теж фізик) та асистент *Яків (П.) Мослер* (напевно теж фізик). Доля двох останніх автору невідома.

За німецької окупації Університет був закритий; 27 липня 1944 р. для Львова друга світова війна закінчилася і вже через тиждень (4.08.44) виїшов перший наказ по Університету, а 5 серпня за сприяння *Стефана Банаха* наказом №3 на посаду т.в.о. професора і керівника кафедри теоретичної механіки (КТМ), яка замінила КМ, призначили д-ра *В. Нікліборца*.

У резолюції на його заяві від 1 серпня щодо прийняття на роботу декан факультету *С. Банах* 4 серпня написав: «Пропоную назначити проф. *В.Нікліборца* професором і керівником кафедри теоретичної механіки, на місце розстріляного німцями професора *Шаудера*. Проф. *В. Нікліборц* є ученим світової слави і його праця на Льв. університеті принесе користь університетові і Радянській науці.» На цей час *В. Нікліборц* опублікував 23 наукові праці та 9 шкільних і вузівських підручників. 8 серпня 1944 р. на базі цієї кафедри в Університеті відкрили вже звичну для радянських університетів спеціалізацію «теоретична механіка». Оскільки педагогічне навантаження по університетській кафедрі у цей час було дуже малим, то, крім завідувача-сумісника *В. Нікліборца*, інших працівників не було. Він вважався чудовим лектором. Його наукове зацікавлення проблемами класичного математичного аналізу, теоретичної механіки (задача трьох тіл) та гідромеханіки відображене у 25 наукових працях.

З початку 1945 р. більшість польських професорів, й *В. Нікліборц*, переїхали на роботу до Польщі. Для вирішення кадрових проблем до роботи в

Університеті запрошено провідних науковців і педагогів Східної України, зокрема *Г.М. Савіна, М.Я. Леонова, Я.Б. Лопатинського, Б.В. Гнеденко, М.С. Комарова, О.С. Кованько, М.П. Шереметьєва.*

Проф. *Г.М. Савін* (вже з лютого 1945 р. член-кореспондент АН УРСР) з моменту заснування очолив Львівський відділ математичної теорії пружності та створену тут філію АН України. Згодом його затвердили завідувачем кафедри опору матеріалів Львівського політехнічного інституту, потім, 1.10.45, і завідувачем КТМ ЛДУ. *Г.М. Савін* організував наукові дослідження в галузі теорії пружності та динаміки машин і, що дуже важливо, відразу започаткував міські наукові семінари з механіки (1945–52), до роботи в яких залучив не лише науковців та викладачів *Л.Г. Афендіка, М.Я. Леонова, Ю.І. Лозового, М.П. Шереметьєва* та інших, а й здібну студентську молодь обох навчальних закладів. Ці семінари, які відбувалися спочатку в університетському корпусі на теперішній вул. Грушевського, пізніше в Інституті машинознавства і автоматики по вул. Коперніка (суботи з 11 до 13 год), відвідували потім відомі вчені *Я.Й. Бурак, Д.В. Грилицький, Т.Л. Мартинович, М.І. Калиняк, Г.С. Кіт, В.Ф. Кулько, Л.В. Онишко, О.С. Парасюк, В.В. Панасюк, Я.С. Підстригач, І.О. Прусов, В.Л. Рвачов, М.А. Саврук, В.І. Тульчій, Н.П. Флейшман* та ін. Так засновувалася **Львівська школа механіки.**

З нового 1946/47 навч. року *Г.М. Савін* розпочав утверджувати спеціалізацію «механіка». 16 вересня 1946 р. уперше в Університеті допущено до складання кандидатського іспиту за спеціальністю «теоретична механіка» (*М.Р. Артамонов*). 13 березня 1947 р. відкрито аспірантуру за фахом «теоретична механіка» і через відсутність на цей час львівських випускників-механіків 1 жовтня 1947 р. (за іншими даними 1 листопада) до аспірантури КТМ у проф. *Г.М. Савіна* зараховано ще довоєнного випускника Горьківського держуніверситету *П.Ф. Фікса*.

У 1948 р. *Г.М. Савін* став академіком АН України; 9.11.48 – ректором університету. У цей час (1948/49 навч. рік) на КТМ працювали завідувач кафедри, проф. *Г.М. Савін* і штатний працівник АН УРСР *М.Я. Леонов*, доц. *М.П. Шереметьєв* і асист. *О.С. Парасюк*.

В Університеті 8.11.1948 р. викладач КТМ одного з найбільших у країні Дніпропетровського державного університету (ДДУ) *Ю.О. Шевляков* захистив першу в його стінах кандидатську дисертацію за фахом «механіка» (фіз.-мат. науки) на тему «Дослідження згину коротких анізотропних балок». Згодом, 25.02.49, аспіранту *П.Ф. Фіксу* змінили спеціалізацію з теоретичної механіки на теорію пружності. Наступним аспірантом у цьому науковому напрямі, який вже безпосередньо вступав на цю спеціалізацію, став з 1.09.49 *М.І. Калиняк*.

17.09.1949 р. кандидатську дисертацію з механіки («Пластичні зони при концентрації напружень біля отворів») вперше захистив випускник факультету *О.С. Парасюк*, який залишився працювати в Університеті. Можна вважати, що з цієї датою наукова спеціалізація механіки в Університеті остаточно утвердилася.

Через рік (20.06.50) Раді ЛДУ дозволили приймати до захисту дисертації на ступінь доктора і кандидата фіз.-мат. наук за спеціальностями теорія пружності, теоретична механіка. 25.02.1952 р. захистив кандидатську дисер-

тацію аспірант КТМ ДДУ *В.І. Моссаковський* – майбутній академік АН України, довголітній ректор цього університету (опоненти – університетські викладачі *Я.Б. Лопатинський* та *О.С. Парасюк*). За свідченням академіка, він, як аспірант ДДУ, був фактично прикріплений в аспірантурі ЛДУ до *М.Я. Леонова* і навіть мешкав у нього.

1 червня 1949 р. КТМ розділили на дві: кафедру теорії пружності (КТП: завідувач кафедри проф. *Г.М. Савін* (0,5 ставки), виконуючий обов'язки (в.о.) доцента *О.С. Парасюк*, викл. *Д.І. Очеретенко*); КТМ: (в.о. завідувача кафедри доц. *М.П. Шеремет'єв*, в.о. проф., д-р. фіз.-мат. наук *М.Я. Леонов*, в.о. доц. *О.М. Костовський*, ас. *Н.П. Флейшман*). Лабораторії кафедр вже тоді мали прилади для тензометрування, якими опікувався *В.А. Базікайло*, та 50-тонну розривну машину. Пізніше КТМ завідували з 10.01.51 *О.С. Парасюк* і з 11.01.53 – *М.Я. Леонов*; КТП – з 1.09.52 *Н.П. Флейшман* і з 15.12.52 – *М.П. Шеремет'єв*.

Ці дві кафедри 20 січня 1955 р. знову злилися у одну КМ (завідувач *М.П. Шеремет'єв*), щоб 1 вересня 1963 р., із запровадженням нової спеціалізації «аеромеханіка високих швидкостей», знову розділитися на дві – кафедру теорії пружності і пластичності (КТПП: зав. *М.П. Шеремет'єв*, з 6.02.67 *Д.В. Гриліцький*) та кафедру загальної механіки і гідромеханіки (КЗМГ: зав. *Н.П. Флейшман*). 13 червня 1970 р. із закриттям нової спеціалізації і потребою у фахівцях прикладної математики КЗМГ стала кафедрою прикладної математики (зав. *Н.П. Флейшман*, потім *Я.Г. Савула*); КТПП стала надалі називатися КМ (зав. *Д.В. Гриліцький*, з 1.07.92 *Г.Т. Сулим*).

У 1951 р. вийшла з друку монографія *Г.М. Савіна* [14]. Про вагомість події можна судити з того, що вже наступного року автору присудили Державну премію. Потім її переклали на декілька іноземних мов. У 1968 р. вийшла нова удвічі більша книга «Распределение напряжений около отверстий», куди увійшло ще більше спільних результатів із львівськими учнями та послідовниками.

У 1984 р. була утворена філія кафедри механіки ЛДУ ім. І. Франка на базі Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка АН УРСР. Основним завданням філії кафедри механіки була цільова підготовка спеціалістів-механіків для вирішення питань, пов'язаних з напрямками «фізико-хімічна механіка матеріалів» та «корозія і захист металів від корозії»; провадження спільних наукових досліджень та участь у виконанні завдань міжвідомчих комплексних програм. Працівники філії вели також інтенсивні спільні наукові роботи, виконували госпдоговірні теми. У 1986 р. результати спільних наукових робіт професорів *О.Є. Андрейківа*, *Д.В. Гриліцького* та *Г.С. Кіта* були відзначені почесною премією АН УРСР ім. О.М. Динника. Робота у філії дала академіку *В.В. Панасюку* та члену-кореспонденту *О.Є. Андрейківу* звання соросівських професорів.

Першого вересня 1998 р. увійшов у дію опрацьований кафедрою новий навчальний план – підготовки бакалаврів механіки за двома традиційними спеціалізаціями. Завдяки зменшенню питомої ваги суспільних наук та широкого розуміння поняття гуманітарної підготовки у нову чотирирічну програму вдалося не лише майже повністю укласти попередній п'ятирічний «математичний» і «механічний» цикли навчальних дисциплін, а й суттєво розширити традиційно широкий обсяг комп'ютерної підготовки.

Наукова робота. Наукові зацікавлення працівників кафедри змінювалися залежно від потреб суспільства та логіки розвитку науки. У 50–60-х роках вивчали *концентрацію напружень* біля отворів у пластинах та оболонках, зокрема з урахуванням підкріплень, та розв'язували *змішані задачі* [14–16]. Наприкінці 50-х і у 60-х роках прийшло також зацікавлення *задачами кручення та осесиметричними контактними задачами* [5, 9]. З 1960 р. започаткована тематика *згину пластин та оболонок*, спричинена гострою виробничою потребою дослідженням міцності кінескопів.

Тематика *теорії тріщин* з'явилася на кафедрі у 1962 р. Під кінець десятиліття вона ускладнилася вивченням контактних задач теорії тріщин [6]. Розвивалися на кафедрі також *експериментальні дослідження у теорії тріщин та інших концентраторів напружень*. Метод фотопружності до визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень почали використовувати у 70-х роках. Уперше у колишньому Радянському Союзі тут почали застосовувати до визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень метод каустик, отриманих лазерним освітленням. Наприкінці 60-х років на кафедрі розпочато побудову *теорії тонких неоднорідностей*. У цю пору на кафедрі домінувало вивчення контактних задач теорії пружності й термopружності для ізотропних та анізотропних тіл [5–9].

Перша половина 70-х років позначилася на кафедрі інтенсивним розгортанням праць з *гідроакустики*; під кінець десятиліття з'явилося і зацікавлення *динамічними задачами теорії пружності*.

У половині 80-х років з ініціативи проф. Д.В. Гриліцького кафедра зацікавилася також *контактними задачами з урахуванням тепловиділення та спрацювання*, які мають велике практичне значення і становлять теоретичний фундамент трибології [4].

Інші наукові напрями, якими цікавляться викладачі і наукові працівники кафедри, такі: *концентрація напружень і руйнування поблизу масивних і тонких дефектів у термopружних середовищах*; *механіка композиційних матеріалів і неоднорідних структур*; *теорія дислокацій і точкових дефектів*; *дослідження динамічних напружень у кусково-однорідних тілах при локальних силових, теплових і комбінованих навантаженнях методом поліномів Чебишова – Лагерра*; *математичне моделювання і розвиток технології пневмоформування оболонок композиційних елементів конструкцій оптимальної геометрії*; *опрацювання технології виготовлення параболічних і параболоциліндричних концентраторів сонячної енергії*; *математичне моделювання зв'язаних процесів механо-термодифузії*; *числові методи розв'язування задач нелінійної теорії пружності і пластичності*; *дослідження постановок і числове моделювання крайових задач теорії пластичності*; *математичне моделювання геологічних процесів і структур*; *термінологія механіки*.

Велику увагу працівники кафедри приділяють науковій та навчальній роботі, вихованню нових поколінь кваліфікованих спеціалістів, створенню нової навчальної літератури. Лише за останні п'ять років кафедра брала участь в організації та проведенні шести конференцій, зокрема [11]. Видано українські підручники В.В. Божидарника, Г.Т. Сулима [1, 2] з теорії пружності, пластичності та міцності, монографії Д.В. Гриліцького та Ю.О. Пир'єва [4, 12, 13], англо-український словник А. Вовка [3] тощо [10].

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 950 с.
3. Вовк А. Англо-український словник вибраної лексики (природничі науки, техніка, сучасний побут) / О.Біланюк, О.Кочерга, Г.Сулим. – Нью-Йорк; Львів, 1998. – 277 с.
4. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: Наук. думка, 1996. – 204 с.
5. Гриліцький Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Изд-кое объединение «Вища школа» при ЛГУ, 1981. – 136 с.
6. Гриліцький Д. В., Луцишин Р. М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. – Львів: Вид-че об'єднання «Вища школа» при ЛДУ, 1975. – 115 с.
7. Гриліцький Д. В., Осів І. М. Задачі теплопровідності й термопружності для пластин. – Львів: Вид-че об'єднання «Вища школа» при ЛДУ, 1974. – 120 с.
8. Гриліцький Д. В., Попович Б. І. Плоскі контактні задачі термопружності. – Львів: Вид-че об'єднання «Вища школа» при ЛДУ, 1973. – 115 с.
9. Гриліцький Д. В., Шелестовський Б. Г. Осесимметричні контактні задачі термопружності. – Львів: Вид-че об'єднання «Вища школа» при ЛДУ, 1974. – 115 с.
10. Золота книга кафедри механіки (1939-1999) / Ред. Г.Сулим. – Львів: Львівський національний університет ім. Івана Франка, 1999. – 102 с.
11. Перший українсько-польський симпозіум «Змішані задачі механіки неоднорідних структур» (Львів – Шацьк, 14-19 вересня 1995 р.) / Гол. ред. Г.Т. Сулим. – Львів: Світ, 1997. – 117 с.
12. Пир'єв Ю. О. Поширення хвиль у пружних середовищах з урахуванням зв'язаності фізико-механічних полів. – Львів: Світ, 1998. – 204 с.
13. Пыр'ев Ю. А. Распространение волн в упругих средах с учетом связанности физико-механических полей. – М.: СИПРИА, 1998. – 206 с.
14. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. – М.-Л.: Гос. изд-во тех.-теор. л-ры, 1951. – 496 с.
15. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – К.: Наук. думка, 1964. – 384 с.
16. Шеремет'єв М. П. Пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Изд-кое объединение «Вища школа» при ЛГУ, 1960. – 258 с.

HISTORY OF CHAIR OF MECHANICS OF IVAN FRANKO LVIV NATIONAL UNIVERSITY

Georgij Sulym

Ivan Franko National University of L'viv

The aim of this paper is the short history of the founded on 1939 chair of mechanics from Ivan Franko Lviv national university. It was headed by famous mathematician Ju.P. Schauder, acad. G.N. Savin, acad. M.Ja. Leonov, prof. M.P. Scheremetiev, prof. D.V. Grylitskyj etc. Its graduates were 3 academicians of National Academy of Sciences of Ukraine and many another prominent persons in modern mechanics and mathematics.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.1999

УДК 539.3

МИХАЙЛО ПЕТРОВИЧ ШЕРЕМЕТЬЄВ

(до 95-річчя від дня народження)

Дмитро Хлебніков, Дмитро Гриліцький, Георгій Сулим

Львівський національний університет імені Івана Франка

Двадцять першого листопада 2000 року минає 95 років від дня народження відомого вченого в галузі механіки твердого деформівного тіла, доктора фізико-математичних наук, заслуженого діяча науки України, професора Львівського університету Михайла Петровича Шереметьєва.

Життєвий шлях. М. П. Шереметьєв народився 21 листопада 1905 року в селі Одинці Краснинського повіту колишньої Смоленської губернії у багатодітній селянській сім'ї. У нього було п'ять братів і дві сестри. Закінчивши у 1927 р. фізико-математичний факультет Смоленського університету, він працював два роки вчителем сільських шкіл у Смоленській та Брянській областях. У 1930 р. М. П. Шереметьєв закінчив вищі інженерно-педагогічні курси при Московському вищому технічному училищі ім. Баумана і до 1932 р. працював асистентом кафедри механіки Мінського хіміко-технологічного інституту. У цей час почали визначатись його наукові інтереси, він вступив до аспірантури при Білоруській академії наук за спеціальністю «теорія пружності».

Велике значення для формування наукового світогляду М. П. Шереметьєва мала його зустріч на Всесоюзному математичному з'їзді 1934 р. з видатним вченим-механіком академіком О. М. Динником. Невдовзі М. П. Шереметьєв перейшов до Дніпропетровська в цільову аспірантуру та включився до роботи наукового колективу під керівництвом акад. О. М. Динника. Тут і зав'язалися наукові стосунки М. П. Шереметьєва з учнями О. М. Динника – Г. М. Савіним, М. Я. Леоновим, Л. Г. Афендіком та ін.

У 1936 р. М. П. Шереметьєв захистив у Дніпропетровську дисертацію «Исследование оптическим методом концентрации напряжений около прямоугольных отверстий в бесконечных пластинках» і став кандидатом фізико-математичних наук. Уже перша наукова публікація М. П. Шереметьєва [1] відобразила його потяг до розв'язування практично важливих задач. Вона містила підсумок результатів роботи, виконаних у лабораторії оптичного методу кафедри теорії пружності Дніпропетровського університету на замовлення науково-дослідного сектора Дніпропетровського металургійного інституту.

Після захисту дисертації М. П. Шереметьєв у 1936 р. повернувся до Мінська і працював старшим науковим співробітником фізико-технічного інституту АН Білорусії, а з 1938 – доцентом кафедри теоретичної механіки Білоруського університету. Тоді ж він отримав і вчене звання доцента. Результати його наукових досліджень у ці роки були оформлені у вигляді двох статей [2, 3] для ювілейного збірника, присвяченого 20-річчю Білоруського університету. М. П. Шереметьєв повинен був зробити доповідь на математичній секції ювілейної наукової сесії – її було призначено на 23 червня 1941 р. Проте доповідь не відбулася – почалася війна, у вогні якої згоріли усі матеріали збірника.

У складі військ Південно-Західного та 3-го Українського фронтів М. П. Шереметьєв визволяв Україну. Під час прориву оборони ворога та форсування ріки Сіверський Донець поблизу м. Чугуєва на Харківщині його було важко поранено. За бойові подвиги М. П. Шереметьєв нагороджений орденом Богдана Хмельницького 3-го ступеня та медаллю. Воювали на фронтах також усі його брати і сестра: троє загинули, інші були поранені. Через поранення та контузію, яку М. П. Шереметьєв отримав під час переправи через Дніпро, його перевели на роботу викладача військової кафедри Київського університету, де працював від жовтня 1944 до серпня 1945 р., коли його демобілізували у військовому званні старшого лейтенанта.

Роботу у Львівському університеті М. П. Шереметьєв почав з 16 жовтня 1945 р. Спочатку на половину ставки доцента кафедри теоретичної механіки (КТМ), якою у той час керував член-кореспондент АН України, проф. Г. М. Савін, а з 17 листопада 1945 р. на додаткових півставки доцента кафедри геометрії. Одночасно М. П. Шереметьєв працював у Львівській філії інституту математики АН УРСР. З 1 вересня 1947 р. він мав уже повне педагогічне навантаження доцента КТМ.

У зв'язку з виділенням зі складу КТМ ще одної кафедри механічного спрямування – кафедри теорії пружності (КТП), завідування якою узяв на себе вже академік та ректор університету Г. М. Савін, М. П. Шереметьєва призначили з 1 червня 1949 р. виконувати обов'язки завідувача КТМ. Незадовго до цієї події (15 березня 1949 р.) він звільнився з АН УРСР, а в другій половині квітня 1949 р. його призначили деканом фізико-математичного факультету. З цієї посади М. П. Шереметьєв звільнився за власним бажанням 1 липня 1950 р., оскільки після наукової доповіді у Києві в АН УРСР у червні він отримав рекомендацію в докторантуру московського Інституту механіки (ІМ) АН СРСР. Після зробленої там у жовтні наукової доповіді та виступу в грудні на сесії АН УРСР 15 грудня 1950 р. М. П. Шереметьєва зарахували на посаду старшого наукового співробітника. Завідування КТМ перейняв доц. О.С.Парасюк.

Після повернення з докторантури 15 грудня 1952 р. М. П. Шереметьєва призначили в.о. завідувача КТП, а після захисту 25 червня 1953 р. на Раді ІМ АН СРСР докторської дисертації «Пластинки с подкрепленным краем» (науковий консультант – проф. Шерман Д. І.) він став професором та завідувачем цієї кафедри. 31 жовтня 1953 р. ВАК СРСР затвердив його у вченому званні професора, а 20 січня 1955 р. КТМ (на той час нею завідував проф. М. Я. Леонов) і КТП об'єднано у кафедру механіки (КМ) і її завідувачем призначено проф. М. П. Шереметьєва.

За визначні заслуги у розвитку науки та успіхи у підготовці наукових кадрів та у зв'язку з 300-річчям заснування Львівського університету 4 жовтня 1961 р. М. П. Шереметьєву та ще чотирьом кращим професорам університету присвоєно почесне звання заслуженого діяча науки УРСР.

Після чергового поділу у 1963 р. КМ на кафедру теорії пружності та пластичності (КТПП) та кафедру загальної механіки і гідромеханіки (КЗМГ), зумовленого запровадженням нової спеціалізації «аеромеханіка високих швидкостей», нові кафедри відповідно очолили проф. М. П. Шереметьєв та доц. Н. П. Флейшман. У 1964 р. проф. М. П. Шереметьєв захворів. Раптова і важка хвороба застала його у розквіті творчих сил. Він вперто боровся з хворобою, намагався працювати, проте це було надто важко. 1 березня 1966 р. йому довелося вийти на пенсію, передавши кафедру в руки

Д. В. Гриліцького і залишаючись професором-консультантом ще до 7 липня 1968 р., коли трудові стосунки професора з університетом остаточно були розірвані. М. П. Шереметьєв помер 27 липня 1973 р. Похований він у Львові на Личаківському меморіальному цвинтарі при дорозі, яка йде з лівого краю обабіч військового меморіалу. На його могилі встановлений пам'ятник роботи львівського скульптора Анатолія Галяна.

Наукова діяльність у Львові. З прибуттям у 1945 р. до Львова почався найяскравіший та плідний період наукової діяльності М. П. Шереметьєва. У цей час тут розгорнув діяльність Г. М. Савін (з лютого 1945 р. член-кореспондент АН УРСР, з 1948 р. – дійсний член АН УРСР), організувавши й очоливши роботу загальноміського науково-дослідного семінару з механіки, яким було закладено основи майбутньої львівської школи механіків. Під впливом Г. М. Савіна талановитий науковець почав займатись цікавими з математичного погляду і практично важливими задачами про підкріплення краю пластинок пружними елементами. Обидва вчені були тісно пов'язані ще довоєнною дружбою у Дніпропетровську та спорідненістю наукових зацікавлень.

Можна будувати різноманітні математичні моделі пластинки з підкріпленням. Якщо підкріплювальний елемент також має вигляд пластинки, тобто є достатньо широким, має сталу товщину і є симетричним стосовно серединної площини пластинки, то його напружено-деформований стан (НДС) поза деяким околom лінії з'єднання з пластинкою може бути описаний рівняннями плоскої теорії пружності або теорії згину тонких плит. Тому пластинку з широким підкріплювальним елементом можна вважати кусково-однорідною. Для вивчення НДС кусково-однорідної пластинки лініями зміни товщини або пружних властивостей у якій є концентричні кола, різні дослідники (С. Г. Міхлін, Г. М. Савін, Д. В. Вайнберг) використовували ефективний апарат комплексних потенціалів, розроблений для плоскої задачі теорії пружності Г. М. Колосовим і М. І. Мусхелішвілі та поширений на задачі згину пластинок А. І. Лур'є та С. Г. Лехніцьким.

Коли підкріплений край пластинки не є колом, виникають значні математичні труднощі. Для певного класу отворів та підкріплювальних кілець М. П. Шереметьєву вдалося їх подолати. Використовуючи апарат комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі та вдало поєднуючи метод інтегралів типу Коші з методом степеневих рядів, він уперше розв'язав [4–9] плоску задачу пружної рівноваги нескінченної пластинки з некруговим отвором, край якої підкріплений широким криволінійним кільцем з іншого матеріалу. Вважали, що область підкріплювального кільця відображається на кругове кільце, а область пластинки – на його зовнішність за допомогою єдиної раціональної функції. Наближений розв'язок задачі розтягу такої пластинки намічено у праці [6] та конкретизовано щодо еліптичного отвору в [7]. Повний та детальний розв'язок для важливого часткового класу відображувальних функцій викладений у праці [8]; загальний випадок раціональної функції розглянуто у [9], де, зокрема, вивчено підкріплені пластинки з еліптичним, трикутним та прямокутним отвором. Для цих випадків виконано конкретні розрахунки, наведено таблиці та графіки [1а, 10а]*. Плоска задача згину у її площині підкріпленої пластинки з еліптичним отвором

* Тут і надалі літературні посилання з літерою «а» стосуються бібліографічного списку А, з літерою «б» – списку Б.

розглянута у працях [4, 5, 9]. Розв'язок М. П. Шереметьєва [9] пізніше використав О. А. Бойм для дослідження плоскої деформації стисненої підкріпленої пластинки з еліптичним, склепистим або трапецоїдним отвором. Аналогічні задачі поперечного згину підкріплених пластинок з некруговим отвором уперше розв'язано у працях [10, 15, 17].

Застосовуючи подібну методику, М. П. Шереметьєв [14] навів ефективний розв'язок плоскої задачі про пружну рівновагу конфокального еліптичного кільця. Про потребу розв'язання цієї задачі неодноразово писав М. І. Мусхелішвілі у перших виданнях відомої монографії [18а], оскільки розв'язок цієї задачі А. Timpe (Math. Zeitschr., 1923, Bd. 17, S. 189 – 205) виявився помилковим. Пізніше А. І. Каландія (ПММ, 1953, т. 17, вип. 6) розв'язав аналогічну задачу згину пластинки, звідки розв'язок плоскої задачі на основі аналогії зі згином пластинок Кірхгофа – Лява впливав як наслідок. Вважаючи отриману ним нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь простішою від отриманої у [14], автор висловив необгрунтовані критичні зауваження стосовно [14]. Проте В. О. Ліхачов (ПММ, 1955, т. 19, вип. 2) спростував їх, показавши, що систему А. І. Каландія легко отримати методом М. П. Шереметьєва. Пріоритет М. П. Шереметьєва і висока вартість його наукового здобутку були широко визнані [13а, 18а, 26а, 28а], у тому числі й А. І. Каландія [31а, 32а]. Згодом методика праці [14] дала змогу отримати В. О. Ліхачову під керівництвом М. П. Шереметьєва розв'язок для двозв'язних областей, які відображаються на кругове кільце раціональною функцією, зокрема, дослідити задачу для конфокального еліптичного кільця та кільця з внутрішнім контуром у вигляді криволінійного квадрата. У монографії [30] цим методом розв'язано плоску задачу для нескінченної пластинки з двома неоднаковими круговими отворами.

Якщо підкріплювальний елемент є вузьким або має фасонний профіль, то його можна трактувати як пружну лінію. Тоді його НДС описує теорія малих деформацій тонких криволінійних стрижнів. Граничні умови плоскої задачі у випадку такого підкріплення криволінійного краю пластинки вперше сформулював М. П. Шереметьєв у працях [12, 16]. Для прикладу тут розглянуто розтяг ізотропної [12, 16] та анізотропної [16] підкріпленої пластинки з круговим отвором. Порівняно дві моделі підкріплювального кругового кільця – кільця-пластинки [1а] і тонкого кільця [16], показано їхню узгодженість. Зазначено [16], що для тонких кілець вплив жорсткості кільця на згин є незначним, і тому кільце можна розглядати як пружну лінію, що сприймає лише розтяг. Для таких кілець (їх названо безмоментними) Н. П. Флейшман сформулював граничні умови безпосередньо у комплексних потенціалах Колосова – Мусхелішвілі. Однак розглядати підкріплювальне кільце як безмоментне можна не завжди. У праці [19], яку виконував також Н. А. Дорош, досліджено дію зосередженої сили на підкріплений край пластинки з круговим отвором. Граничні умови М. П. Шереметьєва використано у виконаних під його керівництвом роботах О.М.Кулика, К. М. Русинка, М. Ю. Швайка, Ю. І. Койфмана під час розв'язування деяких інших плоских задач для пластинок з підкріпленням. Д. Г. Хлебніков вилучив з граничних умов М. П. Шереметьєва невідомі функції, що характеризують навантаження та деформації підкріплювального тонкого кільця, яке працює на згин і розтяг, та сформулював для комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі граничну задачу, що узагальнює головні задачі плоскої теорії пружності. Ці результати отримали подальший розвиток у

працях Н. П. Флейшмана та Ж. В. Старовойтенко. Плоску задачу для нескінченної пластинки, у круговий отвір якої впаяно нескінченний або скінченний пружний циліндр, вивчав В. О. Ліхачов [27, 56].

У задачах поперечного згину пластинки з криволінійним отвором, край якої підкріплений тонким пружним кільцем, що моделюється пружною лінією, яка працює на згин та кручення, М. П. Шереметьєв також уперше сформулював [11, 15] граничні умови. У праці [11] ці умови стосуються випадку однакових жорсткостей кільця на згин та кручення; у [20] цих обмежень немає. На підставі одержаних граничних умов у публікаціях [15, 20] розв'язано задачу згину ізотропної та анізотропної нескінченної підкріпленої пластинки з круговим отвором. Подібна задача незалежно та іншим методом була розв'язана Н. П. Флейшманом. Для розв'язання аналогічної задачі згину пластинки з еліптичним отвором М. П. Шереметьєв [17, 26] розробив метод послідовних наближень та довів збіжність процесу в середньому квадратичному на контурі підкріплення. У праці [21], що була надіслана до друку пізніше від [26], а вийшла у світ раніше, ця ж задача розв'язана дещо інакше. Тут метод послідовних наближень застосовано після перетворення граничних умов. Таким же способом Т. Л. Мартинович дослідив задачу про підкріплення пластинок з трикутним або квадратним отвором. Узагальнюючи цей підхід та використовуючи методику М. П. Шереметьєва [14], він розв'язав задачу про згин пластинки у вигляді конфокального еліптичного кільця з підкріпленими краями. Згодом М. П. Шереметьєв та Т. Л. Мартинович [36] розглянули також задачу згину підкріпленої по краях пластинки, що обмежена двома ексцентричними колами. Н. П. Флейшман і О. В. Марковська розв'язали задачі згину підкріплених пластинок з криволінійними отворами, для яких модуль відображувальної функції є раціональною функцією. Цього обмеження уникнули Т. Л. Мартинович та І. О. Ніщенко, записавши граничні умови в інтегральній формі. Такий запис узагальнили для несиметрично підкріплених анізотропних пластинок Т. Л. Мартинович і В. В. Божидарник. Це дало їм змогу побудувати відповідні нескінченні системи лінійних алгебричних рівнянь і довести до числа та графіків низку складних задач. Трохи раніше граничні умови у звичній формі для несиметричного підкріплення пластинки ізотропним ребром записали Н. П. Флейшман і Л. Й. Ощипко. Вони вивчали також задачі згину пластинок з опорним підкріплювальним ребром, дослідивши детально низку задач для підкріплених пластинок з круговим ребром.

Т. Л. Мартинович і В. І. Тульчий дещо уточнили формулювання М. П. Шереметьєвим задачі про підкріплення краю пластинки тонким криволінійним стрижнем, записавши умови з'єднання стержня з пластинкою не уздовж осі стрижня, а на реальній лінії контакту.

Аналіз задач про підкріплення пластинок, зокрема, узагальнення формул, що пов'язують моменти у кільці з моментами у пластинці на лінії їхнього з'єднання [15, 17], дали змогу запровадити у праці [23] корисне поняття інваріантів напруженого стану кусково-однорідних тіл, що безперервно змінюються під час переходу через лінію або поверхню розмежування пружних властивостей тіла.

Плоску задачу та задачу згину пластинки у вигляді півплощини, край якої підкріплений тонким пружним стрижнем, методом комплексних потенціалів розв'язав А. А. Галасі [86]. Однак природнішим для задач такого типу є метод інтегралів Фур'є, який дав змогу розв'язати задачу як для пів-

площини [22], так і для смуги з підкріпленням краєм [33, 46]. Низку таких задач, включаючи ортогональне з'єднання пластинок, розв'язав Д. Г. Хлебніков [106]. Т. Л. Мартинович та В. Є. Юринець [41a] узагальнили цей підхід на випадок неоднорідних пластинок з несиметричним підкріпленням.

Обернену задачу визначення жорсткостей підкріплювального кільця, яке дає змогу повністю усунути концентрацію напружень (еквівалентного кільця), якщо задано форму отвору в пластинці та головний напружений стан пластинки без отвору, уперше поставив Н. П. Флейшман. Він же розв'язав цю задачу для згину пластинок, знайшовши у багатьох випадках згину ізотропних та анізотропних пластинок з отворами різної форми прості формули для жорсткостей еквівалентних кілець. Під його керівництвом М. Ю. Швайко розв'язав плоску задачу про еквівалентне підкріплення скінченної прямокутної пластинки з круговим отвором за її розтягу. Однак розв'язок задачі про еквівалентне підкріплення пластинки існує не завжди. М. П. Шереметьєв [30] запропонував інший підхід до задачі про оптимальне підкріплення пластинки. Дві характеристики жорсткості оптимального кільця він пропонував знаходити з умов, щоб середнє квадратичне відхилення уздовж лінії підкріплення між складовими напружень і переміщень у суцільній, не ослабленій отвором та оптимально підкріпленій пластинках, дорівнювало нулю. За такого формулювання задача завжди має розв'язок, причому відшукані раніше Н. П. Флейшманом жорсткості еквівалентних кілець, одержуються і за такого підходу [30].

М. П. Шереметьєв та І. О. Прусов [18] сформулювали і розв'язали плоску задачу про часткове підкріплення краю еліптичного отвору в нескінченному середовищі двома або чотирма жорсткими накладками, що з'єднані між собою двома попередньо стисненими вертикальними стрижнями. Зусилля у стрижнях невідомі. Задачу сформульовано як ускладнену змішану задачу плоскої теорії пружності і розв'язано методом лінійного спряження. Пізніше І. О. Прусов урізноманітнив формулювання цієї задачі та розв'язав її для еліптичного, квадратного і прямокутного отворів. Усі ці розв'язки наведені в монографії [26a]. Такі задачі є важливими для гірничої справи стосовно розрахунку тиску на підкріплювальні стояки в отворах, а також для визначення напружень у цілику між двома отворами камерного типу.

У праці [13] розглянуто плоскі задачі контакту нескінченної пластинки з вкладеною у її круговий отвір абсолютно жорсткою чи пружною шайбою того ж діаметра, якщо пластинка розтягується або у центрі шайби прикладено зосереджену силу. Пружні властивості пластинки та шайби є різними, тертя між ними нема, зона контакту наперед невідома. Задачі зведено до сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь типу Прандтля стосовно контактного тиску. Ці рівняння, відповідно, зведені до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Одночасно та іншим шляхом В. В. Панасюк розв'язав задачу про тиск жорсткої шайби на межу кругового отвору пластинки. Д. В. Гриліцький дослідив випадок анізотропної пластинки. У статті [31], яку написано на підставі доповіді [28], запропонований метод безпосереднього розв'язування рівняння типу Прандтля, яке зведено до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів розвинення шуканої функції. Подальші найповніші дослідження контактних задач для областей з коловими межами належать В. В. Панасюку і М. Й. Теплому та викладені в монографіях [36a, 37a, 40a]. Вони ж містять огляд інших праць цієї проблематики.

Основоположні результати, отримані М. П. Шереметьєвим для пластинок з підкріпленням краєм, відображені у монографії [30]. У ній також описані важливі і цікаві дослідження контактних задач [13, 17, 18, 31].

М. П. Шереметьєв добре розумів велике значення зв'язку наукових досліджень з виробництвом, впровадження наукових розробок. Він у 1958–59 рр. організував та очолив великий господарський договір з електроламповим заводом для з'ясування причин браку під час виготовлення металоскляних кінескопів. До роботи, крім працівників, аспірантів та студентів кафедри механіки, були залучені науковці фізико-механічного інституту АН УРСР, поліграфічного інституту, а також деякі математики (С. П. Гавелля, З. О. Мельник та інші). Обчислення спочатку виконували на клавішних та електромеханічних арифмометрах. Пізніше, після придбання у 1959 р. університетом (у тому числі за договірні кошти) першої на теренах Західної України електронно-обчислювальної машини, – на ЕОМ Урал-1. Це був перший господарський договір університетської кафедри з виробничим підприємством. Його було успішно виконано: внаслідок проведених досліджень і запропонованих на їхній підставі рекомендацій брак екранів кінескопів значно зменшився. Коли про результати досліджень доповідали у Києві та Москві, то це викликало щире захоплення. Частина цих досліджень опублікована [29, 32, 34, 15а]. Була підготовлена монографія з розрахунку, аналізу технології виготовлення, оптимізації конструктивних параметрів і технологічних режимів для круглих металоскляних кінескопів (автори М. П. Шереметьєв, Я. С. Підстригач, С. Я. Ярема, Д. Г. Хлебніков), проте з технічних причин вона надрукована. Надалі роботи у цій галузі успішно продовжені та суттєво розвинуті послідовниками та учнями М. П. Шереметьєва.

Розрахунок оболонок кінескопів стимулював інтерес М. П. Шереметьєва до теоретичних досліджень у теорії пружних оболонок. У працях [35, 37, 40] він запропонував свій підхід до введення функцій напружень у класичній теорії оболонок. М. П. Шереметьєв [38–45, 47, 48] одержав важливі результати в теорії оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву (теорія типу Тимошенка). Питання побудови співвідношень нерозривності у цій теорії він вперше поставив у праці [38]. Їхній остаточний варіант описаний у [43, 44]. Прикладна теорія пластин з урахуванням деформацій зсуву, дещо загальніша від викладеної у [43], запропонована у статті [45]. Деякі задачі в рамках цієї теорії розглянуто у [47, 48], зокрема, підкріплення краю такої пластинки тонким податним на зсув кільцем вивчали Б. Л. Пелех та Д. Г. Хлебніков. Подальші результати у теорії оболонок типу Тимошенка отримали учні М. П. Шереметьєва – Б. Л. Пелех та Є. І. Лунь.

Наукові праці М. П. Шереметьєва високо оцінили спеціалісти в Україні [2а, 12а, 15а–17а, 23а–27а, 30а, 34а, 36а, 38а–43а], колишньому Радянському Союзу [1а, 13а, 18а–22а, 28а, 29а, 31а–33а, 37а] та за кордоном [10а]. Учений систематично отримував персональні запрошення на всесоюзні та міжнародні конференції, на багатьох з них ([28, 35, 44, 46] та ін.) виступав з доповідями. Зокрема, запрошення на міжнародний симпозіум у Тбілісі [46], де зібралися провідні вчені-механіки з усього світу, він отримав особисто від акад. М. І. Мусхелішвілі.

Працюючи професором кафедри механіки Львівського університету, М. П. Шереметьєв викладав усі головні курси – теоретичну механіку, опір матеріалів, теорію пружності, будівельну механіку тощо, різноманітні спец-

курси, вів спецсемінари. Підготував і опублікував навчальні посібники з теорії пружності та теорії оболонок [38–42].

За час багаторічної науково-педагогічної діяльності М. П. Шереметьєв виховав численний загін спеціалістів, зробив вагомий внесок у підготовку молодих наукових кадрів та у формування наукового потенціалу Львівської школи механіків. Випускники кафедри механіки створили основу наукових колективів з механіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львівського національного університету, Державного університету «Львівська Політехніка», Лісотехнічного університету. Академії друкарства та інших вузів м. Львова і Західного регіону України. Багато колишніх студентів М. П. Шереметьєва працює у наукових установах та вузах міст Києва, Харкова, Дніпропетровська, Запоріжжя, Хмельницького, а також Росії, Білорусі, Польщі та інших країн.

М. П. Шереметьєв постійно працював з аспірантами, молодими науковцями. Його учнями є сьогоднішні доктори фізико-математичних наук Т. Л. Мартинович, М. Д. Мартиненко, Б. Л. Пелех, І. О. Прусов, В. І. Тульчій, кандидати наук О. А. Бойм, А. А. Галасі, В. М. Гнатиків, С. А. Грач, О. М. Кулик, А. М. Куземко, В. О. Ліхачов, Є. М. Лунь, Д. Г. Хлебніков.

Упродовж багатьох років М. П. Шереметьєв реферував статті з механіки вітчизняних та зарубіжних авторів для серії «Механика» відомого у світі «Реферативного журналу» ВИНІТИ АН ССРСР.

Учений провадив велику науково-організаційну роботу. У 1957–1959 рр. він був членом редколегії київського журналу «Прикладна механіка» (вид-во АН УРСР), у 1960 – 1964 рр. брав діяльну участь у виданні цього журналу, був членом редколегій усіх видань з фізико-математичних наук у Львівському університеті, членом Ученої ради фізико-математичного та механіко-математичного факультетів, опонентом кандидатських дисертацій Ю. А. Шевлякова, Є. Ф. Імшенецької, В. В. Панасюка, Д. В. Гриліцького, Я. С. Підстригача, В. Л. Рвачова, В. С. Скворцова, К. С. Дейнеко, К. І. Чумака, М. О. Ігнат'єва, Г. М. Гестрина, С. П. Гавелі, М. Ю. Швайка, Б. М. Лозового, П. М. Витвицького, З. О. Мельника, М. Д. Мартиненка та ін.

За високу принциповість, великі вимогливість, працелюбність та цілеспрямованість М. П. Шереметьєва глибоко поважали. Він залишився у нашій пам'яті як видатний вчений, педагог, вихователь молоді, порядна, мужня, чесна та вольова людина.

Звертаючи свій погляд у 40–60 роки, коли були закладені підвалини Львівської наукової школи механіків, з вдячністю згадуємо професора Михайла Петровича Шереметьєва, одного з фундаторів цієї школи, творчі ідеї якого стали надбанням широкого загалу дослідників. Упевнені, що вони будуть животворним джерелом натхнення та прикладу для багатьох поколінь учених-механіків.

Автори щиро вдячні проф. О. А. Гусаку за інформацію про долю праць [2, 3], проф. М. Ю. Швайко, доц. Ю. В. Позняку за сприяння у пошуку та отриманні цих відомостей, проф. О. П. Піддубняку за повідомлення про статті [3а, 4а, 6а–9а].

Список наукових праць М. П. Шереметьєва

1. Определение напряжений в раме прошивного стана / А. М. Ершов, М. П. Шереметьев // Теория и практика металлургии. – 1938. – № 3. – С. 39–43. – Библиогр.: 4 назв.
2. Теорема существования плоской задачи для областей с угловыми точками // Науч. зап. Белорусского гос. ун-та. Юбилейный сборник к 20-летию БГУ. – 1941. (Збірник втрачений під час війни та не вийшов у світ).
3. Растяжение бесконечной пластинки, ослабленной прямоугольным отверстием // Там же. – 1941.
4. Чистий згин полоси (балки), ослабленої еліптичним отвором з впаяним в цей отвір еліптичним кільцем // Доп. та повідомл. Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка. – 1947. – Вип. 1. – С. 145.
5. Чистий згин полоси (балки), ослабленої еліптичним отвором з впаяним в цей отвір еліптичним кільцем або шайбою // Наук. зап. Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка. Сер. фіз.-мат. – 1947. – Т. 5, вип. 2. – С. 150–161. – Бібліогр.: 1 назв.
6. Розтяг безконечної пластинки з впаяним кільцем певного класу // Доп. АН УРСР. – 1948. – № 1 – С. 63–66. – Бібліогр.: 1 назв.
7. Розтяг безконечної пластинки з впаяним еліптичним кільцем // Там же. – С. 67–72. – Бібліогр.: 2 назв.
8. Влияние упругого кольца, впаянного в криволинейное отверстие, на однородное напряженное плоское поле // Укр. мат. журн. – 1949. – № 3. – С. 68–80. – Библиогр.: 3 назв.
9. Растяжение бесконечной пластинки с впаянным кольцом, область которого вместе с областью пластинки отображается на круг при помощи рациональной функции // Наук. зап. Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка. Сер. фіз.-мат. – 1949. – Т. 12, вип. 3. – С. 105–130. – Бібліогр.: 3 назв.
10. Згин тонких плит, ослаблених криволінійним отвором, край якого підкріплений пружним кільцем // Доп. АН УРСР. – 1949. – № 4. – С. 3–10. – Бібліогр.: 4 назв.
11. Згин анізотропних і ізотропних плит, ослаблених отвором, край якого підкріплений пружним тонким кільцем // Там же. – 1950. – № 6. – С. 437–442. – Бібліогр.: 3 назв.
12. Пластика, край якої підкріплений тонким пружним кільцем сталого перерізу // Там же. – 1952. – № 1. – С. 62–69. – Бібліогр.: 4 назв.
13. Упругое равновесие бесконечной пластинки с вложенной абсолютно жесткой или упругой шайбой // Прикл. математика и механика. – 1952. – Т. 16, вып. 4. – С. 437–448. – Библиогр.: 4 назв.
14. Упругое равновесие эллиптического кольца // Там же. – 1953. – Т. 17, вып. 1. – С. 107–113. – Библиогр.: 3 назв.
15. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5, № 1. – С. 58–79. – Библиогр.: 6 назв.
16. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием // Инженерный сб. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – Т. 14. – С. 81–100. – Библиогр.: 4 назв.
17. Пластики с подкрепленным краем: Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Львов, 1953. – 23 с. (Институт механики АН СССР). Библиогр.: 13 назв.
18. Визначення тиску на підкріплюючі стержні всередині отвору нескінченної пластинки при її розтягу в двох напрямках / М. П. Шереметьєв, І. О. Прусов // Прикл. механіка. – 1955. – Т. 1, вип. 4. – С. 378–390. – Бібліогр.: 3 назв.
19. Действие сосредоточенной силы на подкрепленный край круглого отверстия бесконечной пластинки // Инженерный сб. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 24. – С. 127–138. – Библиогр.: 1 назв.

20. Деякі питання згину пластинок з підкріпленням / М. П. Шереметєв, В. І. Тульчий // Питання механіки і математики: Наук. зап. Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка. Сер. мех.-мат. – 1957. – Т. 44, вип. 8. – С. 29–39. – Бібліогр.: 5 назв.
21. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем / М. П. Шереметєв, Т. Л. Мартинович // Прикл. механіка. – 1957. – Т. 3, вип. 2. – С. 140–146. – Бібліогр.: 3 назв.
22. Упругое равновесие полуплоскости с подкрепленным краем / М. П. Шереметєв, Д. Г. Хлебников // Доп. та повідомл. Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка. – 1957. – Вип. 7, ч. 3. – С. 286–292. – Библиогр.: 5 назв.
23. Некоторые инварианты напряженного состояния неоднородных анизотропных тел / М. П. Шереметєв, Н. П. Флейшман // Теор. и прикл. математика. – 1958. – Вып. 1. – С. 184–190. – Библиогр.: 6 назв.
24. Рец.: [Рецензія] / М. П. Шереметєв, Д. В. Грилицький // Прикл. механіка. – 1958. – Т. 4, вип. 4. – С. 471–472.
Рец. на кн.: Лехніцкий С.Г. Анизотропные пластинки: Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
25. Ред.: Грач С.А. Теоретическое и экспериментальное исследование некоторых задач изгиба и растяжения пластинок с ребрами жесткости / Ред. М. П. Шереметєв. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1958. – 107 с. – Библиогр.: 89 назв.
26. Изгиб бесконечной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием, край которой подкреплен тонким кольцом // Инженерный сб. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – Т. 25. – С. 51–63. – Библиогр.: 2 назв.
27. Ред.: Ліхачов В. О. Деформація пружної безмежної пластинки з впаєм циліндром / Відп. ред. М. П. Шереметєв. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1959. – 24 с. – Бібліогр.: 14 назв.
28. Решение уравнения некоторых контактных задач теории упругости (уравнения типа Прандтля) // Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннотации докл. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – С. 242.
29. Пружна рівновага пологої оболонки, прямокутної в плані / М. П. Шереметєв, Д. В. Грилицький // Прикл. механіка. – 1960. – Т. 6, вип. 1. – С. 109–113. – Бібліогр.: 5 назв.
30. Пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с. – Библиогр.: 53 назв.
31. Решение уравнения некоторых контактных задач теории упругости (уравнение типа Прандтля) // Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 508–526. – Библиогр.: 5 назв.
32. Подбор оптимальной формы круглого металло-стеклянного кинескопа / М. П. Шереметєв, С. Я. Ярема, Д. Г. Хлебников // Вопр. машиноведения и прочности в машиностроении: Науч. зап. ин-та машиноведения и автоматики АН УССР. – 1961. – Т. 7, вып. 7. – С. 96–109. – Библиогр.: 2 назв.
33. Згин нескінченної смуги з підкріпленням краєм / М. П. Шереметєв, Д. Г. Хлебников // Прикл. механіка. – 1961. – Т. 7, вип. 2. – С. 212–216. – Бібліогр.: 5 назв.
34. Загальний розв'язок рівнянь рівноваги пологих оболонок, прямокутних в плані / М. П. Шереметєв, Т. Л. Мартинович, О. М. Кулик // Наук. зап. Укр. поліграф. ін-ту ім. І. Федорова. Сер. мех.-мат. – 1961. – Т. 13. – С. 3–8. – Бібліогр.: 4 назв.
35. К вопросу о функциях напряжений в теории оболочек // Теория пластин и оболочек: Труды // Всес. конф., Львов, 15–21 сент. 1961 г. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – С. 109–110. – Библиогр.: 2 назв.
36. Згин пластинки з підкріпленням краєм, область якої обмежена двома колами або колом і прямою / М. П. Шереметєв, Т. Л. Мартинович // Питання механіки і математики. – Львів, 1962. – Вип. 9. – С. 48–54. – Бібліогр.: 2 назв.

37. До питання про функції напружень в теорії оболонок // Там же. – С. 111–120. – Бібліогр.: 2 назв.
38. Теория деформаций (лекция № 1 по курсу теории упругости). Мех.-мат. факультет. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1962. – 60 с.
39. Теория напряжений (лекция № 2 по курсу теории упругости). Мех.-мат. факультет. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1962. – 59 с.
40. Теория напряжений в оболочках (лекция № 3 по курсу теории упругости). Мех.-мат. факультет. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1962. – 20 с.
41. Работа деформаций. Упругий потенциал. Соотношения между напряжениями и деформациями (лекция № 4 по курсу теории упругости). Мех.-мат. факультет. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1962. – 34 с.
42. Соотношения упругости в тонких оболочках (лекция № 5 по курсу теории упругости). – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1963. – 22 с.
43. До питання про варіаційні принципи в теорії оболонок / М. П. Шереметьєв, Б. Л. Пелех // Теор. і прикл. математика. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1963. – Вип. 2. – С. 68–86. – Бібліогр.: 7 назв.
44. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек / М. П. Шереметьєв, Е. И. Лунь // Теория оболочек и пластин: Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 24–31 окт. 1962 г. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. – С. 991–996. – Библиогр.: 6 назв.
45. К построению уточненной теории пластин / М. П. Шереметьєв, Б. Л. Пелех // Инженерный журнал. – 1964. – Т. 4, вып. 3. – С. 504–509. – Библиогр.: 6 назв.
46. Определение напряженного состояния тавровых и двутавровых балок методами плоской задачи теории упругости // Приложения теории функций в механике сплошной среды: Тр. междунар. симпозиума в Тбилиси, 17–23 сент. 1963 г. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – С. 340–351. – Библиогр.: 8 назв.
47. О некоторых итогах исследования влияния деформаций сдвига на изгиб пластин / М. П. Шереметьєв, Б. Л. Пелех, Д. Г. Хлебников, О. П. Дячина // Тез. докл. на Всесоюз. конф. по статике и динамике тонкостенных пространственных конструкций. 21–25 марта 1967 г. – К., 1967. – С. 89.
48. Исследование влияния деформаций сдвига на изгиб квадратной плиты сосредоточенной силой / М. П. Шереметьєв, Б. Л. Пелех, О. П. Дячина // Прикл. механика. – 1968. – Т. 4, вып. 4. – С. 1–7. – Библиогр.: 7 назв.

А. Література про життя, діяльність та наукові здобутки М. П. Шереметьєва

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. – 496 с. (Про праці М. П. Шереметьєва, – С. 327–331, 337–340, 414, 494.)
2. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. – К.: Изд. АН УССР, 1952. – 420 с. (Про праці М. П. Шереметьєва, – С. 4, 415.)
3. Гулько Я. Кавалер ордена Богдана Хмельницького // За радянську науку. – 1954. – 14 січ. – С. 3. (Про життя та бойовий шлях М. П. Шереметьєва. Фото М. П. Шереметьєва.)
4. Ювілейне чествування // Там же. – 1956. – 12 квіт. – С. 1. (Про відзначення в університеті 50-річчя завідувача КМ проф. М. П. Шереметьєва. Доповідь про ювіляра зробив член-кор. АН УРСР Я. Б. Лопатинський. Фото М. П. Шереметьєва.)
5. Михаил Петрович Шереметев (К пятидесятилетию со дня рождения) // Наук. зап. Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка. Сер. мех.-мат. – 1956. – Т. 38, вип. 7. – С. 4–7. (Фото М. П. Шереметьєва.)
6. Васюков О. Професор-агітатор // За радянську науку. – 1958. – 24 берез. – С. 1. (Про роботу проф. М. П. Шереметьєва як наставника студентської академічної групи та керівництво ним науковою роботою студентів.)

7. Дубій П. В одній академічній групі // Там же. – 1958. – 28 трав. – С. 3. (Про роботу проф. М. П. Шереметьєва як наставника студентської академічної групи та керівництво ним науковою роботою студентів. Фото з підписом: «Агітатор М. П. Шереметьєв прийшов до студентів».)
8. Васюков О. Наукова творчість студентів. Твори, дерзай, смій! // Там же. – 1958. – 1 верес. – С. 3. (Про керівництво М. П. Шереметьєвим науковою роботою студентів.)
9. Стеценко Б. Вони одержують замовлення від підприємств // Там же. – 1959. – 12 груд. – С. 2. (Про наукові дослідження на замовлення підприємств під керівництвом М. П. Шереметьєва.)
10. Гуд'єр Дж. Н., Ходж Ф. Г. Упругость и пластичность / Пер. с англ. М.: Изд-во ИЛ, 1960. – 190 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 22, 23, 25, 31, 68.)
11. Назаренко Є. К. 300 років Львівського університету. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1961. – 82 с. (Про М. П. Шереметьєва. – С. 60, 61.)
12. Савин Г. Н., Георгиевская В. В. Развитие механики на Украине за годы советской власти. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 284 с. (Про М. П. Шереметьєва як учня акад. О. М. Динника та його праці. – С. 10, 11, 14, 272, 273.)
13. Шерман Д. И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости // Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Обзорные доклады. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 405–467. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 409, 420, 431, 432, 463, 464.)
14. Назаренко Є. К. Львівський орден Леніна державний університет імені Івана Франка // К.: Українська радянська енциклопедія, 1962. – Т. 8. – С. 347–348. (Про М. П. Шереметьєва. – С. 348.)
15. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – К.: Наук. думка, 1964. 384 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 4, 181, 182, 195, 332, 379.)
16. Савин Г. М., Карпенко Г. В., Михайловський В. М. Механіка // К.: Українська радянська енциклопедія, 1965. – Т. 17. – С. 471 – 473. (Про М. П. Шереметьєва – С. 472.)
17. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинках и оболочках // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1965. – Вып. 1. – С. 5 – 38. (Про праці М. П. Шереметьєва – С. 6, 14–16, 38.)
18. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 205, 208, 230, 580, 591, 592, 593, 602, 685, 686.)
19. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости // Механика твердого тела: Тр. Второго Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. – М.: Наука, 1966. – Т. 3. – С. 319 – 342 (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 320–324, 326, 328, 329, 340, 341).
20. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинках и оболочках // Там же. – С. 295–318 (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 296, 301, 302, 317).
21. Попов Г. Я., Ростовцев Н. А. Контактные (смешанные) задачи теории упругости // Там же. – С. 235 – 252. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 244, 251.)
22. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 101, 376, 382, 400).
23. Савин Г. Н., Космодамианский А. С., Гузь А. Н. Концентрация напряжений возле отверстий // Прикл. механика. – 1967. – Т. 3, вып. 10. – С. 23–37 (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 25, 26, 37).
24. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Издебская Г. А. Развитие механики оболочек на Украине за годы советской власти // Там же. – С. 65 – 76. (Про праці М. П.

- Шереметьєва. – С. 69, 76).
25. Рвачев В. Л. Исследования ученых Украины в области контактных задач теории упругости // Там же. – С. 109–116. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 110, 111, 116).
 26. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 57, 175–185, 202, 357, 700).
 27. Наукова робота на механіко-математичному факультеті за роки радянської влади / В. Ф. Рогаченко, О. С. Кованько, В. Г. Костенко, О. М. Ростовський, Н. П. Флейшман, Д. В. Гриліцький, Т. Л. Мартинович // Вісн. Львів, ун-ту. Сер. фіз., хім. і мех.-мат. – 1968. – С. 122–132. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 126–131).
 28. Коренев Б. Г. Статика пластинок // Строительная механика в СССР. 1917–1967. – М.: Стройиздат, 1969. – С. 135–164. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 142, 144, 145, 163, 164).
 29. Ониашвили О. Д. Расчет оболочек и других пространственных конструкций // Там же. С. 165 – 202. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 202).
 30. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Пластины, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. – К.: Наук. думка, 1971. – 268 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 44–46, 51–53, 70, 71, 75, 85, 87, 95, 106, 127–130, 173, 178, 191, 192, 197, 213, 214, 216, 264).
 31. Каландия А. И., Лурье А. И., Манджавидзе Г. Ф., Прокопав В. К., Уфлянд Я. С. Линейная теория упругости // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. – С. 5–70. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 56, 57, 63–67).
 32. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 76, 105, 192, 297, 298).
 33. Михаил Петрович Шереметьев (некролог) // Физ.-хим. механика материалов. – 1973. – Т. 9, № 5. – С. 121. (Фото М. П. Шереметьєва.)
 34. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 4, 245).
 35. Михайло Петрович Шереметьев (некролог) // Вісник Львів, ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1974. – Вип. 9. – С. 126–127.
 36. Панасюк В. В., Теплий М. Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – К.: Наук. думка, 1975. – 196 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 6, 8, 34, 46, 166, 192).
 37. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 17, 18, 122, 139, 141, 182, 183).
 38. Панасюк В. В. Етапи становлення львівської школи механіків // Вісн. АН УРСР. – 1979. – № 9. – С. 12–20 (Про М. П. Шереметьєва. – С. 12, 14, 17).
 39. Панасюк В. В. Львовская школа механиков // Физ.-хим. механика материалов. – 1979. – Т. 15, № 5. – С. 3–10 (Про М. П. Шереметьєва. – С. 3, 4, 8).
 40. Теплый М. И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. – Львов: Вища шк., 1983. – 176 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 4, 7, 9, 19, 105, 173).
 41. Мартынович Т. Л., Юринец В. Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища шк., 1984. – 160 с. (Про праці М. П. Шереметьєва. – С. 3, 158).
 42. Львівський університет. – Львів: Вища шк., 1986. – 148 с. (Про М. П. Шереметьєва. – С. 92).
 43. Розвиток науки в західних областях Української РСР за роки Радянської влади / Редкол.: Я. С. Підстригач (відп. ред.) та ін. АН УРСР. Інститут суспільних наук. – К.: Наук. думка, 1990. – 304 с. (Про М. П. Шереметьєва та його праці. – С. 7, 27–29, 245).

44. Хлебников Д. Г. Михайло Петрович Шереметьєв // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – Т. 31, № 5. – С. 127 (Фото М. П. Шереметьєва).
45. Золота книга кафедри механіки (1939–1999) // Ред. Г. Сулим. – Львів: Львів, нац. ун-т ім. І. Франка. 1999. – 102 с. (Про М. П. Шереметьєва. – С. 4, 13, 14, 17 (фото), 20, 24–33, 47, 51–53, 55, 56, 59, 61, 64, 88, 89, 91).

**Б. Кандидатські дисертації, виконані та захищені під керівництвом
М. П. Шереметьєва**

На здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

1. Прусов И. А. Давление на подкрепляющие стойки, установленные внутри отверстия пластинки. – Львов: Львов. ун-т, 1955.
2. Кулик А. Н. Двухсвязные пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Львов. ун-т, 1955.
3. Тульчий В. И. Некоторые задачи изгиба пластинок, подкрепленных тонкими упругими стержнями. – Львов: Львов. ун-т, 1957.
4. Мартынович Т. Л. Расчет пластинок с подкрепленным краем методом последовательных приближений. – Львов: Львов. ун-т, 1958.
5. Лихачев В. А. Деформация бесконечной пластинки со впаянным в нее упругим изотропным цилиндром. – К.: Ин-т механики, 1961.
6. Куземко А. М. Интегральные уравнения теории оболочек. – Львов: Львов. ун-т, 1962.
7. Гнатыкив В. Н. Некоторые задачи пологих сферических оболочек. – Львов: Львов. ун-т, 1963.
8. Галаси А. А. О напряженном состоянии полубесконечных пластин с подкрепленным краем. – Львов: Львов. ун-т, 1964.
9. Пелех Б. Л. Исследование некоторых вопросов теории и расчета оболочек и пластин на основе обобщения кинематических гипотез Кирхгоффа – Лява. – Львов: Львов. ун-т, 1965.
10. Хлебников Д. Г. Некоторые задачи об упругом равновесии подкрепленных пластинок в виде полосы и полуплоскости с круговым отверстием. – Львов: Львов. ун-т, 1966.
11. Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории и расчета оболочек с учетом поперечных сдвигов. – Львов: Львов. ун-т, 1970.

На здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук

12. Грач С. А. Теоретическое и экспериментальное исследование некоторых задач изгиба и растяжения пластинок с ребрами жесткости. – Львов: Львов. политех. ин-т. 1958.

MYKHAILO PETROVYCH SHEREMETJEV

(to 95th birth anniversary)

Dmytro Hlebnikov, Dmytro Hrylits'ky, Georgij Sulym

Ivan Franko National University of L'viv

The main stages of life, research, research-organizational, and social activity of Mykhajlo Petrovych Sheremetjev, prominent Ukrainian scientist in the sphere of mechanics of deformable solids, Doctor of physical-mathematical sciences, honored scientist of Ukraine, Professor of L'viv University are outlined.

Стаття надійшла до редколегії 14.11.1999

УДК 513.6

ПРО ГРУПИ РОЗКЛАДУ НОРМУВАНЬ ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИХ ПОЛІВ

Василь Андрійчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

Вивчимо властивості груп розкладу нормувань псевдоглобальних полів, тобто полів алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [1] полем констант.

Нехай L/K – скінченне розширення Галуа поля алгебричних функцій K , k – поле констант поля K . Група Галуа $\text{Gal}(L/K)$ діє на множині всіх нормувань V_L поля L : якщо $w \in V_L$, $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$, то σw є нормуванням поля L для якого

$$|a|_{\sigma w} = |\sigma^{-1}a|_w.$$

Якщо O_w – кільце нормування w , M_w – максимальний ідеал кільця O_w , то $O_{\sigma w} = \sigma O_w$, $M_{\sigma w} = \sigma M_w$. Тому σ визначає ізоморфізм полів O_w/M_w та $O_{\sigma w}/M_{\sigma w}$, який ми позначаємо теж σ . У цих позначеннях група $\text{Gal}(L/K)$ діє на множині плейсів поля L за таким правилом: якщо ϕ – плейс поля L , то $\sigma\phi$ – плейс, для якого

$$\sigma\phi(a) = \sigma(\phi(\sigma^{-1}a)).$$

Групою розкладу нормування w поля L називають підгрупу G_w групи $G = \text{Gal}(L/K)$, яка складається з тих елементів σ групи G , для яких $\sigma w = w$.

Запишемо означення групи розкладу в термінах кілець нормувань, нормувань та плейсів. $G_w = \{\sigma \in G \mid \sigma w = w\} = \{\sigma \in G \mid \sigma M_w = M_w\} = \{\sigma \in G \mid \phi(a) = 0 \rightarrow \phi(\sigma a) = 0\}$, де w – нормування поля L ; M_w – максимальний ідеал кільця нормування поля L ; ϕ – відповідний йому плейс.

Оскільки дивізори (кільця нормувань) класи еквівалентних нормувань та класи еквівалентних плейсів перебувають у взаємно однозначній відповідності, то ми можемо використовувати будь-яке з цих трьох понять залежно від того, яке з них є зручнішим у тому чи іншому контексті.

Нехай тепер K – псевдоглобальне поле. Поле констант k поля K є псевдоалгебрично замкненим (регулярно замкненим у термінології Ю.П.Єршова [2]). Тому (див. напр. [2] або [3], [4]) для псевдоглобальних полів справджується аналог теореми щільності Чоботарьова.

Цей аналог можна формулювати і доводити навіть у більш загальній ситуації. Для того, щоб нагадати його формулювання, введемо деякі необхідні для цього позначення.

Нехай k – псевдоалгебрично замкнене поле; K – скінченнопороджене регулярне розширення поля k ; L – скінченне розширення Галуа поля K , $G = \text{Gal}(L/K)$, а також l – алгебричне замикання поля k в полі L , $H = \text{Gal}(l/k)$, $\beta : G \rightarrow H$ – гомоморфізм обмеження. Нехай $G(k)$ – абсолютна група Галуа поля k , а $\alpha : G(k) \rightarrow G$ такий гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{array}{c} G(k) \\ \alpha \swarrow \searrow \\ G^\beta \rightarrow H \end{array} \quad (1)$$

комутативна. Позначимо групу $\alpha(G(k))$ через H_1 , підполе сепарабельного замикання k_s поля k , відповідне підгрупі $\text{Ker } \phi$, позначимо через l_1 . Маємо $H_1 = \text{Gal}(l_1/k) \cong G(k)/\text{Ker } \alpha$.

У цих позначеннях правильна така теорема (див. [2], [3], [4]), яку називають аналогом теореми щільності Чоботарьова для псевдоалгебрично замкнених (регулярно замкнених) полів.

Теорема (Фрід-Гаран-Жарден). Нехай S – скінченна підмножина поля K . Існує k – плейс $\phi: K \rightarrow k$, скінченний на S , і його продовження $\phi_1: L \rightarrow l$ на поле L , нерозгалужене над ϕ , групою розкладу якого є H_1 .

Ця теорема, застосована до випадку псевдоглобального поля K , має важливі наслідки, які ми сформулюємо у вигляді декількох тверджень.

Твердження 1. Нехай L/K – геометричне розширення Галуа псевдоглобального поля K (тобто поля L і K мають одне й те ж псевдоскінченне поле констант). Тоді будь-яка циклічна підгрупа H_1 групи $G = \text{Gal}(L/K)$ є групою розкладу деякого нормування поля L . Існує нескінченна кількість нерозгалужених у полі L нормувань v поля K та їхніх продовжень w на поле L таких, що група H_1 є групою розкладу нормування w .

Доведення. В умовах твердження 1 у діаграмі (1) підгрупа H є тривіальною. Крім того, кожна циклічна підгрупа групи G ізоморфна факторгрупі групи $G(k)$, оскільки абсолютна група Галуа $G(k)$ псевдоскінченного поля k ізоморфна групі $\mathbb{Z}$ – поповненню групи цілих чисел $\mathbb{Z}$ щодо топології, визначеної всіма її підгрупами. Розглянувши в діаграмі (1) тривіальний гомоморфізм β , одержуємо, згідно зі сформульованою вище теоремою, існування плейса $\phi_1: L \rightarrow l$ з групою розкладу $\text{Im } \alpha \cong G(k)/\text{Ker } \alpha$, де α – гомоморфізм групи $G(k)$ у групу G , який топологічній твірній групи $G(k)$ ставить у відповідність твірну підгрупи H_1 . Плейсу ϕ_1 відповідає нормування w поля L , що має групою розкладу підгрупу H_1 .

Потрібно ще довести твердження про нескінченність кількості нормувань w з групою розкладу H_1 . Перш за все, згідно з [5], лише скінченна кількість нормувань поля K є розгалуженими в полі L .

Далі, якщо ми маємо нормування $w_1, \dots, w_n$ з групою розкладу H_1 , то розглянемо елементи $u_1, \dots, u_n$ поля L такі, що для відповідних нормуванням $w_1, \dots, w_n$ плейсів $\phi_1, \dots, \phi_n$ виконується умова $\phi_i(u_i) = \infty$, $1 \leq i \leq n$. Згідно з теоремою 2 праці [2, с. 304], плейс $\psi: L \rightarrow l$, скінченний на $u_1, \dots, u_n$. Тому існує нескінченна кількість нееквівалентних плейсів з групою розкладу H_1 , а отже, і нескінченна кількість нееквівалентних нормувань з цією групою розкладу.

Наслідок 1. В умовах твердження 1 існує нескінченна кількість нормувань поля K , що цілком розпадаються в полі L .

Доведення. Нагадаємо, що нерозгалужене нормування v поля K цілком розпадається в полі L , якщо група розкладу кожного продовження w нормування v на поле L тривіальна. З твердження 1 випливає, що існує не-

скінченна кількість нормувань поля L з тривіальною групою розкладу досить розглянути тривіальний гомоморфізм у діаграмі (1).

Розглянемо тепер інший крайній випадок скінченних розширень Галуа псевдоглобального поля K – випадок, коли розширення L/K є розширенням поля констант, тобто $L = lK$, де l/k – скінченне розширення поля констант k .

Твердження 2. Нехай $L = lK$, де l/k – скінченне розширення поля констант псевдоглобального поля K . Існує нескінченна кількість нормувань в поля K таких, що їх продовження w на поле L мають своєю групою розкладу всю групу $\text{Gal}(L/K)$.

Доведення. Для степенів розширень l/k та L/K маємо $[l:k] = [L:K]$. Справді, нехай z – примітивний елемент для розширення l/k , f – мінімальний багаточлен над k для елемента z . Тоді f залишається незвідним і над полем K , інакше коефіцієнти його множників були б багаточленами від коренів багаточлена f , тобто були б алгебричними до K , бо поле констант k є алгебрично замкненим у K . З рівності $[l:k] = [L:K]$ випливає, що $\text{Gal}(L/K) \cong \text{Gal}(l/k)$, а тому можна взяти діаграму (1)

$$\begin{array}{ccc} & G(k) & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \text{Gal}(L/K) & \xrightarrow{\beta} & \text{Gal}(L/K), \end{array}$$

в якій α визначене природним гомоморфізмом $G(k) \rightarrow \text{Gal}(l/k)$ та ізоморфізмом β . Тому існування нескінченної кількості нормувань з групою розкладу $\text{Gal}(L/K)$ одержують так само, як і в твердженні 1.

Наслідок 2. В умовах твердження 2 існує нескінченна кількість нееквівалентних нормувань поля K , що не розпадаються в полі L .

Доведення. Нерозгалужене нормування в поля K не розпадається в полі L , якщо воно має єдине продовження w на поле L , а це рівносильно тому, що група розкладу нормування w збігається з групою $\text{Gal}(L/K)$.

Для псевдоглобальних полів правильний сильніший факт, ніж той, який сформульовано в твердженні 2.

Твердження 3. В умовах твердження 2 кожна підгрупа групи $\text{Gal}(L/K)$ є групою розкладу нескінченної кількості нееквівалентних нормувань поля L .

Для доведення твердження нам буде потрібна одна лема.

Лема. Нехай C – абсолютно незвідна, неособлива крива, визначена над псевдоскінченним полем k . k' – скінченне розширення поля k , $[k' : k] = n$. Існує k' – раціональна точка кривої C , яка не є її k' -раціональною точкою для кожного підполя k'' , $k \subset k'' \subset k'$.

Доведення. Нехай степінь незвідного багаточлена, що визначає криву C , дорівнює d . Покажемо спочатку, що твердження леми правильне для випадку скінченного поля k з q елементів, якщо q досить велике. Позначимо через $|C(q^n)|$ кількість точок кривої C з координатами поля з q^n елементів. Згідно з [4, розділ 2, теорема 4, 9] маємо оцінку

$$q^n + 1 - Aq^{n/2} \leq |C(q^n)| \leq q^n + 1 + Aq^{n/2}, \quad (2)$$

де $A = (d - 1)(d - 2)$.

Якщо поле k'' є підрозширенням поля k' , то k'' має q^{n_1} елементів, де $n_1 \mid n$. Запишемо оцінку, аналогічну (2), для $C(q^{n_1})$:

$$q^{n_1} + 1 - Aq^{n_1/2} \leq |C(q^{n_1})| \leq q^{n_1} + 1 + Aq^{n_1/2}. \quad (3)$$

Нехай m – кількість усіх дільників числа n . Загальна кількість точок кривої C з координатами у всіх власних підрозширеннях k'' поля k' не перевищує, як це випливає з (3), величини $m(q^{n/2} + 1 + Aq^{n/4})$.

Звідси та з (2) одержуємо, що кількість k' -раціональних точок, координати яких не лежать у жодному власному підрозширенні поля k' , не менша ніж

$$q^n + 1 - Aq^{n/2} - m(q^{n/2} + 1 + Aq^{n/4}). \quad (4)$$

Величина (4) прямує до нескінченності при $q \rightarrow \infty$, тому стає додатною при досить великих q .

Отже, використовуючи той факт, що псевдоскінченні поля елементарно еквівалентні ультрадобуткам скінченних полів, достатньо показати, згідно з [1], що твердження леми можна сформулювати мовою логіки першого порядку. У книзі [2, с. 319] розглянуто, як записати мовою першого порядку формулу, яка стверджує, що поле k має принаймні одне розширення степеня n , і наведено відповідну формулу. Якщо в згаданій формулі замінити квантори $\exists$ на квантори $\forall$, то одержимо формулу, яка стверджує, що для кожного набору n^3 структурних констант y_{ij}^k n -вимірний алгебра над полем k з базою $e_1, \dots, e_n$, стандартним додаванням та множенням згідно з правилом $e_i e_j = \sum y_{ijk}^k e_k$ є полем. З цього погляду елементи розширення k'/k степеня n можна інтерпретувати як елементи з k^n , з множенням, визначеним за допомогою структурних констант. Башту розширень полів $k \subset k'' \subset k'$ можна аналогічно описати за допомогою подвійного набору структурних констант, а елементи з поля k' інтерпретувати як елементи з $k^{n_1 n_2}$, причому перші n_1 компонент такого вектора ми ототожнюємо з елементами поля k'' .

У [4] розглянуто також як записати у вигляді формули мови логіки першого порядку твердження про те, що багаточлен, який задає криву C , є абсолютно незвідним і не має особливих точок.

Враховуючи ці зауваження, легко перекоонатися, що твердження леми можна сформулювати (явна формула була б досить громіздкою) мовою логіки першого порядку, а тому лема випливає з твердження 4 [1].

Доведення твердження 3. Нехай $\text{Gal}(l/k) = \text{Gal}(L/K) = G$, H – підгрупа групи G . За основною теоремою теорії Галуа підгрупі H відповідає підполе k' , $k \subset k' \subset l$.

Розглянемо абсолютно незвідну, неособливу криву C , що є моделлю поля K . Згідно з лемою 6 існує точка (a, b) кривої C , координати якої належать полю k' і не належать жодному підрозширенню поля k' .

Якщо (x, y) – загальна точка кривої C , то зіставлення $(x, y) \rightarrow (a, b)$ визначає гомоморфізм $O_{(a,b)} \rightarrow k'$ локального кільця точки (a,b) на поле k' . Цей гомоморфізм продовжується до k' -значного плейса $K \rightarrow k'$. Це означає, що існує простий дивізор степеня $[k' : k]$ поля K . Для відповідного нормування

v поля K маємо $O_v/M_v \cong k'$, де O_v і M_v , відповідно, кільце цілих та ідеал нормування v . Якщо w – нормування поля L , що продовжує v , то, згідно з [4, теорема 2.14, с. 23] $O_w/M_w = \iota(O_v/M_v) = \iota k' = l$. Звідси випливає, що групою розкладу нормування w є група $\text{Gal}(l/k') = H$.

Наслідок 3. Нехай K – псевдоглобальне поле. Тоді для кожного додатного натурального числа t існує простий дивізор поля K степеня t .

Твердження 4 дає відповідь на запитання, якими можуть бути групи розкладу нормувань псевдоглобального поля K для розширень, які не обов'язково є геометричними або розширеннями поля констант.

Твердження 4. Для псевдоглобального поля K правильні такі еквівалентні властивості:

1) нехай L/K – скінченне розширення Галуа, l – алгебричне замикання поля констант k поля K у полі L , H – циклічна підгрупа групи $\text{Gal}(L/K)$, для якої $\text{res}_L H = \text{Gal}(l/k)$. Тоді існує нормування поля K і його продовження на поле L , група розкладу якого збігається з групою H ;

2) якщо L/K – циклічне розширення, то існує нормування поля K і його продовження на поле L , група розкладу якого збігається з групою $\text{Gal}(L/K)$;

3) якщо L/K – циклічне розширення і $a_1, \dots, a_m$ – елементи поля L , то існує нормування поля K і його продовження w на поле L таке, що елементи $a_1, \dots, a_m$ цілі щодо w , поле лишків нормування v збігається з k , а група розкладу нормування w збігається з $\text{Gal}(L/K)$.

Доведення. Абсолютна група Галуа поля констант k поля K ізоморфна поповненню групи цілих чисел $\mathbb{Z}$ щодо топології, визначеної всіма її підгрупами; це вільна топологічна група з однією топологічною твірною. Звідси та з псевдоалгебричної замкненості поля k випливає (див. [4]), що поле k є Фробеніусовим. У [3] показано, що Фробеніусові поля задовольняють властивості 1–3 твердження 4 і що ці три властивості еквівалентні.

Твердження 5. Нехай K – псевдоглобальне поле; L/K скінченне розширення Галуа; H – циклічна підгрупа його групи Галуа $G = \text{Gal}(L/K)$. Існує нескінченна кількість нееквівалентних нормувань поля L , групи розкладу яких мають групу H своєю підгрупою.

Доведення. Нехай спочатку L/K – циклічне розширення. Із зауваження до наслідку 1.4. у праці [3] випливає, що для топологічної твірної σ абсолютної групи Галуа $G(k)$ псевдоскінченного поля констант k поля K і довільного елемента $g \in G$ такого, що $\text{res}_L \sigma = \text{res}_L g$ (тут, як і раніше, l – алгебричне замикання поля k у полі L), існує k – плейс ϕ поля K , для якого $\phi K = k$, $\phi L = k_1$ (k_1 – скінченне розширення поля k). Плейс ϕ визначає ізоморфізм ϕ^* , $\phi^*(\text{res}_{k_1} \sigma) = g$ циклічної підгрупи, породженої елементом $\text{res}_{k_1} \sigma$, та групи розкладу плейса ϕ , яка, отже, є циклічною підгрупою, породженою елементом g . Для циклічних розширень твердження 9 доведене.

Нехай тепер L/K – довільне розширення Галуа; H – циклічна підгрупа групи $\text{Gal}(L/K)$; K_1 – відповідне підгрупі H підполе поля L . За доведеним існує плейс поля L , групою розкладу якого в розширенні L/K_1 є підгрупа H . Зрозуміло, що група розкладу цього плейса в розширенні L/K містить підгрупу H .

Що стосується твердження про існування нескінченної кількості нееквівалентних нормувань (тобто нескінченної кількості нееквівалентних плейсів; нагадаємо про еквівалентність мови нормувань, мови кілець нормувань та мови плейсів), то в [3] показано, що з існування плейса із заданою групою розкладу впливає існування плейса з цією ж групою розкладу і скінченного на довільній скінченній підмножині $\{a_1, \dots, a_n\}$ поля L . Тому, маючи хоч один потрібний плейс φ_1 , вибираємо елемент $a_1 \in L$, для якого $\varphi_1(a_1) = \infty$; існує плейс φ_2 , з такою ж групою розкладу як у φ_1 і $\varphi_2(a_1) \neq \infty$. Звідси є зрозумілою нескінченність множини нееквівалентних плейсів з заданою групою розкладу.

Зауваження.

1. З міркувань, описаних у доведенні твердження 5, впливає твердження 3. Все ж ми навели незалежне доведення твердження 3, оскільки воно відображає, яку важливу роль відіграє властивість псевдоалгебричної замкненості поля k .

2. Якщо поле алгебричних функцій від однієї змінної з полем констант k має властивість, сформульовану в твердженні 5, то воно має властивості, сформульовані в твердженні 4, а тому, згідно з [4, с. 354], є Фробеніусовим.

1. Ax J. The elementary theory of finite field // Ann. Math. – 1968 – Vol. 88, No. 2. – P. 239–271.
2. Ершов Ю. Л. Алгоритмические проблемы в теории полей // Справочная книга по математической логике. Часть 3. Теория рекурсии. – М.: Наука, 1982. – С. 269–353.
3. Fried M., Haran D., Jarden M. Galois Stratification over Frobenius Fields // Advances in Mathematics. – 1984. – Vol. 51. – P. 1–35.
4. Fried M., Jarden M. Field arithmetic. – Springer, 1986.
5. Шевалле К. Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной. М.: Физматгиз, 1959.

ON DECOMPOSITION GROUPS OF VALUATIONS OF PSEUDOGLOBAL FIELDS

Vasyl Andriychuk

Ivan Franko National University of L'viv

The properties of decomposition groups of valuations of an algebraic function field over a pseudofinite constant field are investigated.

Стаття надійшла до редколегії 13.12.1999

УДК 534.1

КОЛИВАННЯ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ З НЕЛІНІЙНИМ ЗАКОНОМ ПРУЖНОСТІ

Анатолій Барвінський, Владислав Гонтар

Національний університет «Львівська політехніка»

У працях авторів [1, 2] викладено алгоритм побудови наближеного розв'язку квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k_1(x, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + k_3(x, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon f \left(x, \tau, \theta, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right), \quad (1)$$

де k_1, k_2, k_3 – додатні обмежені коефіцієнти залежні від координати x , $x \in [0, 1]$ та повільного часу $\tau = \varepsilon t$; $f(x, \tau, \theta, u, \dots)$ – 2π -періодична за θ функція, що допускає розвинення у ряд за малим параметром ε .

Алгоритм полягає у побудові розв'язку рівняння (1) асимптотичним методом нелінійної механіки [3]

$$u(x, t) = au_0(x) \cos(\theta + \psi) + \varepsilon u_1(a, x, \theta, \dots) + \dots, \quad (2)$$

де амплітуда a та фаза коливань ψ визначені системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots; \quad \frac{d\psi}{dt} = \lambda - \nu(\tau) + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots, \quad (3)$$

та побудові розв'язку відповідної задачі на власні значення

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(k_1(x, \tau) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(k_2(x, \tau) \frac{du_0}{dx} \right) - \lambda^2 k_3 u_0 = 0, \quad (4)$$

згідно з методом збурень у вигляді

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \mu^k \lambda_k, \quad (5)$$

$$u_0 = \varphi_0 + \sum_{k=1}^N \mu^k \varphi_k, \quad (6)$$

де μ – малий параметр.

Кількість N наближень та збіжність наведених рядів (5)–(6) згідно з цим алгоритмом контролює співвідношення Релея:

$$\bar{\lambda}^2 \leq \frac{\int_0^1 \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(k_1(x, \tau) \frac{d^2 \bar{u}_0}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(k_2(x, \tau) \frac{d \bar{u}_0}{dx} \right) \right) \bar{u}_0 dx}{\int_0^1 k_3(x, \tau) \bar{u}_0^2 dx}, \quad (7)$$

де як допустиму функцію $\bar{u}_0$ обрано ряд (6), а $\bar{\lambda}$ обчислене достатньо точним числовим методом.

Використаємо цей алгоритм у дослідженні вимушених коливань стрижня змінного перерізу з нелінійним законом пружності.

Рівняння коливань чистого згину такого стрижня одержане в [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E^3 I_2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + H_1 \sin \theta \right), \quad (8)$$

де $u = u(x, t)$ — переміщення у вертикальній площині; ρ — густина матеріалу; E — модуль Юнга; $F(x)$ — площа поперечного перерізу; H, θ — амплітуда та частота збудовальної сили; I та I_2 — моменти інерції, визначені за формулами:

$$I = \iint_{F(x)} y^2 dy dz, \quad I_2 = \iint_{F(x)} y^4 dy dz. \quad (9)$$

Перейдемо у рівнянні (8) до безрозмірної координати $\xi = \frac{x}{l}$, де l — довжина стрижня, та запишемо його у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(I \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) + l^4 \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\frac{E^2}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) + H \sin \theta \right). \quad (10)$$

Застосовуючи методику [3], після деяких перетворень знаходимо

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\varepsilon H}{\lambda K} \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi \cos \psi, & K &= 2\pi \int_0^1 \rho F(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi, \\ B_1 &= \lambda - \nu(\tau) - \frac{1}{(\lambda + \nu(\tau)) K} \left(b_1 \int_0^1 I_2(\xi) (\varphi''(\xi))^4 d\xi + \varepsilon H \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi \sin \psi \right), \\ b_1 &= 3\alpha^2 E^3 / (8\ell^6), \end{aligned} \quad (11)$$

де $\varphi \equiv u_0$ — розв'язок незбуреного рівняння; $\nu = d\theta/dt$ — миттєва частота збудовальної сили.

Для аналізу впливу наближень розв'язку незбуреного рівняння розглянемо клас стрижнів змінного перерізу, для яких можна отримати точний розв'язок звичайного диференціального рівняння (4). Для цього оберемо стрижень з лінійною зміною площі поперечного перерізу, закріплений шарнірно, і введемо параметр зміни його товщини β . Тоді

$$\begin{aligned} F(\xi) &= F_0 (1 - \beta \xi) = b h_0 (1 - \beta \xi), \\ I(\xi) &= I_0 (1 - \beta \xi)^3 = \frac{1}{12} b h_0^3 (1 - \beta \xi)^3, \\ I_2(\xi) &= I_{20} (1 - \beta \xi)^5 = \frac{1}{80} b h_0^5 (1 - \beta \xi)^5. \end{aligned} \quad (12)$$

Згідно з викладеним підходом, ми повинні побудувати допустимі функції $\bar{\varphi}$ у відношенні Релея, яке після спрощення матиме вигляд

$$\bar{\lambda}^2 \leq \frac{\int_0^1 (1 - \beta\xi)^3 (\bar{\varphi}'')^2 d\xi}{c \int_0^1 (1 - \beta\xi) \bar{\varphi}^2 d\xi}. \quad (13)$$

Як допустиму функцію у формулі (13) використаємо ряд (6), знаходячи послідовно розв'язки відповідної системи рівнянь методу збурень.

У нульовому наближенні для основної форми коливань $\varphi_0 = \sin \pi\xi$. Урахувавши цю функцію у відношенні (13), матимемо

$$\bar{\lambda}^2 \leq \frac{\pi^2}{4\beta} \frac{1 - (1 - \beta)^4 - 3\beta^2(2 - \beta)}{\pi^2(1 + (1 - \beta)^2) - 3\beta^2}. \quad (14)$$

У правій частині першого наближення системи методу збурень

$$F_1 = -\beta\xi; \quad I_1 = -\beta\xi(3 - 3\beta\xi + \beta^2\xi^2). \quad (15)$$

Для відшукування першої поправки власної функції спочатку треба знайти першу поправку власного значення

$$\lambda_1 = \left(\int_0^1 \varphi_0^2(\xi) d\xi \right)^{-1} \left(\int_0^1 (\lambda_0^2 F_1(\xi) - I_1(\xi) (\varphi_0'')^2) d\xi \right), \quad (16)$$

яка з урахуванням (15) та $\lambda_0 = \pi$

$$\lambda_1 = \pi^2 \beta \left(\pi^2 (-1.5 + \beta - 0.25\beta^2) + 0.75\beta(2 - \beta) \right). \quad (17)$$

Після деяких спрощень рівняння першого наближення запишемо

$$\begin{aligned} \varphi_1^{IV} - \pi^4 \varphi_1 = 6\pi^3 \beta (1 - 2\beta + \beta^2 \xi^2) \cos \pi\xi + \\ + (\lambda_1 - \pi^4 \phi\xi - 6\pi^2 \beta^2 (1 - \beta\xi) - 3\pi^4 \beta\xi (3 - 3\beta\xi + \beta^2 \xi^2)) \sin \pi\xi \end{aligned} \quad (18)$$

Його частинний розв'язок побудуємо у вигляді

$$\varphi_1 = \xi (a_c \xi^3 + b_c \xi^2 + c_c \xi + d_c) \cos \pi\xi + \xi (a_s \xi^3 + b_s \xi^2 + c_s \xi + d_s) \sin \pi\xi, \quad (19)$$

де значення коефіцієнтів

$$\begin{aligned} a_c &= -3\beta^3/16; \quad b_c = \beta^2(9\pi - 13.5\beta)/12; \\ c_c &= \pi\beta^3 + 0.75\beta/\pi + 4.5b_c/\pi + 12a_c/\pi^2; \\ d_c &= 0.25\lambda_1/\pi^3 - 1.5\beta^2/\pi + 6b_c/\pi^2 + 3c_c/\pi^2; \\ a_s &= 0; \quad b_s = -0.5\beta^3 - 12a_c/\pi; \\ c_s &= 1.5\beta^2 - 4.5b_c/\pi; \quad d_s = 6b_s/\pi^2 - 3c_c/\pi - 1.5\beta. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогічно визначають і наступні наближення.

Тоді система диференціальних рівнянь (3) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= - \frac{\varepsilon H_1 \int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) d\xi \cos \psi}{a_2 (\lambda_1 + v(\tau)) \int_0^1 (1 - \beta \xi) \bar{\varphi}^2 dx}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda_1 - v(\tau) - \frac{b_1 \int_0^1 (1 - \beta \xi)^5 (\bar{\varphi}''(\xi))^4 d\xi + \varepsilon H_1 \int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) d\xi \sin \psi_0}{b_2 (\lambda_1 + v(\tau)) \int_0^1 (1 - \beta \xi) \bar{\varphi}^2 dx}. \end{aligned} \quad (21)$$

Систему диференціальних рівнянь (21) розв'язують за спеціально розробленим алгоритмом з залученням числових методів [5].

Для конкретних параметрів стрижня, взятих з [3], побудована амплітудно-частотна характеристика коливань для різних значень β . Розв'язок системи (21) з власною функцією $\bar{\varphi}$ порівнювали з точним розв'язком для φ , одержаним у [2]. Збіжність для $\beta \in (0; 0.85)$ виявлено вже для третього наближення, що свідчить про ефективність запропонованого алгоритму.

1. Барвінський А., Гонтар В. Застосування комбінованого підходу до розв'язання деяких нелінійних крайових задач асимптотичними методами // Сучасні проблеми механіки і математики. – Львів, 1998. – С. 237–238.
2. Гонтар В. Д. Нелінійні коливання вертикального стержня змінного перерізу, зумовлені дією осової пульсуючої сили // Вісник ДУ «Львівська політехніка». 1998. – № 341. – С. 93–97.
3. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Наук. думка, 1976.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М., 1961.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1976.

OSCILLATIONS OF ROD SYSTEMS WITH VARIABLE AREA OF CROSS-SECTION WITH THE NON-LINEAR PRINCIPLE OF ELASTIC

Anatoly Barvinsky, Vladislav Gontar

National University «Lvivska Politechnika»

In accordance with this technique non-linear oscillations of rod systems with variable area of cross-section and characteristics have been studied. Composite method of making a solution of undisturbed operator equation has been given as well as the algorithm of its realization.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.1999

УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Віктор Божидарник, Олеся Максимович

Луцький державний технічний університет

У праці [2] побудовано граничні інтегральні рівняння першої основної задачі теорії пружності для анізотропних пластинок з отворами довільної форми. Нижче аналогічні рівняння наведено стосовно другої основної задачі теорії пружності для анізотропних багатозв'язних пластинок. Для розв'язування рівнянь застосовано метод механічних квадратур. Інші підходи до дослідження пружної рівноваги анізотропних пластинок розглянуті в працях [1, 3].

Нехай пружна пластинка займає область D , що обмежена контурами $L_0, L_1, \dots, L_N$, які не перетинаються, причому область D є внутрішньою щодо контуру L_0 . Приймають, що на отворах і зовнішній межі пластинки задано переміщення або в отвори впаяно жорсткі включення; пластинка міститься в умовах плоского напруженого стану і перебуває під дією: зусиль на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів); зосереджених сил (X_j, Y_j) , що прикладені в точках (a_j, b_j) $j = 1, \dots, M$; сил і моментів, які прикладені до жорстких включень.

Віднесемо область D до декартової системи координат (x, y) . Розглянемо системи координат $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, які отримують із системи (x, y) афінним перетворенням $x_j = x + \alpha_j y$, $y_j = \beta_j y$ ($j = 1, 2$). Тут $s_j = \alpha_j + i\beta_j$ – корені характеристичного рівняння [1], причому $\text{Im}(s_j) > 0$ ($j = 1, 2$). Позначимо в цих системах через D_1 і D_2 області, в які внаслідок афінних перетворень перейде область D , а відповідні контурам L_j криві – через $L_j^{(1,2)}$ ($j = 0, \dots, N$). Поставлена задача зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\varphi(z_1), \psi(z_2)$, які на межі області задовольняють умови [1]

$$2\text{Re}[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)] = g_1, \quad 2\text{Re}[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)] = g_2, \quad (1)$$

де $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$; p_1, p_2, q_1, q_2 – комплексні сталі, які визначають через механічні характеристики матеріалу, з якого виготовлена пластинка; g_1, g_2 – задані компоненти вектора переміщення на межі пластини. Якщо в отвір, обмежений контуром L_j , впаяно жорстке включення, то на ньому задано $g_1 = C_j - \tau_j y$, $g_2 = D_j + \tau_j x$, де C_j, D_j, τ_j – сталі, які визначають з умови, що головний вектор та момент усіх сил, прикладених до цього включення, є відомими (дорівнюють заданим).

Похідні від комплексних потенціалів $\Phi(z_1) = \varphi'(z_1)$, $\Psi(z_2) = \psi'(z_2)$ зобразимо у вигляді

$$\Phi(z_1) = \Phi_R(z_1) + \Phi_S(z_1), \quad \Psi(z_2) = \Psi_R(z_2) + \Psi_S(z_2), \quad (2)$$

де $\Phi_R(z_1), \Psi_R(z_2)$ – аналітичні функції в областях D_1, D_2 відповідно,

$$\Phi_S(z_1) = \Omega_1(z_1) + B_* + iC_*, \quad \Psi_S(z_2) = \Omega_2(z_2) + B'_* + iC'_*,$$

$$\Omega_m(z_m) = -\sum_{j=1}^M (d_1^{(m)} Y_j + d_2^{(m)} X_j) \frac{1}{z_m - z_{mj}}, \quad d_k^{(j)} = D_k^{(j)} / D_*;$$

$D_k^{(j)}$, D_* – сталі, вирази для яких наведено в [1]; $m = 1, 2$; B_* , C_* , B'_* , C'_* – дійсні сталі, які визначають через задані на нескінченності зусилля, причому одна із цих сталих є довільною (у випадку обмежених пластинок ці сталі дорівнюють нулю); $z_{kj} = a_j + s_k b_j$.

Позначимо граничні значення функцій $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ на межі областей через відповідно, $Q(z_1)$, $P(z_2)$. Тоді на основі зображення (2) та теореми Коші отримаємо інтегральні зображення для комплексних потенціалів у вигляді

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(1)}} \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau - z_1} + \Phi_S(z_1), \quad \Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(2)}} \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - z_2} + \Psi_S(z_2), \quad (3)$$

де $L^{(k)} = L_0^{(k)} + L_1^{(k)} + \dots + L_N^{(k)}$, ($k = 1, 2$). Тут за додатний напрям обходу контурів вибрано такий, при якому область D залишається ліворуч.

Із умови (1) знаходимо

$$P(z_2) = (W + \alpha Q z'_1 + \beta \bar{Q} \bar{z}'_1) / z'_2, \quad (4)$$

$$\text{де } w = \frac{\bar{q}_2 g_1 - \bar{p}_2 g_2}{d}, \quad \alpha = \frac{\bar{p}_2 q_1 - \bar{q}_2 p_1}{d}, \quad \beta = \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_1 - \bar{q}_2 \bar{p}_1}{d}, \quad d = p_2 \bar{q}_2 - q_2 \bar{p}_2,$$

$W = dw/ds$, $z'_j = dz_j/ds$, $j = 1, 2$, ds – диференціал дуги на межі пластинки.

Комплексні потенціали задовольняють додаткові умови, які забезпечують однозначність переміщень. Такі умови мають вигляд [1]

$$\int_{L_j} Q(z_1) dz_1 = -[C_1^{(1)} Y^{(j)} + C_2^{(1)} X^{(j)}] / C, \quad j = 0, \dots, N, \quad (5)$$

де $C_i^{(j)}$, C – сталі, вирази для яких наведено в [1]; $X^{(j)}$, $Y^{(j)}$ – проекції на осі Ox і Oy головного вектора всіх сил, що прикладені до контуру L_j .

Для знаходження функції Q , через яку записаний загальний розв'язок задачі, використаємо формулу для відшукування похідних від вектора переміщень за дуговою координатою на довільній кривій $\Gamma \in D$ [1]:

$$(u' + iv') = (p_1 + iq_1) z'_1 \Phi(z_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{z}'_1 \overline{\Phi(z_1)} + \\ + (p_2 + iq_2) z'_2 \Psi(z_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{z}'_2 \overline{\Psi(z_2)}, \quad (6)$$

де $z'_j = dz_j/ds$, ds – диференціал дуги на кривій Γ . Підставивши в (6) потенціали (3) і перейшовши до границі $(x, y) \rightarrow L$, після врахування умов Племеля – Сохоцького отримаємо граничні інтегральні рівняння для знаходження функції Q у вигляді

$$(u' + iv') = 2[(p_1 + iq_1) z'_1 \Phi(z_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{z}'_1 \overline{\Phi(z_1)} + \\ + (p_2 + iq_2) z'_2 \Psi(z_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{z}'_2 \overline{\Psi(z_2)}], \quad (7)$$

де $(x, y) \in L$, $L = L_0 + \dots + L_N$, причому тут у комплексних потенціалах, визначених формулами (2), (3), інтеграли Коші розглядають у сенсі головного значення. Співвідношення (7) у разі врахування зображень (2), (3) є системою сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій Q . Розв'яжемо рівняння за допомогою методу механічних квадратур. Розглядатимемо випадок, коли параметричне рівняння контурів L_j записано у вигляді відрізків ряду Фур'є

$$x = \sum_{n=-K}^K a_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad y = \sum_{n=-K}^K b_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad j = \overline{0, M},$$

де $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}$, K – сталі; $0 \leq \theta < 2\pi$. Тоді рівняння контурів $L_j, L_j^{(1,2)}$ запишемо так: $t_k = \omega_k^{(j)}(\theta)$, де $t_0 = t$, $\omega_k^{(j)}(\theta) = \sum_{n=-K}^K (a_n^{(j)} + s_n b_n^{(j)}) \sigma^n$, $s_0 = 1$, $\sigma = e^{i\theta}$.

Квадратурні формули для інтегралів, що входять у зображення (3) і (7), мають вигляд [1]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{Q(t_1) dt_1}{t_1 - z_1} \cong \frac{-i}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{Q_k^{(j)} t_{1k}'^{(j)}}{t_{1k}^{(j)} - z_1}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(2)}} \frac{P(t_1) dt_1}{t_2 - z_2} \cong \frac{-i}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{P_k^{(j)} t_{2k}'^{(j)}}{t_{2k}^{(j)} - z_2},$$

де $t_{mk}^{(j)} = \omega_m^{(j)}(\theta_k^{(j)})$, $t_{mk}'^{(j)} = \omega_m'^{(j)}(\theta_k^{(j)})$, $Q_k^{(j)} = Q(t_{1k}^{(j)})$, $P_k^{(j)} = P(t_{2k}^{(j)})$, $\theta_k^{(j)} = h_j k$, $h_j = 2\pi/N_j$, N_j – кількість вузлових точок на контурі L_j , $m = 1, 2$. Формули справджуються для довільних точок, що не належать контуру $L_j^{(m)}$, та для точок $z_m = \omega_m^{(j)}(\gamma_v^{(j)})$, де $\gamma_v^{(j)} = h_j(v + 0.5)$, $v = 1, \dots, N_j$. Зазначимо, що в останньому випадку інтеграли розглядають у сенсі головного значення.

Підставляючи у рівняння (7) зображення (3), замінюючи в отриманих співвідношеннях інтеграли на наведені квадратурні формули та враховуючи формулу (4), поставлену задачу зводимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь щодо невідомих значень функцій Q у вузлових точках на межі отворів.

Можна показати, що в отриманих групах алгебричних рівнянь, записаних для кожного з граничних контурів, одне є лінійно залежне. Вилучимо із кожної із таких груп одне рівняння. Для контурів, на яких задано переміщення, доповнимо систему (після вилучення) рівняннями, що фіксують у довільній точці контуру переміщення.

Для отворів, у які впаяно включення, доповнимо систему рівняннями

$$\frac{2\pi}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} t_{1n}^{(j)} Q_n^{(j)} = -\frac{C_1^{(1)} Y^j + C_2^{(1)} X^{(j)}}{C},$$

які випливають із умови (5). Додаткове рівняння для визначення сталої τ_j (що визначає поворот включення як жорсткого цілого) запишемо

$$\frac{2\pi}{N_j} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N_j} t_{1n}^{(j)} t_{1n}'^{(j)} Q_n^{(j)} + \sum_{n=1}^{N_j} t_{2n}^{(j)} t_{2n}'^{(j)} P_n^{(j)} \right\} = -M_j,$$

його отримано із умови, що момент всіх сил, прикладених до включення, дорівнює M_j :

На основі викладених співвідношень розроблені програми для ЕОМ, за якими розраховано напруження в нескінченній пластинці з жорсткими включеннями, що виготовлена із СВМ. Для розрахунків прийнято [3]: $s_1 = 1.89i$, $s_2 = 0.531i$, $p_1 = -1.07004 \times 10^{-5}$, $p_2 = -0.119187 \times 10^{-5}$, $q_1 = -0.225486 \times 10^{-5}$, $q_2 = -0.568983 \times 10^{-5}$; головний вектор та момент, що прикладені до кожного з включень, дорівнюють нулю; пластинка розтягується на нескінченності зусиллями p вздовж осі Ox ; пластинка має еліптичні включення з півосями a і b , які паралельні до осей Ox і Oy , відповідно.

Порівняння результатів розрахунків для випадку одного включення із аналітичним розв'язком свідчать про високу точність використаного методу, який ґрунтується на квадратурних формулах типу Гаусса. Зокрема, при $b = 0.5a$ для обчислення напружень з точністю до 1% виявилось достатньо обмежитись тільки 12 вузловими точками (без урахування симетрії задачі).

Розглянуто пластинку з двома однаковими еліптичними включеннями при $b = 0.5a$, що розміщені на осі Ox на відстані між включеннями, що дорівнює a . В табл. 1 у третьому стовпці наведено результати розрахунку напружень на межі включення, які діють на площинках, що нормальні до межі. Для порівняння в другому стовпці наведені результати розрахунків у другому наближенні із [3].

Таблиця 1.

θ	σ_n/p	σ_n/p
0	2.09	2.063
60	0.34	0.298
120	0.21	0.257
180	2.41	2.482

Таблиця 2.

θ	l/a	3	3	2.5	2.25
0		3.30	3.316	5.165	9.037
30		1.32	1.311	1.655	2.077
60		0.29	0.294	0.303	0.313
90		0.11	0.141	0.108	0.107

У табл. 2 наведено результати розрахунку напружень у пластинці, в якій еліптичні включення при $b = 0.5a$ розміщені вздовж осі Ox з періодом l . У другому стовпці наведено дані із [3].

1. Божидарник В. В. Двовимірні задачі теорії пружності і термопружності структурно-неоднорідних тіл. – Львів: Світ, 1998. – 352 с.
2. Божидарник В. В., Максимович О. В. Пружна рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – Львів: Каменярь, 1999. – Т. 2, № 2. – С. 255–259.
3. Космодемьянский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.

INTEGRAL EQUATIONS OF NON-ASITROPES ELASTIC PLATES WITH HOLES

Victor Bozidarnik, Olesia Maxymovytch

Луцький державний технічний університет

The paper presents singular integral equations for non-asitrope plates weakened by holes. The paper worced out the numerical algorithm of solving of the received equations that is based on the method of mechanical quadrature.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2000

УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗКИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

Василь Вігак, Юрій Токовий, Андрій Ричагівський

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

Успішне використання методу прямого інтегрування диференціальних рівнянь пружності та термопружності в напруженнях для розв'язання задач у необмежених областях [1–3, 7] свідчить про необхідність розвитку його щодо побудови розв'язку, наприклад, плоскої задачі пружності чи термопружності для прямокутної області, яку формулюють так: знайти квазі-статичний напружений і деформований стан та переміщення, зокрема, у випадку плоского деформованого стану, який за відсутності масових сил описують [5, 6] рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in D = [-a, a] \times [-b, b], \quad (1)$$

рівняння суцільності в напруженнях

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \Delta T, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

та фізичні співвідношення

$$\begin{aligned} E e_x &= (1+\nu)[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y + \alpha ET], \quad e_z = 0, \\ E e_y &= (1+\nu)[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x + \alpha ET], \quad G e_{xy} = \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Напруження на границі області повинні задовольняти граничні умови

$$\sigma_x|_{x=\pm a} = \begin{cases} -p_1(y), \\ -p_2(y), \end{cases} \quad \sigma_{xy}|_{x=\pm a} = \begin{cases} q_1(y), \\ q_2(y), \end{cases} \quad \sigma_y|_{y=\pm b} = \begin{cases} -p_3(x), \\ -p_4(x), \end{cases} \quad \sigma_{xy}|_{y=\pm b} = \begin{cases} q_3(x), \\ q_4(x), \end{cases} \quad (4)$$

а переміщення визначають із співвідношень Коші [6].

На основі методу відокремлення змінних у рівняннях пружності чи термопружності для плоскої задачі показано [4, 8], що повною ортогональною системою функцій у випадку області D для напружень σ_x є система

$\{1, y, \cos \gamma_n \frac{y}{b}, \sin \lambda_n \frac{y}{b}, n = 1, 2, \dots\}$, а для σ_y – $\{1, x, \cos \gamma_n \frac{x}{a}, \sin \lambda_n \frac{x}{a}, n = 1, 2, \dots\}$,

де $\gamma_n = n\pi$, а λ_n – корені рівняння $\operatorname{tg} \lambda = \lambda$. Тому розв'язки ключових рівнянь суцільності в напруженнях [8] з умовами (4) записують у вигляді

$$\sigma_x = X_0^1(x) + y X_0^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^1(x) \cos \gamma_n \frac{y}{b} + X_n^2(x) \sin \lambda_n \frac{y}{b}), \quad (5)$$

$$\sigma_y = Y_0^1(y) + x Y_0^2(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n^1(y) \cos \gamma_n \frac{x}{a} + Y_n^2(y) \sin \lambda_n \frac{x}{a}), \quad (6)$$

де функції $\cos \gamma_n \frac{x}{a}$, $\sin \lambda_n \frac{x}{a}$ та $\cos \gamma_n \frac{y}{b}$, $\sin \lambda_n \frac{y}{b}$ є власними, що задовольняють відповідно однорідні інтегральні умови рівноваги

$$\int_{-a}^a \sigma_y dx = \int_{-a}^a x \sigma_y dx = \int_{-b}^b \sigma_x dy = \int_{-b}^b y \sigma_x dy = 0,$$

виділяючи у розв'язках (5), (6) частини під знаками сум, які залежать лише від самозрівноважених зусиль на окремих сторонах області D . Елементарні частини розв'язків (5), (6), які виділяють приєднаними функціями $1, x$ та $1, y$, повинні забезпечувати виконання неоднорідних умов рівноваги

$$\begin{aligned} 2 \int_{-a}^a \sigma_y dx &= - \int_{-a}^a (p_3 + p_4) dx + \int_{-b}^b (q_2 - q_1) \operatorname{sign}(y - \xi) d\xi, \\ 2 \int_{-a}^a x \sigma_y dx &= - \int_{-a}^a (p_3 + p_4) x dx + \int_{-b}^b (p_1 - p_2) |y - \xi| d\xi + \\ &\quad + \int_{-a}^a ((y - b)q_3 + (y + b)q_4) dx - \int_{-b}^b a(q_1 + q_2) \operatorname{sign}(y - \xi) d\xi, \\ 2 \int_{-b}^b \sigma_x dy &= - \int_{-b}^b (p_1 + p_2) dy + \int_{-a}^a (q_4 - q_3) \operatorname{sign}(x - \eta) d\eta, \\ 2 \int_{-b}^b y \sigma_x dy &= - \int_{-b}^b (p_1 + p_2) y dy + \int_{-a}^a (p_3 - p_4) |y - \eta| d\eta + \\ &\quad + \int_{-b}^b ((x - a)q_1 + (x + a)q_2) dy - \int_{-a}^a (b(q_3 + q_4) \operatorname{sign}(x - \eta) d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

та граничні умови

$$\begin{aligned} (X_0^1 + yX_0^2)|_{x=\pm a} &= -\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} dy - \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} y dy, \\ \left(\frac{dX_0^1}{dx} + y \frac{dX_0^2}{dx} \right) \Big|_{x=\pm a} &= -\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \frac{d}{dy} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} dy - \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b \frac{d}{dy} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} y dy, \\ (Y_0^1 + xY_0^2)|_{y=\pm b} &= -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} dx - \frac{3x}{2a^3} \int_{-a}^a \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} x dx, \\ \left(\frac{dY_0^1}{dy} + x \frac{dY_0^2}{dy} \right) \Big|_{y=\pm b} &= -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} dx - \frac{3x}{2a^3} \int_{-a}^a \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} x dx, \end{aligned} \quad (8)$$

що впливають з (1), (4) та розвинень заданих зусиль на границі p_i , q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) за наведеними системами функцій. Елементарні розв'язки

$$\sigma_x = X_0^1(x) + yX_0^2(x), \quad \sigma_y = Y_0^1(y) + xY_0^2(y) \quad (9)$$

повинні задовольняти ще рівняння суцільності (2) та умови погодження

$$X_0^1 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \sigma_x dy, \quad X_0^2 = \frac{3}{2b^3} \int_{-b}^b y \sigma_x dy, \quad Y_0^1 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \sigma_y dx, \quad Y_0^2 = \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a x \sigma_y dx. \quad (10)$$

Функції $X_n^i(x), Y_n^i(y)$ ($i = 1, 2; n = 1, 2, \dots$) в поданнях (5), (6) визначають за допомогою методу, запропонованого в праці [8], використовуючи суперпозицію розв'язків. Складніше знайти елементарні розв'язки (9) для задачі пружності, бо вони обтяжені умовами (7), (8), (10). Розв'язки (9) повинні задовольняти рівняння (2), а зусилля на границі – умови рівноваги

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b (p_2 - p_1) dy + \int_{-a}^a (q_3 - q_4) dx &= \int_{-a}^a (p_4 - p_3) dx + \int_{-b}^b (q_1 - q_2) dy = 0, \\ \int_{-b}^b (p_2 - p_1) y dy + b \int_{-a}^a (q_3 + q_4) dx &= \int_{-a}^a (p_4 - p_3) x dx + a \int_{-b}^b (q_1 + q_2) dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Під час виконання умов (7), (8), (10), (11) вирази (9) будуть розв'язками рівняння (2) при $T \equiv 0$, якщо зусилля задовольнятимуть необхідні рівності

$$\begin{aligned} 2(q_2 - q_1) &= q_{21}^-, \quad 2a(q_1 + q_2) = aq_{12}^+ + \int_{-b}^b (p_1 - p_2) \text{sign}(y - \xi) d\xi, \\ 2(q_4 - q_3) &= q_{43}^-, \quad 2b(q_3 + q_4) = aq_{34}^+ + \int_{-a}^a (p_3 - p_4) \text{sign}(x - \eta) d\eta \end{aligned}$$

та інтегральні умови

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b (p_2 - p_1) dy &= \int_{-a}^a (q_4 - q_3) dx = a q_{43}^-, \quad \int_{-a}^a (p_4 - p_3) dx = \int_{-b}^b (q_2 - q_1) dy = b q_{21}^-, \\ \int_{-b}^b (p_1 - p_2) y dy &= ab q_{43}^- - a \int_{-b}^b (q_1 + q_2) dy, \quad \int_{-a}^a (p_3 - p_4) x dx = ab q_{12}^+ - b \int_{-a}^a (q_3 + q_4) dx, \end{aligned}$$

де $q_{21}^- = (q_2 - q_1)|_{y=b} + (q_2 - q_1)|_{y=-b}$, $q_{43}^- = (q_4 - q_3)|_{x=a} + (q_4 - q_3)|_{x=-a}$, $q_{12}^+ = (q_1 + q_2)|_{y=b} + (q_1 + q_2)|_{y=-b}$, $q_{34}^+ = (q_3 + q_4)|_{x=a} + (q_3 + q_4)|_{x=-a}$, а дотичні зусилля в кутових точках повинні бути однаковими між собою і задовольняти умовам $q_1(b) - q_1(-b) = q_2(b) - q_2(-b)$, $q_3(a) - q_3(-a) = q_4(a) - q_4(-a)$, тому $q_{12}^+ = q_{34}^+$. Тоді

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4b} \left[\frac{x}{a} \int_{-b}^b (p_2 - p_1) dy - \int_{-b}^b (p_1 + p_2) dy \right] + \frac{3y}{4b^3} \left[\frac{x}{a} \int_{-b}^b (p_2 - p_1) y dy - \int_{-b}^b (p_1 + p_2) y dy \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{4a} \left[\frac{y}{b} \int_{-a}^a (p_4 - p_3) dx - \int_{-a}^a (p_3 + p_4) dx \right] + \frac{3x}{4a^3} \left[\frac{y}{b} \int_{-a}^a (p_4 - p_3) x dx - \int_{-a}^a (p_3 + p_4) x dx \right], \quad (12) \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{4} (q_{12}^+ - q_{21}^-) \frac{x}{a} - q_{43}^- \frac{y}{b} + \frac{3(x^2 - a^2)}{8a^3} (aq_{34}^+ - \int_{-a}^a (q_3 + q_4) dx) + \frac{3(y^2 - b^2)}{8b^3} (bq_{12}^+ - \int_{-b}^b (q_1 + q_2) dy). \end{aligned}$$

Отже, елементарні розв'язки (12) плоскої задачі пружності в прямокутній області можуть бути: нормальні напруження лише лінійними функціями координат, а дотичні не вище другого степеня від них.

Після визначення напружень і деформацій з фізичних співвідношень (3) переміщення визначають зі співвідношень Коші [6], звідки

$$2u = u(a, y) + u(-a, y) + \int_{-a}^a e_x \operatorname{sign}(x - \eta) d\eta, \quad 2v = v(x, b) + v(x, -b) + \int_{-b}^b e_y \operatorname{sign}(y - \xi) d\xi.$$

Підставивши знайдені вирази для переміщень у третє співвідношення для e_{xy} , одержимо вихідне інтегро-диференціальне рівняння суцільності

$$2e_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[u(a, y) + u(-a, y) + \int_{-a}^a e_x \operatorname{sign}(x - \eta) d\eta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[v(x, b) + v(x, -b) + \int_{-b}^b e_y \operatorname{sign}(y - \xi) d\xi \right],$$

яке за необхідних умов погодження переміщень з деформаціями на границі області за допомогою диференціювання еквівалентно зводиться до відомого диференціального рівняння суцільності в деформаціях [6]. З умов погодження визначають невідомі величини сумарних переміщень через деформації на границі $u(a, y) + u(-a, y)$ та $v(x, b) + v(x, -b)$.

1. Визак В. М. Метод прямого интегрирования уравнений осесимметричной задачи термоупругости в напряжениях для неограниченных областей // Прикл. механика. – 1999. – № 3. – С. 49–56.
2. Визак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
3. Визак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності для ортотропних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 24–29.
4. Визак В. М. Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області // Доп. НАН України. – 1994. – № 12. – С. 58–62.
5. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
6. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
7. Vihak V. M. Solution of the Thermoelastic Problem for a Cylinder in the Case of a Two-Dimensional Nonaxisymmetric Temperature Field // ZAMM. – 1996. – No. 1. – С. 35–43.
8. Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinsky A. V. The Solution of the Plane Thermoelasticity Problem for a Rectangular Domain // J. of Thermal Stresses. – 1998. – Vol. 21, No. 5. – С. 545–561.

SOLUTIONS TO THE PLANE ELASTICITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR A RECTANGULAR REGION

Vasyl Vihak, Yuriy Tokovyi, Andriy Rychagivsky

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

With the help of the direct integration method of equilibrium and compatibility equations in terms of stresses and the Cauchy relations the exact solutions to quasi-static plane elasticity and thermoelasticity problems for a rectangular region are found.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.99

УДК 539.375

МОДЕЛЬ ТРІЩИНИ В ПЛАСТИНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Іван Шацький

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Продуктивним засобом моделювання тріщин у пластинках з одностороннім гнучким покриттям є формулювання та розв'язування задач в областях з розрізами, береги яких з'єднані шарнірно на лицьовій поверхні. Такий підхід пропонували раніше [4] для випадку симетричного розтягу безмежної пластини з прямолінійною тріщиною. Оцінюючи граничну рівновагу пластинки з тріщиною, міцність покриття приймали необмеженою. Узагальнимо згадану концепцію – розрахункову схему для криволінійної тріщини в пластинці з гнучким покриттям при взаємодії симетричної та антисиметричної мод деформування. Несучу здатність композиції аналізуватимемо з урахуванням обмеженої міцності покриття.

Формулювання задачі та модель тріщини. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену наскрізною тріщиною, розташованою вздовж криволінійного контура L (рис. 1). На одну з лицьових поверхонь пластинки $z = sh$ ($s = +1$ або $s = -1$) нанесене гнучке покриття, яке деформується сумісно з основою і здатне витримати досить великі напруження.

Навантаження пластинки відбувається мембранними зусиллями розтягу та зсуву. Плоский напружений стан, який відповідає цим силам у бездефектній пластинці, вважаємо заданим. Формулюємо задачу про вплив покриття на пружну та граничну рівновагу пластинки з тріщиною.

Тріщину в пластинці з одностороннім гнучким покриттям моделюємо розрізом, береги якого з'єднані шарнірно у лицьовій поверхні пластинки. У такому разі порушується симетрія напружень по товщині пластинки і в околі розрізу виникає місцевий вигин. До описання цього явища, крім традиційного рівняння плоского напруженого стану, залучаємо і бігармонійне рівняння згину пластин за теорією Кірхгофа:

$$\Delta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L, \quad (1)$$

де φ – функція Ері, w – прогин пластинки, Δ – оператор Лапласа.

Перейдемо до розгляду крайових умов на розрізі. Кінематичну та силову схеми взаємодії у шарнірному з'єднанні ілюструє рис. 2.

З умови неперервності нормальних переміщень у шарнірі маємо:

$$[u_n] - sh[\vartheta_n] = 0, \quad t \in L, \quad (2)$$

де $[u_n]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні пластинки, $[\vartheta_n] = [\partial w / \partial n]$ – стрибок кута повороту нормалі, t – дугова координата.

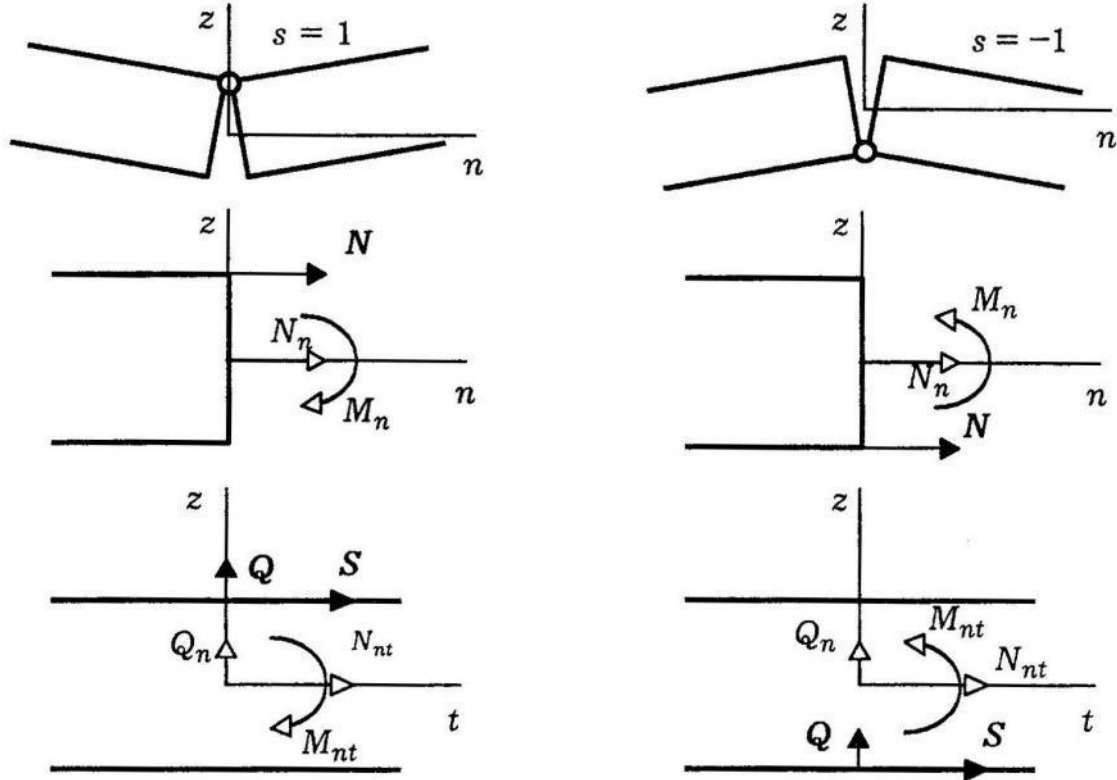


Рис. 2.

Забезпечимо іще неперервність дотичних переміщень при переході через шарнір на контурі L . Тоді $[w] = 0$, $[u_t] - sh[\vartheta_t] = 0$. Враховуючи, що $\vartheta_t = \partial w / \partial t$, остаточно одержуємо

$$[w] = 0, [u_t] = 0, t \in L. \quad (3)$$

Отож, враховуючи гіпотезу жорсткої нормалі, ми отримали цікавий наслідок: покриття блокує взаємне проковзування берегів розрізу вздовж осей z і t , і пластинка поводить себе як суцільне тіло.

Нормальне та дотичні зусилля N, S, Q , які діють у покритті на лінії тріщини, замінимо їх статичними еквівалентами: мембранними зусиллями N_n, N_{nt} , перерізуючою силою Q_n та компенсуючими згинним M_n і крутним M_{nt} моментами. Тоді за правилами трансляції сил

$$N_n = N, M_n = sh N, N_{nt} = S, M_{nt} = sh S, Q_n = Q.$$

Звідси одержуємо силову крайову умову на розрізі

$$M_n - sh N_n = 0, t \in L; \quad (4)$$

та вирази зусиль у покритті через механічні змінні на берегах тріщини

$$N = N_n, S = N_{nt}, Q = Q_n^* - sh \partial N_{nt} / \partial t, t \in L \quad (5)$$

($Q_n^* = Q_n + \partial M_{nt} / \partial t$ – узагальнена перерізуюча сила).

При заданому навантаженні на безмежності (1)–(4) – крайова задача для пари бігармонійних операторів із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізі.

Інтегральне рівняння задачі. Сформульовану задачу доцільно розв’язувати методом сингулярних інтегральних рівнянь. Зважаючи на результат (3), запишемо інтегральні зображення зусиль та моментів на розрізі через невідомі стрибки переміщення і кута повороту нормалі

$$N_n(t) = N_n^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L K_{11}(\xi, t) [u_n]'(\xi) d\xi,$$

$$N_{nt}(t) = N_{nt}^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L K_{21}(\xi, t) [u_n]'(\xi) d\xi,$$

$$M_n(t) = -\frac{Da}{4\pi} \int_L K_{33}(\xi, t) [\vartheta_n]'(\xi) d\xi, \quad Q_n^*(t) = -\frac{Da}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_L K_{43}(\xi, t) [\vartheta_n]'(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Тут $N_n^0(t)$, $N_{nt}^0(t)$ – відомі компоненти основного напруженого стану, $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, $a = (3 + \nu)(1 - \nu)$, E і ν модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки. Ядра інтегралів (6) виражаються через фундаментальні розв’язки бігармонійних рівнянь (1) та залежать від геометрії контура L [2, 3].

Підставляючи вирази (6) у крайову умову (4) та вилучаючи за допомогою (2) функцію $[\vartheta_n]$, приходимо до інтегрального рівняння для розкриття тріщини

$$\frac{B}{4\pi} \int_L \{K_{11}(\xi, t) + \kappa^{-1} K_{33}(\xi, t)\} [u_n]'(\xi) d\xi = -N_n^0(t), \quad t \in L; [u_n](\partial L) = 0,$$

де $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$.

За знайденим $[u_n]$ відповідно до (2) обчислюємо $[\vartheta_n]$ та значення коефіцієнтів інтенсивності нормального зусилля K_N та згинного моменту K_M (тут і далі використані позначення [1]). Крім того, скориставшись (5), знаходимо зусилля в шарнірі

$$N = \frac{1}{1 + \kappa^{-1}} \left\langle \kappa^{-1} N_n^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L \{K_{11}(\xi, t) - K_{33}(\xi, t)\} [u_n]'(\xi) d\xi \right\rangle,$$

$$S = N_{nt}^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L K_{21}(\xi, t) [u_n]'(\xi) d\xi,$$

$$Q = -sh \frac{\partial N_{nt}^0}{\partial t} - \frac{sB}{4\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial t} \{K_{21}(\xi, t) + \kappa^{-1} K_{43}(\xi, t)\} [u_n]'(\xi) d\xi.$$

Оцінка граничної рівноваги. Уявні два механізми руйнування розглянутої композиції: 1) розповсюдження тріщини розтягу-згину без порушення цілісності покриття та 2) розрив покриття з, можливо, поширенням уже наскрізної тріщини.

Нехай зовнішнє навантаження контролюється деяким параметром p . Граничний стан пластини за першим із зазначених механізмів руйнування ($p = p_{1*}$) оцінимо, застосовуючи енергетичний критерій лінійної механіки руйнування при комбінованому розтязі та згині $F_1(K_N, K_M) = C_{1*}$, структура якого подана в працях [1, 4].

Доречним є таке зауваження. Із умов (3) випливає, що поблизу вершини тріщини при незруйнованому шарнірі завжди відсутні коефіцієнти інтенсивності зсувного мембранного зусилля та крутного моменту: $K_S = 0$, $K_H = 0$. Це означає, що тріщина такого типу розповсюджуватиметься вздовж прямої, дотичної до контура L у його вершині. Іншими словами, гнучке покриття, яке допомагає лише стрибку нормальних переміщень, виступає стабілізатором траєкторії руху тріщини. Зрозуміло, що цей висновок є, передусім, продуктом гіпотез Кірхгофа, прийнятих у нашій моделі, хоча навряд чи далеким від реальності.

Граничне зусилля $p = p_{2*}$, яке відповідає небезпечному стану покриття, знайдемо, використавши класичну теорію міцності:

$$\sup_{t \in L} F_2(N, S, Q) = C_{2*},$$

наприклад, $\sup_{t \in L} N = N_*$ – за розтягу чи $\sup_{t \in L} \sqrt{S^2 + Q^2} = S_*$ – за зсуву.

За руйнівне навантаження варто прийняти, очевидно, менше з p_{1*} та p_{2*} .

З метою порівняльного аналізу впливу покриття на міцність пластинки з тріщиною будемо використовувати і значення $p = p_{3*}$, яке відповідає критичному стану тріщини в пластинці без покриття (а точніше старту наскрізної тріщини в покритій пластинці) і може бути обчислене за будь-яким з критеріїв вигляду

$$F_3(K_N, K_S) = C_{3*},$$

де K_N, K_S коефіцієнти інтенсивності мембранних зусиль, знайдені з розв'язку класичної задачі плоского напруженого стану пластинки з наскрізним розрізом.

Приклад. Розглянемо випадок прямолінійної тріщини завдовжки $2l$, розташованої на осі абсцис: $L = (-l, l)$, $t = x$, $n = y$. Тоді $K_{11}(\xi, x) = K_{33}(\xi, x) =$

$= (\xi - x)^{-1}$, $K_{21}(\xi, x) = K_{43}(\xi, x) = 0$ і розв'язок задачі будується в замкнутому вигляді.

За умов розтягу пластини перпендикулярно до дефекту ($N_y^0 = p$, $N_{xy}^0 = 0$) одержуємо результати для тріщини з шарнірно з'єднаними берегами [4]

$$K_N = \frac{\kappa p \sqrt{l}}{1 + \kappa}, \quad K_M = -\frac{sp h \sqrt{l}}{1 + \kappa}, \quad N = \frac{p}{1 + \kappa}, \quad S = 0, \quad Q = 0;$$

$$p_{1*} = 2h \sqrt{2(1 + \kappa^{-1})E\gamma_* / (\pi l)}, \quad p_{2*} = N_*;$$

та для наскрізної тріщини

$$K_N = p \sqrt{l}, \quad K_M = 0, \quad p_{3*} = 2h \sqrt{2E\gamma_* / (\pi l)}$$

(γ_* — ефективна поверхнева енергія матеріалу пластинки).

За умов чистого зсуву ($N_y^0 = 0$, $N_{xy}^0 = \tau$) маємо відповідно

$$K_N = 0, \quad K_M = 0, \quad N = 0, \quad S = \tau, \quad Q = 0; \quad \tau_{1*} = \infty, \quad \tau_{2*} = S_*;$$

та

$$K_N = 0, \quad K_S = \tau \sqrt{l}, \quad \tau_{3*} = 2h K_{2c} / \sqrt{l}.$$

На рис. 3 показані залежності граничних навантажень p_{i*} , τ_{i*} від напівдовжини тріщини. Нумерація кривих узгоджена з індексом i .

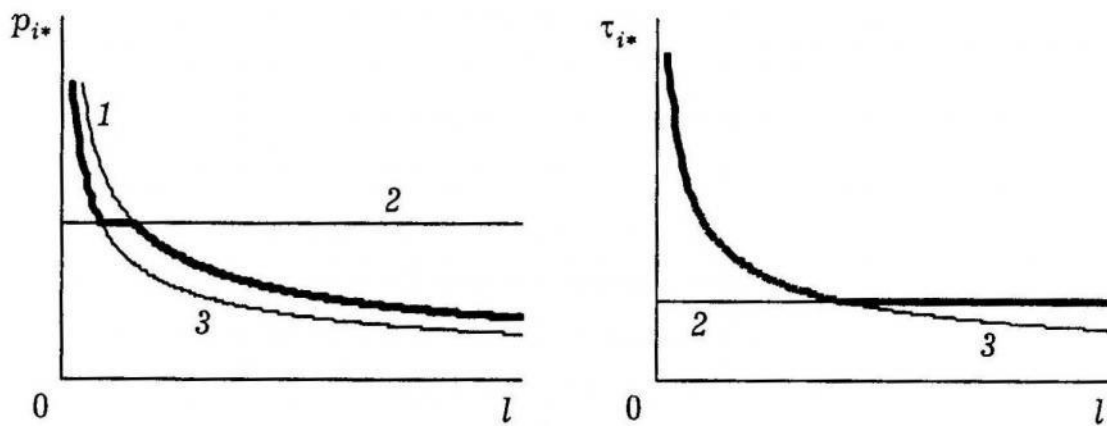


Рис. 3.

Картина руйнування за розтягу виглядає так. Для довгих дефектів ($p_{3*} < p_{1*} < p_{2*}$) пластинка руйнується шляхом поширення тріщини, граничний стан у покритті не досягається. Для тріщин середньої довжини ($p_{3*} < p_{2*} < p_{1*}$) відбувається розтріскування покриття з наступним нестабільним розвитком наскрізної тріщини. Для коротких тріщин ($p_{2*} < p_{3*} < p_{1*}$) розрив покриття не призводить до розвитку тріщини. У

цьому випадку допускається підростання навантаження до лінії 3. За зсуву маємо аналогічну ситуацію з тою лише різницею, що тріщина не може статувати без руйнування покриття.

Отже, покриття підвищує несучу здатність пластинки з тріщиною лише у випадку значної довжини дефекту або високої міцності підкріплення.

1. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 1980. – 127 с.
4. Шацкий И. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1989. – № 5. – С. 163–165.

MODEL OF CRACK IN PLATE WITH FLEXIBLE COVERING

Ivan Shatsky

*Ivano-Frankivsk department of Pidstryhach Institute of applied problems
of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

The flexible covering influence on a strength of semi-infinite plates with curved cracks has been investigated in two-dimensional statement. A crack in a plate with one-side covering is considered like a slit which sides are joined along the edges with hinges. Taking into account limited strength of covering the diagrams of limit equilibrium for infinite plate with rectangular crack in tension and sheer are constructed.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.1999

УДК 539.377

МЕТОДИКА ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ НАГРІВАННЯ КОНВЕКТИВНИМ СПОСОБОМ І ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Микола Гачкевич*, Орест Гуменчук*, Борис Чорний**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

**Львівський факультет Дніпропетровського державного
технічного університету

Запропоновано числово-аналітичну методику визначення оптимальних за напруженнями режимів нагрівання конвективним способом і джерелами тепла тонких кусково-однорідних оболонок обертання для заданих областей допустимої зміни температури і компонент тензора напружень.

Розглянемо тонку оболонку сталої товщини $2h$, яка складається з n однорідних частин і займає в просторі E^3 деяку область Ω . Введемо змішану ортогональну систему координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, у якій α_j , $j = 1, 2$ є лініями головних кривин серединної поверхні оболонки, а γ – нормаллю до цієї поверхні. За функцію керування виберемо температуру зовнішнього середовища, що змінюється в часі, а за критерій оптимальності – мінімум максимальних нормальних напружень.

Приймемо, що для k -ї частини оболонки ($k = \overline{1, l}$) задані обмеження на температуру нагрівального середовища і зовнішньої поверхні оболонки, а також на компоненти складових тензора напружень у вигляді таких нерівностей:

$$T_p^\pm \leq T_k^\pm \leq T_0^\pm; \quad T_{00}^\pm \leq \dot{T}_k^\pm \leq T_{**}^\pm; \quad T_s^{*\pm} \leq T_{s,k}^\pm \leq T_s^{***\pm}; \quad (1)$$

$$\sigma_{0i,k}^\pm \leq \sigma_{i,k}^\pm \leq \sigma_{*i,k}^\pm, \quad (2)$$

де знаки «+», «-» використано для позначення величин відповідно на зовнішній і внутрішній поверхнях, а знаком « $\cdot$ » позначена похідна за часом; $T_k^\pm$ і $T_{s,k}^\pm$ – температура k -ї частини оболонки і зовнішнього середовища; $\sigma_{0i,k}^\pm \leq 0$, $\sigma_{*i,k}^\pm \geq 0$; $\sigma_{i,k}$ – нормальні напруження ($i = 1$ – меридіональні, $i = 2$ – кільцеві).

Оболонку необхідно нагріти внутрішніми джерелами тепла і конвективним способом від сталої початкової температури T_p до максимальної T_0 на поверхні $\gamma = h$ і далі до кінцевої T_* ($T_* \leq T_0$), щоб виконувались обмеження (1), (2) і був забезпечений мінімум функціонала

$$I = \max (\sigma_{i,k}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)), \quad \alpha_1, \alpha_2, \gamma \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq t_*, \quad (3)$$

(який характеризує міцність розглядуваних скляних оболонок або виготовлених з матеріалів, близьких за механічними властивостями до скла). Роз-

глядувані теплові режими нагрівання можуть задовольняти додаткові умови вигляду

$$F(\alpha_{j*}, \gamma_*, T_k, T_0, \dot{T}_k, T_*, t_0, t_*) \leq 0. \quad (4)$$

Такі умови відображають специфіку технології термообробки (тут α_{j*} , γ_* – координати фіксованого перерізу оболонки; t_0 , t_* – відповідно мінімальні часи досягнення максимальної T_0 і кінцевої T_* температур зовнішньої поверхні оболонки ($\gamma = h$)). Зокрема, умовами вигляду (4) є відомі цільові умови щодо температури оболонки кольорового кінескопа в тепловому режимі її знегажування (задання потрібних для знегажування значень початкової, максимальної і кінцевої температури на зовнішній поверхні оболонки) [1].

Методику розв'язування сформульованої оптимізаційної задачі будують методом покрокової параметричної оптимізації. Для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму функціонала (3) (критерію оптимальності) застосовуємо метод локальних варіацій [6] у просторі станів функції керування. Такий спосіб оптимізації складається з двох ітераційних процесів: процесу варіювання значення функції керування $T_{s,k} \equiv \{f_k(t_i)\}$ в дискретні моменти часу при фіксованому кроці варіювання δ і процесу дроблення цього кроку.

У наближеннях шукану функцію керування $f_{k,n-1}(t_i)$ вибираємо так, щоб виконувались теплові умови (1), (4) і обмеження (2). У цьому випадку потрібно мати розв'язок прямої задачі, тобто мати значення температури і напружень за заданих умов конвективного теплообміну. Обмеження (2) виконують шляхом порівняння компонент напружень, визначених числово-аналітичним методом з прямої задачі з заданими. Для відшукування наступного наближення функції керування $f_{k,n}(t_i)$ необхідно для трьох значень цієї функції $f_{k,n-1}(t_i) \pm \delta_{k,n-1}$; $f_{k,n-1}(t_i)$ (отриманої в попередньому наближенні) обчислити з використанням розв'язку прямої задачі значення критерію оптимальності (3). Крок $\delta_{k,n-1}$ варіювання (достатньо мале додатне число, стає для конкретного n) практично приймають при $n = 2$ не більшим від максимального градієнта функції керування в початковому наближенні. За шукану функцію $f_{k,n}(t_i)$ вибираємо ту, для якої значення критерію (3) є мінімальним, і виконуються умови (1), (2), (4).

Чергові наближення функції керування отримують з використанням попереднього алгоритму з поділом кроку $\delta_{k,n} = \delta_{k,n-1}/2$, $n = 2, 3, 4, \dots$. Ітераційний процес продовжують до виконання такої умови:

$$\{f_{k,n+1}(t_i)\} \equiv \{f_{k,n}(t_i)\}, \quad \delta_{k,n} \leq \varepsilon, \quad (5)$$

де ε – задана мала величина.

Для запропонованого ітераційного алгоритму оптимізації суттєвим є вибір початкового наближення значень функції керування, що визначає збіжність ітераційного процесу. Для побудови такого наближення розроблено ітераційний алгоритм, що ґрунтується на використанні вихідної функції керування оптимального за напруженнями режиму конвективного нагрівання однорідної сферичної оболонки [2] з наступним його уточненням.

У наведеному алгоритмі оптимізації для визначення початкового та k -го наближення функції керування використовуємо розв'язок прямої за-

дачі. Зазначимо, що пряму задачу можна сформулювати на основі довільної термомеханічної теорії. Ми за таку вибрали теорію незв'язаної термопружності при залежних від температури коефіцієнтах теплового розширення, яку часто використовують для опису механічної поведінки скляних оболонкових конструкцій [3].

На поверхнях контакту різномірних частин оболонки виконуються умови ідеального теплового і механічного спряження. Механічні граничні умови можна сформулювати як у напруженнях, так і в переміщеннях [2, 3].

Вихідні співвідношення формують як у системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, так і в канонічних (r, s) [2]. У цьому випадку для отримання розв'язку рівняння теплопровідності використовуємо поліноміальну апроксимацію розподілу температури по товщинній координаті [4] та метод сіток для відшукування відповідних інтегральних характеристик у поданнях при безумовно стійкій неявній різницевій схемі. Використовуючи дискретні значення інтегральних характеристик, на основі відомих співвідношень визначаємо температуру в вузлах сітки. Потім за структурою загальних розв'язків ключових рівнянь механіки для розглядуваного типу оболонок [2], а також враховуючи апроксимацію температурної залежності коефіцієнта лінійного розширення кусково-лінійними функціями, визначаємо дискретні значення ключових функцій, зусиль, моментів і напружень для кожного вузла.

У багатьох випадках кусково-однорідні скляні оболонки виготовляють з матеріалів, що мають близькі теплофізичні характеристики. Для таких оболонок при незалежних від координати s джерелах тепла можна побудувати ефективні режими цільового нагрівання однорідною температурою зовнішнього середовища (яка залежить лише від часу t). В цьому випадку зміна температури вздовж меридіональної координати s незначна і нею можна знехтувати. Тому можна прийняти, що температура в кожній складовій частині оболонки є функцією товщини γ і часу t , а переміщення – функціями часу і координати γ, s . Тоді система вихідних диференціальних рівнянь буде системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Зауважимо, що її розв'язок можна відшукати ефективніше методом найменших квадратів [5] при кінцево-елементній апроксимації функції $T_s(t)$ (порівняно з викладеним вище різницеvim відносно затрат машинного часу й оперативної пам'яті комп'ютера). У цьому разі суттєво спрощується процедура числового визначення параметрів термонапруженого стану кусково-однорідної оболонки (процедура розв'язування прямої задачі), яку використовують у запропонованому алгоритмі оптимізації.

Наприклад, знайдено оптимальний за напруженням режим однорідного нагрівання зовнішнім середовищем і заданими джерелами тепла вільної від силового навантаження кусково-однорідної циліндричної оболонки. Оболонка складається з трьох різних частин. Внутрішня її поверхня теплоізолювана. Функцією керування є змінна в часі температура зовнішньої поверхні оболонки $T^+(t)$, що задовольняє такі умови:

$$T^+(0) = T_p; \quad T^+(t_0) = T_0; \quad \frac{dT^+(t)}{dt} \leq 10^\circ\text{C}, \quad \frac{dT^+(t_0)}{dt} = 0, \quad (6)$$

де t_0 – час нагрівання оболонки від початкової температури T_p до максимальної T_0 , $V_T = 10^\circ\text{C}$ – задана швидкість нагрівання. Умови (6) є частковим

випадком умов (1), (4) (перші три умови – (1), а четверта – (4)). В оболонці діють джерела тепла сталої густини $Q_k = 10^5$ Вт/м³. Складові тензора напружень задовольняють обмеження (2), а за критерій оптимальності приймають мінімум функціонала (3).

Числові дослідження проведені для складеної оболонки радіусом $R = 0.25$ м і товщиною $2h = 0.014$ м, складові частини якої виготовлені зі скла з фізико-механічними характеристиками, описаними в [1]. Дослідження засвідчили, що максимальні температурні напруження виникають у зоні спряження різнорідних частин оболонки. Унаслідок нагрівання від початкової температури до заданої розтягувальні температурні напруження є на внутрішній поверхні оболонки, а максимальні – кільцеві. Оптимальні режими нагрівання розраховані за умови, що величина допустимих розтягувальних напружень для всіх компонент однакова. Використання додаткового підігрівання названими джерелами тепла в розглядуваному випадку дає змогу скоротити тривалість режиму на 20 хв при тій же максимальній температурі нагрівання і тих самих максимальних значеннях складових тензора напружень порівняно з режимом, в якому є лише конвективне нагрівання.

1. Будз С. Ф., Гачкевич Н. Г. Оптимизация термообработки кусочно-однородных оболочек ЭЛП с учетом температурной зависимости характеристик материала // Физико-химическая механика материалов, 1987. – № 5. – С. 111–113.
2. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с.
3. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – К.: Наук. думка, 1981. – 344 с.
4. Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 54–59.
5. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1983. – 489 с.
6. Черноусько Ф. М., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. – 225 с.

OPTIMAL HEATING OF PIECE-WISE HOMOGENEOUS SHELLS OF REVOLUTION BY CONVECTION AND HEAT SOURCES

Mykola Gachkevich*, Orest Humenchuk*, Borys Chornyi**

**Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

***The Lviv faculty of the Dnipropetrovsk state technical university*

With use of numerical methods the technique for stress-optimum heating of piece-wise homogeneous shells of revolution by convection or heat sources is developed. Local optimization criterium and continuous heating sources are considered.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.1999

УДК 539.3

**ТЕРМОМЕХАНІКА НАМАГНІЧУВАНИХ І ПОЛЯРИЗОВНИХ
ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ У ВИПАДКУ ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНИХ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ**

Олександр Гачкевич*, Зигмунт Касперський**

**Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

***Політехніка Опольська, Польща*

Пропонуємо математичну модель термомеханіки електропровідних кусково-однорідних тіл, складові частини яких мають різні електрофізичні, теплофізичні і механічні характеристики матеріалу. Тіла зазнають дії квазіусталеного електромагнітного поля, створеного системою квазіусталених електричних струмів, розміщених поза тілом і заданих виразом [1, 4]

$$\begin{aligned}\vec{j}^{(0)}(\vec{r}, t) &= \vec{f}(\vec{r}, t) \cos(\omega t + \psi_0) \equiv \operatorname{Re} \vec{j}_*^{(0)}(\vec{r}, t), \\ \vec{j}_*^{(0)}(\vec{r}, t) &= \vec{f}(\vec{r}, t) e^{i(\omega t + \psi_0)}, \quad \operatorname{div} \vec{f}(\vec{r}, t) = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки; ω – колова частота; t – час; ψ_0 – початкова фаза; $\vec{f}(\vec{r}, t)$ – модульована амплітуда (функція мало змінна в часі на періоді $f_* = \frac{2\pi}{\omega}$ електромагнітних коливань так, що виконується умова

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{r}, t)}{\partial t} \ll \omega |\vec{f}(\vec{r}, t)|.\tag{2}$$

На поверхні S тіла можуть бути задані значення вектора напруженості електричного $\vec{E}^{(0)}(\vec{r}, t)$ або магнітного $\vec{H}^{(0)}(\vec{r}, t)$ поля у вигляді (1).

При розглядюваних величинах параметрів електромагнітної дії ($H_0 \leq 10^7 \text{ Ам}^{-1}$, де H_0 – характерна напруженість зовнішнього магнітного поля) можна прийняти, що переміщення та деформації і їхні швидкості в тілі настільки малі, що правильними є залежності лінійної теорії пружності, а вплив руху середовища на характеристики електромагнітного поля можна вважати несуттєвим [1, 6]. Розглянемо матеріали, для яких можна знехтувати електромеханічними і термоелектричними ефектами. В результаті приймаємо, що електромагнітне поле є зовнішньою дією щодо тіла, а його вплив на процеси теплопровідності і деформування обмежені виробництвом тепла і створенням силових факторів (пондеромоторних сил і моментів). У такому випадку вихідні залежності для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові і механічні процеси, формулюємо за два етапи [1, 2]. На першому етапі записуємо в квазіусталеному наближенні рівняння на параметри електромагнітного поля у випадку запропонованих аналітичних апроксимацій залежностей між індукціями і напружен-

ностями електричного і магнітного полів, які враховують електрофізичні властивості тіл. Далі записуємо вирази для тепловиділень і пондеромоторних факторів як функцій від електромагнітних параметрів. На другому етапі формулюємо термомеханічні співвідношення для визначення параметрів, що описують термопружний стан за заданих початкових умов на температуру та крайових умов на температуру і складові напружень.

Система рівнянь Максвелла [4, 5], які описують електромагнітне поле, доповнюється конститутивними зв'язками, що характеризують магнітні, поляризаційні властивості тіла та його електропровідність, тобто залежності між електричною $\vec{D}$, магнітною $\vec{B}$ індукціями (зміщеннями) та струмом провідності $\vec{j}$ і напруженостями $\vec{E}$ і $\vec{H}$.

Для широкого класу ізотропних матеріалів вектори $\vec{D}$ і $\vec{B}$ є паралельні відповідно до $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а $\vec{j}$ – до $\vec{E}$. Для цього випадку конститутивні рівняння можна записати у вигляді [1, 4]

$$\vec{D} = \epsilon(E) \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(H) \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3)$$

де $R = |\vec{R}|$; ϵ, μ – діелектрична і магнітна проникності; σ – коефіцієнт електропровідності. Ці характеристики отримують експериментально або теоретично для конкретних моделей твердих тіл [4]. Залежності (3) визначають на основі особливостей електричних і магнітних властивостей матеріалів для окреслених амплітудно-частотних параметрів зовнішньої електромагнітної дії [1, 4, 5]. Матеріали за цими властивостями поділяють в електротехніці на кілька типів [4, 5]. Найважливіші з них (які ми розглядатимемо надалі) є: недіелектричні неферомагнітні (ϵ і μ не залежать від $\vec{E}$ і $\vec{H}$; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_*$, $\mu = \mu_0 \mu_*$, де ϵ_* , μ_* – відповідно сталі відносні діелектрична і магнітна проникності); недіелектричні феромагнітні (ϵ не залежить від $\vec{E}$ ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_*$), $\mu = \mu(H)$); діелектричні неферомагнітні – тіла з малою електропровідністю ($\epsilon = \epsilon(E)$, μ не залежить від H ($\mu = \mu_0 \mu_*$)). Як звичайно, перші два типи тіл мають високу електропровідність ($\sigma \sim MSm$). Третій тип має малу провідність ($\sigma \leq 10^2 Sm$) і поляризаційні властивості, близькі до діелектриків.

Наведемо апроксимацію залежності між B і H вигляду петлі гістерезису в співвідношеннях (3) для недіелектричних феромагнітних тіл. Для майже гармонічної (в часі) напруженості магнітного поля частоти $m\omega$:

$$\vec{H}(t) = [A(t) \cos \omega t + C(t) \sin m\omega t] \vec{e}_H,$$

наближений аналітичний вираз петлі гістерезису можна записати у вигляді [1, 2]

$$\vec{B}(t) \equiv B(h) \vec{e}_H = (\mu_0 h + \beta \arctg \alpha h) \vec{e}_H, \quad (4)$$

де $h(t) = \sqrt{1 - \kappa_0^2} H - \frac{\kappa_0}{m\omega} \frac{\partial H}{\partial t}$, $m = \overline{1, \infty}$; $\kappa_0 = H_c/H_m$ для $H \leq H_m$ і $\kappa_0 = H_c/H_0$ для $H > H_m$; H_0, H_m – характерні значення напруженостей магнітного поля на поверхні тіла і при насиченому намагніченні, причому згідно з (2) H_0 є стала на періоді f_* ; $\alpha = (\mu_p - 1)\mu_0/\beta$, $\beta = 2B_s/\pi$; μ_p – по-

чаткова магнітна проникність; H_c – коерцитивна сила; B_s – індукція насичення; $\vec{e}_H = \vec{H}/H$ – орт у напрямі вектора $\vec{H}$. У випадку $\kappa_0 = 0$ залежність (4) описує основну криву намагнічення (криву намагнічення для тіл, які практично не мають гістерезисної залежності між B і H – магнітом'яких тіл).

Аналогічний вигляд може мати залежність $D = D(E)$ для діелектричних неферомагнітних тіл. Для таких тіл часто в літературі використовують залежність, отриману на основі відомого подання вектора поляризації у вигляді $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{P}_m + \vec{P}_p$, де $\vec{P}_m$, $\vec{P}_p$ – відповідно вектори миттєвої (пружної) і релаксаційної поляризації, що пов'язані з напруженістю $\vec{E}$ співвідношеннями

$$\vec{P}_m = \epsilon_0 \kappa_{*m} \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{P}_p}{\partial t} = (\epsilon_0 \kappa_{*p} \vec{E} - \vec{P}_p) / \tau_{*p}. \quad (5)$$

Тут κ_{*p} , κ_{*m} – відносні діелектричні сприйнятливості, що характеризують миттєву та релаксаційну поляризації; τ_{*p} – час релаксації [2, 4, 5].

Якщо використаємо теорему Умова – Пойнтінга та принципи електродинаміки і фізики твердого тіла, то отримаємо вирази для тепловиділень (зумовлених теплопровідністю, переполяризацією і перемагнічуванням) і пондеромоторних сил (внаслідок паралельності векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ та $\vec{B}$ і $\vec{H}$ відповідні пондеромоторні моменти дорівнюють нулю). Згідно зі структурою параметрів, що описують квазіусталене електромагнітне поле, тепловиділення і пондеромоторні сили мають вигляд суми повільно змінюваних у часі $Q^{(1)}$ і $\vec{F}^{(1)}$ (що збігаються з усередненими за період) і квазіусталених $Q^{(2)}$ та $\vec{F}^{(2)}$ складових [1, 2]. Відповідно до цього температуру і компоненти тензора напружень шукаємо у вигляді

$$W = W^{(1)} + W^{(2)}, \quad W = \{T, \hat{\sigma}\}. \quad (6)$$

Повільно змінювані в часі складові температури і напружень $T^{(1)}$, $\hat{\sigma}^{(1)}$ визначаємо в квазістатичному формулюванні, нехтуючи зв'язаністю полів деформації і температури [3], а $T^{(2)}$, $\hat{\sigma}^{(2)}$ – у квазіусталеному поданні

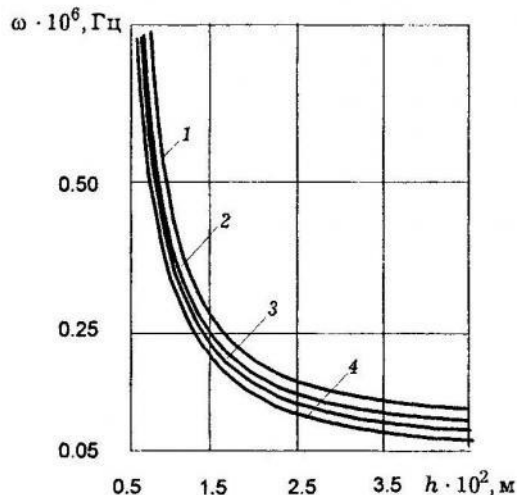
$$W^{(2)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} [W^{(2m)}(\vec{r}, t) e^{2im\omega t}] \quad (7)$$

(тут $W^{(2m)}(\vec{r}, t) = \{T^{(2m)}(\vec{r}, t), \hat{\sigma}^{(2m)}(\vec{r}, t)\}$ – повільно змінювані на періоді f_* функції) з відповідної динамічної задачі термопружності [3].

Для кожного з типів тіл побудовано розрахункові схеми визначення параметрів і запропоновано на підставі методу ітерації, спектральних розкладів, інтегральних перетворень і щодо розв'язування відповідних задач математичної фізики [1, 2]. Проведено комплекс досліджень впливу властивостей матеріалу складових частин тіл і амплітудно-частотних параметрів поля на особливості механічної поведінки кусково-однорідних тіл з плоско-

паралельними і циліндричними межами розділу, зокрема на резонансні явища в них.

На рисунку показані залежності першої резонансної товщинної частоти ω_1 електромагнітного поля від товщини біметалічного шару (сталь Х18Н9Т – мідь). Крива 1 відповідає випадку $K_h = h_2/h_1 = 0$ (шар зі сталі), крива 2 – $K_h = 1$, крива 3 – $K_h = 5$, крива 4 – $K_h = \infty$ (шар з міді). На верхній основі $z = -h_1$ шар вільний від силового навантаження, на спаянній умови ідеального механічного контакту, а на нижній основі $z = h_2$ переміщення дорівнюють нулю ($u_z = 0$).



Резонансні явища в кусково-однорідних тілах мають складний характер, що є результатом взаємозв'язку наявних процесів та наслідком дії електромагнітного поля на кожен зі складових частин (які відрізняються фізичними властивостями).

1. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазистационарных электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
2. Гачкевич О. Р., Касперський З., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф. Математичне моделювання та оптимізація зумовлених квазіусталеним електромагнітним полем фізико-механічних процесів в електропровідних тілах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 66–72.
3. Коваленко А. Д. Избранные труды. – К.: Наук. думка, 1976. – 764 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
5. Тамм Н. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
6. Moon F. C.: Problems in magneto-solid-mechanics // Mechanics Today. – 1978. – Vol. 4. – P. 307–390.

TERMOMECHANICS OF POLARIZABLE AND MAGNETIZABLE ELECTROCONDUCTIVE BODIES SUBJECTED TO QUASISTEADY ELECTROMAGNETIC FIELDS

Aleksandr Gachkevich*, Zygmunt Kasperski**

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

**Polytechnic Opolska, Poland

Mathematical theory variant of description of electromagnetic, temperature and mechanical fields in nonferromagnetic, ferromagnetic and low-electroconductive bodies under the action of external quasisteady electromagnetic fields is suggested.

Стаття надійшла до редколегії 29.11.1999

УДК 539.377

МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНІКИ ТІЛ НИЗЬКОЇ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ В КВАЗІУСТАЛЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛЯХ РАДІО- ТА ІНФРАЧЕРВОНОГО ДІАПАЗОНУ

Олександр Гачкевич, Тарас Курницький, Ростислав Терлецький

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Одним із актуальних напрямів сучасної механіки деформівного твердого тіла є вивчення термомеханічної поведінки тіл, спричиненої дією зовнішнього електромагнітного поля. Для цього є важливим створення конкретних розрахункових моделей для певних типів тіл, що суттєво відрізняються своїми електрофізичними властивостями. Широко розповсюдженим класом таких тіл є тіла низької електропровідності (ТНЕ), для матеріалу яких характерна поляризація і мала електропровідність ($\sigma \leq 10^2 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$) у радіочастотному (до 10^{11} Гц) і інфрачервоному ($10^{11} \div 10^{15}$ Гц) діапазонах. Струми зміщення, що виникають під дією поля в таких тілах, є одного порядку (чи більше) зі струмами провідності, і для вектора поляризації $\vec{P}$ властиві миттєва (пружна) $\vec{P}_m$ і релаксаційна $\vec{P}_p$ складові [1]. Зв'язок миттєвої поляризації з напруженістю $\vec{E}$ електричного поля є лінійним

$$\vec{P}_m = \epsilon_0 \chi_m \vec{E}. \quad (1)$$

Релаксаційна складова $\vec{P}_p$ пов'язана з $\vec{E}$ відповідним еволюційним рівнянням

$$\frac{\partial \vec{P}_p}{\partial t} = \frac{1}{\tau_p} (\epsilon_0 \chi_p \vec{E} - \vec{P}_p), \quad (2)$$

де χ_m, χ_p – діелектричні проникності; τ_p – час релаксації поляризації; ϵ_0 – електродинамічна стала. Якщо частоти зовнішнього електромагнітного поля $\omega \ll 1/\tau_p$, то залежність між електричним зміщенням $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ($\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_m$) і напруженістю електричного поля є еліптичною, а відповідні характеристики поляризації ϵ', ϵ'' ($\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon''$ – комплексна діелектрична проникність) залежать від частоти [1, 6, 7].

У запропонованій математичній моделі визначення спричиненого дією зовнішнього квазіусталеного електромагнітного поля напруженого стану лінійного термопружного ТНЕ прийнято, що взаємозв'язок електромагнітних, теплових і механічних процесів відбувається через тепловиділення, пондеромоторні сили і термопружне розсіяння енергії. Враховано тепловиділення джоулеві і пов'язані з поляризацією в змінному полі, а пондеромоторні сили – дії на заряди (сили Кулона), диполі (сили Кельвіна) і струми (сили Ампера) [1]. Знаходження параметрів напруженого стану зводиться до розв'язування відповідних задач електродинаміки і наступного визначення те-

температури T і компонент тензора напружень $\hat{\sigma}$ з системи рівнянь динамічної термопружності при відомих виразах для джерел тепла і об'ємних сил (відповідно тепловиділень і пондеромоторних сил). Для плоскої задачі як розв'язувальні функції вибирають величини $T, \sigma_{ii} \pm \sigma_{jj}, \sigma_{ij}$ ($i = x, j = y$ в прямокутній системі координат і $i = r, j = \varphi$ – у циліндричній).

Для спрощення задачі розглянуто й ефективно використано різні наближення електродинаміки (залежно від співвідношення між довжиною електромагнітної хвилі λ , яка визначається частотою і характерним розміром тіла: квазістаціонарне поле, наближення геометричної оптики [6]). Для опису електромагнітного поля інфрачервоного (ІЧ) діапазону використана феноменологічна теорія випромінювання [2]. Характеристика поля випромінювання в тілі – спектральна інтенсивність випромінювання $\bar{I}_\lambda(\vec{r}, \vec{s})$, що є усередненою за період коливань електромагнітної хвилі густину потоку електромагнітної енергії (вектор Пойнтінга), визначають з квазістаціонарного рівняння перенесення

$$\frac{\partial I_\lambda(\vec{r}, \vec{s})}{\partial s} = a_\lambda [I_\lambda^*(T) - I_\lambda(\vec{r}, \vec{s})], \quad (3)$$

де $I_\lambda^*(T)$ – спектральна інтенсивність власного випромінювання, що є функцією температури тіла і визначається за законом Планка; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки; $\vec{s}$ – напрям поширення випромінювання; a_λ – експериментально вимірюваний коефіцієнт поглинання. Вирази для тепловиділень і пондеромоторних сил у цьому випадку визначають за аналогією з електродинамічною теорією на підставі рівнянь балансу електромагнітних енергії та імпульсу.

На базі згаданих вище наближень електродинаміки і методів спектральних розкладів розроблена методика розв'язування плоских задач для пластин і циліндричних тіл, які перебувають під дією електромагнітних полів високочастотного (ВЧ), надвисокочастотного (НВЧ) і ІЧ діапазонів. Зокрема, досліджено термопружний стан шару і циліндра в однорідному НВЧ полі і ВЧ полі конденсатора залежно від частотних характеристик поля і поляризаційних властивостей матеріалу цих тіл [1, 6]. Досліджено резонансні явища зумовлені як хвильовим характером поширення електромагнітного поля в ТНЕ, так і майже періодичною зміною в часі пондеромоторних сил і тепловиділень [7]. Визначено особливості розподілу температури і напружень у шарах різної прозорості залежно від енергетичних і спектральних характеристик зовнішнього ІЧ випромінювання (в можливому діапазоні зміни поглинальних властивостей матеріалу шару) [2].

Практичне використання електромагнітних полів різного частотного діапазону для нагріву твердих ТНЕ з метою інтенсифікації дифузійних процесів у них вимагає вивчення не лише їхньої термомеханічної поведінки, а й впливу поля на перенесення маси в таких багатокомпонентних тілах. Створення ефективної математичної моделі, що описує взаємопов'язані процеси перенесення тепла і маси та деформування в ТНЕ під дією поля, потребує врахування поряд з традиційними дифузійними явищами, – термодифузії, дифузії заряджених частинок під впливом кулонівських сил (вимушена дифузія), також дифузійних ефектів, пов'язаних з об'ємним ха-

рактором введення в ТНЕ електромагнітної енергії і відмінністю поляризаційних (поглинальних) властивостей складових компонент. У пропонованій узагальненій моделі термомеханіки ТНЕ вважають багатокомпонентними, що складаються з деформівної твердотільної матриці (каркасу) і дифундуючих у ній частинок (атомів чи молекул) домішкових компонент. За вихідну прийнято класичну континуальну модель твердої суміші [5]. Переміщення тіла і його деформації пов'язано з переміщеннями і деформаціями каркасу, а його швидкість вибрано як характеристичну. Рівняння балансу (збереження) механіки записують в інтегральній формі у вигляді парціальних рівнянь збереження. Такі рівняння для суміші отримують шляхом підсумовування парціальних рівнянь, і вони дають відмінні від класичних (за рахунок вибору характеристичної швидкості) вирази для тензора напружень, об'ємної сили, внутрішньої енергії і потоку тепла. Другий закон термодинаміки формулюють для суміші в цілому у вигляді нерівності ентропії (нерівності Клаузіуса).

Рівняння електродинаміки для багатокомпонентного ТНЕ визначають на основі статистичного осереднення мікроскопічних рівнянь для електромагнітного поля (статистичне формулювання співвідношень електродинаміки) [4]. Вектор поляризації подається як сума векторів поляризації окремих компонент, які мають різну поляризованість, а залежність між електричним зміщенням і напруженістю електричного поля є такою самою, як і у випадку однокомпонентного ТНЕ. Однак поляризаційні характеристики ϵ' , ϵ'' є функціями концентрацій c_k домішкових компонент тіла. У випадку зовнішньої електромагнітної дії ГЧ діапазону функцією c_k є коефіцієнт поглинання α_λ [3, 8]. На підставі теоретичних обчислень і відомих з літератури експериментальних даних доведено, що при малих концентраціях домішкових компонент в ТНЕ (слабкий твердий розчин) згадані залежності є лінійними [3]. В цьому випадку отримується лінійний розклад для пондеромоторної сили стосовно концентрації компонент. Це дає змогу в розглядуваному багатокомпонентному тілі визначити вирази для масових сил електромагнітного походження на основі рівняння балансу імпульсу (знайти характеристики, які спричиняють вимушену дифузію).

При побудові конститутивних рівнянь моделі враховано, що внаслідок об'ємного характеру дисипації електромагнітної енергії (тепловиділень) і відмінності поляризаційних (поглинальних) властивостей компонент тіла в його мікрооб'ємах відбуваються нерівноважні процеси обміну енергією (встановлення теплової рівноваги) між компонентами. Для характеристики цих процесів уводять питомі енергії E_k компонент, які вважають відмінними від середньої енергії теплових коливань RT такого багатокомпонентного ТНЕ. Рівняння еволюції цих параметрів будують з урахуванням фононних і фотонних взаємодій компонент, що поляризуються (поглинають енергію випромінювання), тобто з залученням уявлень теорії теплових коливань твердого тіла і корпускулярної моделі перенесення випромінювання. Вирази для E_k дають змогу визначити потенціали Гіббса (хімічні потенціали) компонент суміші $G_k = E_k \ln c_k$ і кінетичні коефіцієнти, які характеризують перенесення маси (коефіцієнти дифузії) при дії електромагнітного поля

$$D_k^{ef} = D_k(T) \exp[E_{act}/RT (1 - RT/E_k)],$$

де E_{act} – енергія активації дифузії, $D_k(T)$ – коефіцієнт дифузії за відсутності дії електромагнітного поля.

На основі такої узагальненої моделі запропоновано методику кількісного опису взаємопов'язаних електромагнітних, теплових, дифузійних і механічних процесів у твердих ТНЕ з газовими домішками при дії зовнішнього ІЧ випромінювання [8]. Досліджено перенесення випромінювання, тепла та маси і термомеханічну поведінку напівпрозорого шару при дії ІЧ теплового випромінювання залежно від енергетичних і спектральних характеристик його джерела [3].

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності у зовнішніх квазіусталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 38–41.
2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 40–43.
3. Гачкевич О. Р., Курницький Т. Л., Терлецький Р. Ф. Механотермодифузійні процеси в напівпрозорому твердому шарі при дії теплового інфрачервоного випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41, № 3. – С. 121–131.
4. Де Гроот С. Р., Сатторп Л. Г. Электродинамика. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
5. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1986. – 288 с.
6. Терлецький Р. Ф. Математичне моделювання термомеханічних процесів в тілах низької електропровідності в зовнішньому квазіусталеному електромагнітному полі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 36. – С. 35–40.
7. Gachkevich A., Kaspersky Z., Solodiak M., Terletskii R. Mathematical modeling of resonance phenomena in electroconductive solids subjected to external quasisteady electromagnetic field // Zeszyty naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanica. – 1996. – Vol. 48. – P. 47–52.
8. Gachkevich A. R., Terletskii R. F., Kournyts'kyi T. L., Kasperski Z. Heat and mass transfer and thermal stresses in semitransparent multicomponent solid subjected to thermal infrared radiation // Proc. of Third Int. Congress in Thermal Stresses. – Krakow, 1999. – P. 421–424.

THERMOMECHANICS OF LOW ELECTROCONDUCTIVE SOLIDS IN QUASISTEADY ELECTROMAGNETIC FIELDS OF RADIO- AND INFRARED RANGE

Alexandr Gachkevich, Taras Kournyts'kyi, Rostyslav Terletskii

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

Mathematical model for description of electromagnetic, thermal, diffusive and mechanical processes in low electroconductive solids in electromagnetic field of wide frequency range is proposed. Effect of the field is taken into account by dissipation of electromagnetic energy (heat sources), ponderomotive forces and energy exchange between components in micropoints of the solid.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.1999

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТЕРМОПРУЖНОСТІ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Аркадій Гольцев, Володимир Шевченко

Донецький державний університет

Розв'язки різноманітних задач механіки тонкостінних конструкцій для будь-яких зовнішніх силових і температурних впливів можуть визначатися за допомогою фундаментальних розв'язків відповідних рівнянь [3]. Для ортотропних пластин такий розв'язок знайдено в [2]. У цій праці методика побудови фундаментальних розв'язків узагальнюється на випадок ортотропних циліндричних оболонок при наявності теплообміну.

Розглянемо тонку ортотропну циліндричну оболонку товщиною $2h$, яка перебуває в тепловому контакті з зовнішнім середовищем нульової температури. Оболонка нагрівається джерелами тепла об'ємної густини W_0 . Будемо припускати конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона і рівномірний розподіл джерел тепла по товщині оболонки.

Будуючи фундаментальний розв'язок, використовуємо теорію пологих оболонок [3]. Введемо безрозмірну систему координат x_i ($i = \overline{1,3}$), визначену з точністю до розміру h . Приймаючи лінійний закон розподілу температури по товщині оболонки і, наслідуючи [4, 5], запишемо систему рівнянь теплопровідності циліндричних оболонок так:

$$\Delta_\lambda T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_3 T_2 = -W_1, \quad \Delta_\lambda T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 = 0, \quad (1)$$

де

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{2} (Bi^+ \pm Bi^-),$$

$$\mu_3 = \mu_2 - k, \quad W_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-1}^1 W_0(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

T_1, T_2 – інтегральні характеристики температури, середня температура та температурний момент; $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ – головні коефіцієнти теплопровідності; $k = 1/R$, де R – радіус циліндричної оболонки; $Bi^\pm$ – критерій Біо на поверхнях $x_3 = \pm 1$.

Використовуємо рівняння термопружності, отримані з урахуванням гіпотез Кірхгофа – Лява. Вісь координат x_1 спрямуємо уздовж твірної циліндричної оболонки. Тоді система рівнянь рівноваги пологих ортотропних циліндричних оболонок у переміщеннях має такий вигляд [1]:

$$B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + B_3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + B_4 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + J_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \beta_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1},$$

$$\begin{aligned}
 B_3 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + B_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + B_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + J_2 \frac{\partial U_3}{\partial x_2} &= \beta_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \\
 J_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + J_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + D_1 \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_1^4} + D_3 \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_2^4} + D_4 U_3 &= \\
 &= k\beta_2 T_1 - \beta_1^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} - \beta_2^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2},
 \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \kappa B, & B_2 &= \kappa^{-1} B, & B_3 &= 2G, & B_4 &= \nu_2 B_1 + B_3, \\
 D_1 &= \kappa D, & D_2 &= \kappa^{-1} D, & D_3 &= 2(\nu_2 D_1 + 4G/3), & D &= B/3, \\
 D_4 &= 3D_2 k^2, & J_1 &= B_1 \nu_2 k, & J_2 &= B_2 k, & B &= 2/(1 - \nu_1 \nu_2), \\
 \beta_i &= 3\beta_i^0 = \chi B_i \quad (i = 1, 2), & \chi_1 &= \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2, & \chi_2 &= \nu_1 \alpha_1 + \alpha_2, \\
 G &= G_{12}/E, & E &= \sqrt{E_1 E_2}, & \kappa &= \sqrt{E_1/E_2},
 \end{aligned}$$

U_i ($i = \overline{1, 3}$) – переміщення уздовж координатних осей x_i ($i = \overline{1, 3}$); E_1, E_2 і G_{12} – модулі Юнга і модуль зсуву; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона; α_1, α_2 – температурні коефіцієнти лінійного розширення для головних напрямів.

Фундаментальний розв'язок термопружності є частинним розв'язком систем (1), (2) із правою частиною у вигляді

$$W_1(x_1, x_2) = W_1^* \delta(x_1, x_2). \quad (3)$$

Тут $\delta(x_1, x_2)$ – дельта-функція Дірака; W_1^* – потужність інтегрального джерела тепла, джерела середньої температури.

Для розв'язку вихідної системи диференціальних рівнянь (1), (2) з правою частиною (3) використане двовимірне інтегральне перетворення Фур'є. Отриманий розв'язок у полярній системі координат r, φ має таку структуру:

$$U_i(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{ni} p_{ni}(\varphi) \int_0^{\pi/2} p_{ni}(\theta) \sum_{m=1}^4 H_{mi}(\theta) P_{mni}(r, \theta) d\theta \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (4)$$

де ε_{ni} – числові константи; $H_{mi}(\theta)$ – раціональні вирази від тригонометричних многочленів, що містять кривину і термопружні параметри оболонки; значення функцій, що містять полярні координати, будуть такими:

$$\begin{aligned}
 p_{n1}(\varphi) &= \cos(2n+1)\varphi, & p_{n2}(\varphi) &= \sin(2n+1)\varphi, & p_{n3}(\varphi) &= \cos 2n\varphi, \\
 P_{1n1}(r, \varphi) &= P_{1n2}(r, \varphi) &= -r \operatorname{Re} G_{n+1,n}(\sqrt{it}(\theta)r), \\
 P_{2n1}(r, \varphi) &= P_{2n2}(r, \varphi) &= \frac{r}{t^2(\theta)} \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{it}(\theta)r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1n3}(r, \varphi) &= \operatorname{Re} G_{n,n}(\sqrt{i}t(\theta)r), & P_{2n3}(r, \varphi) &= \frac{-1}{t^2(\theta)} \operatorname{Im} G_{n,n}(\sqrt{i}t(\theta)r), \\
P_{3n1}(r, \varphi) &= P_{3n2}(r, \varphi) = -rG_{n+1,n}(a_1(\theta)r), & P_{3n3}(r, \theta) &= G_{n,n}(a_1(\theta)r), \\
P_{4n1}(r, \varphi) &= P_{4n2}(r, \varphi) = -rG_{n+1,n}(a_2(\theta)r), & P_{4n3}(r, \theta) &= G_{n,n}(a_2(\theta)r), \\
t^4(\theta) &= b(\theta)/d(\theta), & b(\theta) &= b_1 \cos^4 \theta + b_2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + b_3 \sin^4 \theta, \\
d(\theta) &= d_1 \cos^8 \theta + d_2 \cos^6 \theta \sin^2 \theta + d_3 \cos^4 \theta \sin^4 \theta + d_4 \cos^2 \theta \sin^6 \theta + d_5 \sin^8 \theta, \\
a_j(\theta) &= \sqrt{c_j / \left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}} \cos^2 \theta + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}} \sin^2 \theta \right)} & (j = 1, 2), \\
c_{1,2} &= \left(3 + 4\mu_1 \mp \sqrt{(3 + 4\mu_1)^2 - 12(\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_2\mu_3)} \right) / 2,
\end{aligned}$$

де $G_{m,n}(z)$ – спеціальна функція, що введена при побудові фундаментальних розв’язків статички пологих оболонок [3]; b_k, d_k – константи, які містять кривину та механічні параметри оболонки. Ряд (4) швидко сходиться. Для проведення практичних розрахунків можна обмежитися десятьма членами. Асимптотичні властивості розв’язка (4) впливають з поведінки G -функції при аргументі, який наближається до нуля. В околі зосередженого джерела середньої температури переміщення мають вигляд

$$U_i \approx r \ln r \quad (i = 1, 2), \quad U_3 \approx r^0.$$

Чисельні обчислення виконані для склопластика косокутної намотки, що має сильну анізотропію.

Термомеханічні параметри обчислення були такими: $\kappa = 1.935$; $G = 0.2067$; $\nu_1 = 0.2798$; $\alpha_1 = 0.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_2 = 3.8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\lambda_{11}/\lambda_{33} = 2.306$; $\lambda_{22}/\lambda_{33} = 1$; $Bi^+ = Bi^- = 0.1$. Досліджено залежність переміщень у серединній площині U_1, U_2 і прогину U_3 від радіальної координати r при дії джерела середньої температури одиничної потужності ($W_1^* = 1 \text{ K}$).

Результати обчислень зображені на рис. 1, 2, де переміщення і радіальна координата задані з точністю до h . Суцільними лініями показані залежності для циліндричної оболонки ($k = 0,025$), штриховою та пунктирною – для пластини ($k = 0$). Цифрами 1 і 2 позначені криві для випадку орієнтації головної осі ортотропії з більшим значенням модуля Юнга уздовж твірної циліндричної оболонки (вісь x_1), цифрами 3 і 4 позначені криві для випадку повороту головних осей ортотропії на $\pi/2$. Цифрами 1 і 3 позначені графіки для переміщення U_1 і прогину вздовж твірної (вісь x_1 , $\varphi = 0$), цифрами 2 і 4 позначені графіки для переміщення U_2 і прогину уздовж прямої (вісь x_2 , $\varphi = \pi/2$). Штриховою лінією показаний графік

для переміщення U_1 уздовж осі x_1 ($\varphi = 0$), пунктирною – для переміщення U_2 уздовж осі x_2 ($\varphi = \pi/2$).

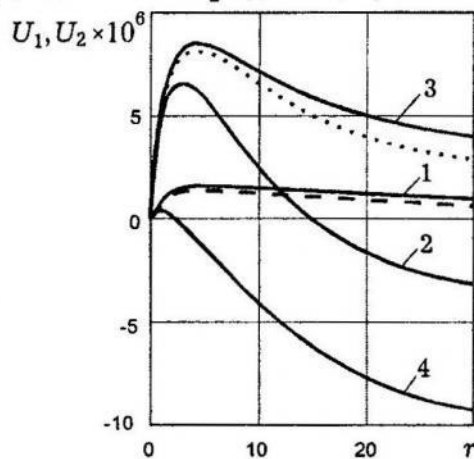


Рис. 1.

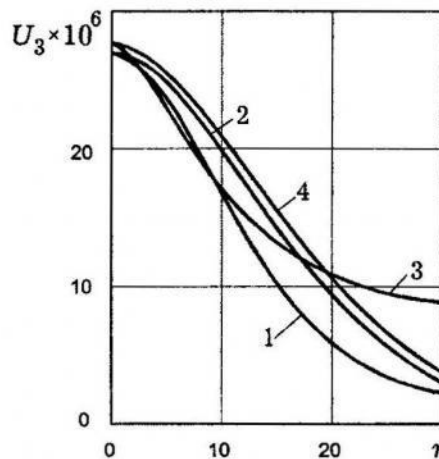


Рис. 2.

З графіків видно, що фундаментальний розв'язок термопружності ортотропних циліндричних оболонок суттєво залежить від кривини та параметрів ортотропії.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. Гольцев А. С. Фундаментальное решение уравнений термоупругости для тонких ортотропных пластин в случае теплообмена // Труды междунар. научн. конф. «Современные проблемы концентрации напряжений». – Донецк: Кассиопея, 1998. – С. 56–60.
3. Механика композитов: В 12т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 7: Концентрация напряжений / Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. – К.: А. С. К., 1999. – 387 с.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 311 с.
5. Швець Р. Н., Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 10. – С. 121–125.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THERMOELASTICITY FOR ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS

Arkadiy Goltsev, Vladimir Shevchenko

Donetsk state university

The fundamental solution of thermoelasticity for the thin shallow orthotropic cylindrical shells is obtained by means of two-dimensional integral Fourier transform. The linear distribution of the temperature along the thickness is assumed. The convective heat exchange with the surrounding medium is taken into account. The dependence of displacements from the radial coordinate is investigated.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.1999

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ВЕРШИН ПОПЕРЕЧНОЇ ТРІЩИНИ У КОРОБЧАСТІЙ ОБОЛОНЦІ

В'ячеслав Воробель, Віктор Реут

Одеський державний університет ім. І.І.Мечникова

Розглянемо задачу про обчислення значення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) біля вершин прямолінійної наскрізної тріщини завдовжки $2c < 2a$, що є в одній з пластин коробчастої оболонки прямокутного перерізу, яка розташована перпендикулярно до ребер оболонки на однаковій відстані від них (рис. 1). До обох берегів тріщини прикладене однакове навантаження, симетричне щодо центра тріщини і яке не залежить від часу, у вигляді розподілених згинних моментів $m(x)$. Пластини, з яких складена оболонка, зроблені з одного матеріалу і мають однакову товщину h . З огляду на симетрію задачі щодо площин $Y = 0$ і $X = 0$ надалі розглядаємо тільки частину оболонки, що є в ділянці $Y \geq 0, X \geq 0$.

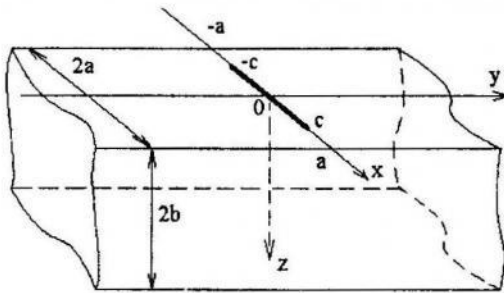


Рис. 1.

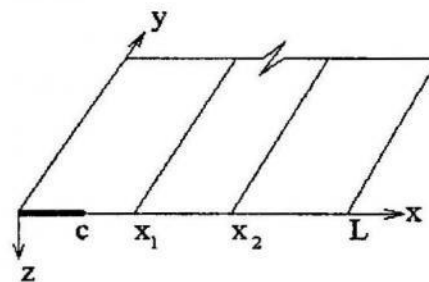


Рис. 2.

Для розв'язування задачі застосуємо підхід, запропонований Г.Я. Поповим і В.В. Реутом [4], що дає змогу звести задачі про напружено-деформований стан коробчастих оболонок до спільного плоского і згинного стану фіктивної пластини з дефектами (рис. 2), роль яких відіграють ребра оболонки (під дефектом розуміємо частину поверхні (або лінію), під час переходу через яку виникають розриви першого роду зусилля або зміщення). У [1, 2] зазначено, що в припущенні малості параметра $\varepsilon = h/p$, де p – характерний геометричний розмір оболонки, задачу можна розбити на дві (згинну і плоску), які послідовно розв'язують, з точністю до $O(\varepsilon^2)$, де згинна задача є, по суті, задачею про нерозрізну пластину у формулюванні Смотрового [6]. У [2] показано, що у разі дії згинального навантаження достатньо розглядати тільки згинну задачу, бо плоскі напруження і деформації малі порівняно зі згинними.

Оскільки в задачі, яку розглядаємо, діє чисто згинальне навантаження, то аналізуватимемо тільки згинну задачу.

Математичне формулювання задачі, згідно з [1, 2], зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння прогину смугоподібної пластинки (див. рис. 2)

$$\Delta^2 w(x, y) = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < +\infty, \quad x \neq x_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (1)$$

(де $L = 2(a + b)$, $x_1 = a$, $x_2 = L - a$) з крайовими умовами

$$\varphi_x(0, y) = 0, \quad \varphi_x(L, y) = 0, \quad V_x(0, y) = 0, \quad V_x(L, y) = 0; \quad (2)$$

умовами на ребрах

$$\langle \varphi_x(x_i, y) \rangle = \langle M_x(x_i, y) \rangle = 0, \quad w(x_i \pm 0, y) = 0, \quad 0 \leq y < \infty, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (3)$$

умовою на тріщині

$$M_y(x, 0) = m(x), \quad V_y(x, 0) = 0, \quad x \in [0, c] \quad (4)$$

й умовами симетрії задачі

$$V_y(x, 0) = 0, \quad \varphi_y(x, 0) = 0, \quad x \in [c, L]. \quad (5)$$

Тут w – згин пластини в напрямі осі z ; M_n – згинний момент; V_n – узагальнена поперечна сила; φ_n – кут повороту пластини по перерізу з нормаллю n ; уведені також безрозмірні величини, позначені тими ж буквами, що й відповідні фізичні, які, на відміну від перших, позначені зірочкою:

$$\begin{aligned} (x, y, a, b, L) &= (x_*, y_*, a_*, b_*, L_*)/c_*, \quad w(x, y) = D_1 \varepsilon^3 w_*(x_*, y_*)/c_*, \\ M_n &= M_{n*}/E_* c_*^2, \quad V_n = V_{n*}/E_* c_*, \quad \varphi_n = \varphi_{n*} D_1 \varepsilon^3, \\ m(x) &= m_*(x_*)/E_* c_*^2, \quad D_1 = D_*/E_* h_*^3, \quad \varepsilon = h_*/c_*, \quad c = h = E = D = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

де h_* – товщина; ν – коефіцієнт Пуассона; E_* – модуль Юнга; D_* – циліндрична жорсткість платівок.

Уведемо невідому на $[0, c]$ функцію

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x, 0) = \chi(x), \quad \chi(x) \equiv 0, \quad x \notin [0, c]. \quad (7)$$

За допомогою косинус інтегрального перетворення Фур'є задача (1)–(4) зводиться до одновимірної розривної крайової задачі

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 w_\lambda(x) = \nu \chi''(x) - \lambda^2 \chi(x), \quad 0 < x < L, \quad x \neq x_i, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (8)$$

$$w'_\lambda(0) = 0, \quad w'_\lambda(L) = 0, \quad w''_\lambda(0) = 0, \quad w''_\lambda(L) = 0; \quad (9)$$

$$\langle w_\lambda(x_i) \rangle = \langle w'_\lambda(x_i) \rangle = \langle w''_\lambda(x_i) \rangle = 0; \quad (10)$$

$$w_\lambda(x_i \pm 0) = 0, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (11)$$

розв'язування якої будують згідно з [3]. Обертаючи інтегральне перетворення Фур'є, реалізовуємо умову на тріщині (4), яка після виділення інтегралів, що нерівномірно сходяться, приводить до такого інтегро-диференціального рівняння (з урахуванням парності розв'язку за змінною x інтегральне рівняння продовжено на інтервал $[-1, 1]$)

$$-\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \chi(\xi) \ln \frac{1}{|x-\xi|} d\xi + \int_{-1}^1 \chi(\xi) R(x, \xi) d\xi = m_1(x), \quad |x| < 1, \quad (12)$$

де $R(x, \xi)$ – регулярна функція, $m_1(x) = m(x)/2N$, $N = (1-\nu)(3+\nu)/4$. Розв'язок (12) шукають згідно з методом ортогональних багаточленів [3] у вигляді ряду за багаточленами Чебишова другого роду, причому внаслідок парності функції $\chi(x)$ в розкладанні беруть участь тільки парні багаточлени.

$$\chi(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k U_{2k}(\xi). \quad (13)$$

Підставляючи (13) в (12) і використовуючи спектральне співвідношення для багаточленів Чебишова і властивість ортогональності, одержуємо нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) другого роду типу Пуанкаре – Коха:

$$(2n+1)\chi_n + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2n,2k} \chi_k = m_{2n}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (14)$$

наближений розв'язок якої будували за допомогою методу редукції (обґрунтованість застосування якого доведена в [5]).

Коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини тріщини визначимо так [2]:

$$K_*(c_*) = \frac{6}{h_*^2} \lim_{x_* \rightarrow c_*+0} \sqrt{2\pi(x_* - c_*)} |M_{y_*}(x_*, 0)| = 6\varepsilon^{-2} \sqrt{\pi c_*} E_* K(1), \quad (15)$$

де

$$K(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{x^2 - 1} |M_y(x, 0)| = 2N \left| \sum_{k=0}^N \chi_k U_{2k}(1) \right| \quad (16)$$

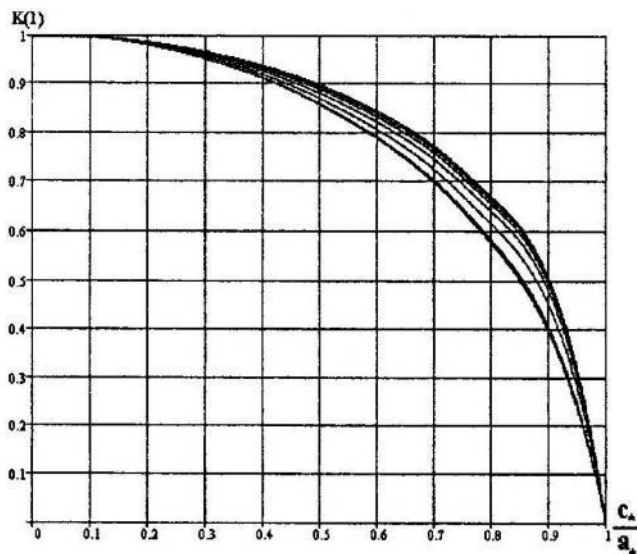


Рис. 3.

– безрозмірний аналог КІН, для здобуття якого було використано спектральне співвідношення В.2.4 [3] для багаточленів Чебишова на проміжку $|x| > 1$.

На рис. 3 зображено графіки залежності КІН від співвідношення c_*/a_* для таких значень параметрів задачі: $m(x) = m_*(x_*)/E_*c_*^2 \equiv 1$ (рівномірно розподілене навантаження); $\nu = 0.4$; $b_*/a_* = 10, 1, 1/2, 1/4, 1/10, 1/50, 1/100$ (відповідні графіки на рис. 3 розташовані послідовно зверху вниз).

На підставі отриманих результатів можна зробити такі висновки. У разі наближення тріщини до ребра оболонки ($c_*/a_* \rightarrow 1$) концентрація напружень монотонно зменшується до нуля, причому ядро $R(x)$, при зближенні тріщини, є регулярним, і СЛАР (14) вже не має властивості систем типу Пуанкаре – Коха; при $c_*/a_* \rightarrow 0$, $K(1) \rightarrow 1$, що збігається з результатом відомої задачі про тріщину в нескінченній площині. Було також виявлено, що КІН практично перестає залежати від b_*/a_* , коли $b_*/a_* \gg 1$ або $b_*/a_* \ll 1$. При $b_*/a_* \ll 1$ це можна пояснити так: пластини суміжні з тим, який містить тріщину, відіграють роль затиснення. При $b_*/a_* \gg 1$ це можна пояснити тим, що згинні напруження, які спадають у разі віддалення від місця прикладання навантаження, практично не передаються на пластину, протилежну до тієї, яка містить тріщину, і тепер уже ця пластина працює як затиснення для суміжних з нею пластин.

Виконано порівняння з результатами [2], де досліджено задачу для випадку двох тріщин, симетрично розташованих на протилежних гранях оболонки, з якого випливає, що наявність другої тріщини зменшує концентрацію напружень.

1. Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В. Расчёт коробчатых оболочек прямоугольного сечения // Прикл. математика и механика. – 1990. – Т. 54. – Вып. 4. – С. 605–612.
2. Гришин В. А. Расчёт пластинчатых оболочек: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1990. – 18 с.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
4. Попов Г. Я., Реут В. В. Расчёт коробчатых оболочек // Тр. XIV Всесоюз. конф. по пластинкам и оболочкам. – Тбилиси, 1987. – Т. 2. – С. 327–332.
5. Реут В. В. Краевые задачи для бигармонического уравнения в клиновидной области при наличии дефектов и усложненных граничных условий: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1984. – 18 с.
6. Смотров А. Ф. Жесткие коробки. – М.; Л.: ГНТИ, 1931. – 40 с.

STRESS CONCENTRATION NEAR THE ENDS OF A CROSS CRACK IN A BOX SHELL

Viacheslav Vorobel, Victor Reut

Mechnikova State University Odessa

The problem, as a result the applying of Fourier transformation and solving of the one-dimensional discontinuous boundary value problem, has been reduced to the singular integral equation, the solution of which is constructed by the help of orthogonal polynomials method in the form of series by Chebyshev polynomials of second kind. The coefficients of the series are the solutions of the infinite system of the linear algebraic equations of the second kind of a type Poincare-Koch.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.1999

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГУМОВИХ АМОРТИЗАТОРІВ

Богдан Дівеев, Олег Микитюк, Надія Тимошенко

Національний університет «Львівська політехніка»

Для визначення пружних характеристик гумових подушок, що слугують амортизаторами з'єднань жорстких елементів конструкцій, застосовують розрахункові схеми різного порядку точності. Складність таких розрахунків зумовлена складними геометричними формами цих елементів, невідомими наперед розмірами контактних зон, нелінійними деформівними характеристиками гумових матеріалів, конструктивною неоднорідністю матеріалу. Крім того, зазначимо: внаслідок того, що коефіцієнт Пуассона ν гумових матеріалів приблизно дорівнює 0.5, вони є практично нестисливими, і навіть у простих умовах деформування в гумовому елементі виникає об'ємний напружений стан. Як описано в [1], у процесі деформації гумового шару між площиною і круглим циліндричним тілом виникають скінченні нелінійні розподіли переміщень і напружень, тоді як апіорна гіпотеза про лінійність цих приводить до безмежних значень контактної тиску при $\nu = 0.5$.

Розглянемо жорстку обойму, у якій міститься неоднорідний пружний матеріал (гума), що його деформує симетричний жорсткий криволінійний штамп (рис. 1).

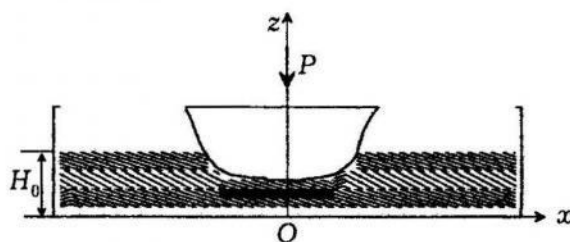


Рис. 1.

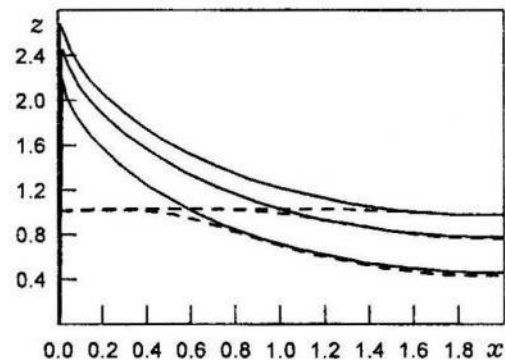


Рис. 2.

Систему координат виберемо, як показано на рис. 1. Враховуючи умови симетрії конструкції, достатньо розглянути її половину. Спочатку розглянемо плоский випадок, вплив матеріалу в напрямі осі Oy врахуємо пізніше.

Застосуємо варіаційний принцип Лагранжа для цього елемента:

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \epsilon_{xz}) dV - \int_S [(pn_x + \tau n_y) \delta u + (pn_y - \tau n_x) \delta w] dS = 0, \quad (1)$$

де p – нормальне контактне зусилля; τ – дотичне контактне зусилля; n_x, n_y – косинуси нормалі до лінії контакту.

Для переміщень виберемо таку апроксимацію:

$$u = u_{ij} \varphi_i(x) z^j, w = w_{ij} \psi_i(x) z^j. \quad (2)$$

В (1) контактний тиск p і контактне дотичне напруження τ невідомі. Апроксимуємо їх виразами

$$p = p_i (1 - x_1^2)^{\alpha_i}, \quad \tau = \tau_i x_1^{\beta_i}, \quad (3)$$

де $x_1 = (L - x)/a$, a – довжина контактної зони; L – півдовжина подушки.

Підставивши (2), (3) в (1), використавши закон Гука та виразивши деформації через переміщення (2), отримуємо систему звичайних алгебричних рівнянь на u_{ij}, w_{ij} . Невідомі p_i та τ_i знаходимо з кінематичної умови спряження поверхні штампу з верхньою площиною шару. Функції φ, ψ вибрані такими:

$$\varphi_i(x) = \sin(i\pi x/L), \psi_i = \sin((2i-1)\pi x/2). \quad (4)$$

Обчислення засвідчили, що ліпшою є така модифікація алгоритму (1)–(4): координатні функції для поздовжнього зміщення залишаються попередніми (2), а нормальні дещо зміненими

$$\varphi_i(x) = \sin(i\pi x/L), \psi_i = \mu(x) \sin((2i-1)\pi x/2), \quad (5)$$

де μ залежить від ступеня попередньої зміни товщини подушки

$$\mu(x) = \frac{H_0}{h(x)} [1 + a_1(x - L) + a_2(x - L)^2 + \dots] = \frac{H_0}{h(x)} A(x) \quad (6)$$

та від деякої довільної алгебричної функції $A(x)$, яку вибирають на підставі числових експериментів. Таку заміну зроблено тому, що оскільки у нас, на відміну від методу скінченних елементів, апроксимації задані глобальними аналітичними виразами, то потрібне згущення їх у зоні зростання інтенсивності напружень можливе саме таким шляхом. Справді, якщо задати всі $a_i = 0$, то $A(x) = 1$ і з (2) та (5) випливає, що однакова зміна в координатній функції w_{ij} викликає однакову зміну переміщення як під штампом, так і у вільній зоні. Для визначення додаткових невідомих p_i, τ_i для контактних зусиль використаємо умови контакту. Це можуть бути: умови жорсткого з'єднання штампу з основою; умови відсутності дотичних навантажень (штамп без тертя); комбіновані умови з зонами проковзування.

На підставі (1)–(6) розроблено комплекс програм алгоритмічною мовою Фортран-77. Розглянуто тестовий приклад – круглий штамп без тертя. Тиск апроксимовано одним доданком у (3)

$$p = p_1 (1 - x_1^2)^{\alpha_1}. \quad (7)$$

Так само лише першим членом апроксимована масштабна функція $\mu(x)$ (6). На рис. 2 показані переміщення вільної поверхні шару при різних значеннях тиску.

На деформацію подушки значно впливає те, що вона займає деякий скінченний об'єм, обмежений жорсткими порівняно з її матеріалом сталє-

вими елементами. У разі навантаження нестисливого матеріалу в закритому об'ємі спостерігають значне зростання жорсткості, викликане саме неможливістю його об'ємного стиску. Тому треба врахувати деформацію подушки і в напрямі твірної циліндричного штамп. Це можна зробити, розглянувши тривимірний напружений стан та ввівши систему тривимірних координатних функцій, аналогічно як і для плоскої задачі. Проте це значно б ускладнило розв'язок задачі. Тому запропоновано напіврекурентний спосіб визначення об'ємного напруженого стану. З геометрії (значна довжина зони контакту вздовж твірної штамп) можна вважати ефекти, викликані скінченними розмірами зони контакту в напрямі осі Oy , зосередженими лише на краях $y = \pm b$. Для визначення їхнього внеску в розподіл напружень вважаємо їх відомими та залежними від товщини $h(x)$ шару під штампом, що стискається, та контактного тиску $p(x)$.

У результаті отримуємо такі доданки:

$$\varepsilon_y = \tilde{\varepsilon}_y(y, z) p(x) h(x), \varepsilon_{yz} = \tilde{\varepsilon}_{yz}(y, z) p(x) h(x). \quad (8)$$

Тут величини з тильдою – це функції, що мають характер крайового ефекту, отримані на підставі розв'язку допоміжної задачі про стиск шару гуми. Числова схема для їхнього отримання подібна до (1)–(6) і наведена нижче. Зазначимо, що великі значення, виявлені для тангенціальних деформацій, узгоджуються з таким відомим фактом, що контактні напруження у штампі з кутовими точками набувають нескінченних значень [1].

Враховуючи (8), (1) матиме вигляд

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dV - \int_S [(pn_x + \tau n_y) \delta u + (pn_y + \tau n_x) \delta w] dS + \int_{V_k} p(x) (\tilde{\sigma}_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tilde{\sigma}_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tilde{\tau}_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dV = 0, \quad (9)$$

де $\tilde{\sigma}_{xx} = C_{xy} \tilde{\varepsilon}_y h(x)$, $\tilde{\sigma}_{zy} = C_{zy} \tilde{\varepsilon}_y h(x)$, $\tilde{\tau}_{xz} = G_{yz} \tilde{\varepsilon}_{yz} h(x)$.

Для обчислення значень деформацій і напружень з тильдою розглянемо розв'язок статичної задачі попереднього плоского стиску еластичного елемента. Для числового аналізу застосуємо дещо інший підхід, ніж (1)–(6). Розглянемо деякий однорідний розподіл вертикального стиску шару.

Переміщення запишемо в такому вигляді:

$$v = v_0 + v_{ij} \sin((2i-1)\pi z/H) y^{2j-1}, \\ w = w_0 + w_{ij} \sin(2i\pi z/H) y^{2j-2}. \quad (10)$$

Тут v_0 , w_0 – переміщення, що відповідають однорідному стиску вздовж осі z . Згідно з кінематичними гіпотезами (10) бачимо, що розглядають неперервний контакт між шаром і стискними поверхнями.

Підстановкою (10) у варіаційний принцип отримуємо рівняння

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dV = \int_{V_k} (\sigma_{yy}^0 \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}^0 \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{yz}^0 \delta \varepsilon_{yz}) dV = \\ = \int_{V_k} (C_{yz} \varepsilon_{zz}^0 \delta \varepsilon_{yy}) dV. \quad (11)$$

На рис. 3, а-в показані розподіли деформацій ε_{yy} та напружень σ_{zz} , τ_{xz} . З наведених числових даних можна зробити висновок, що найбільша концентрація дотичних напружень є в кутових точках.

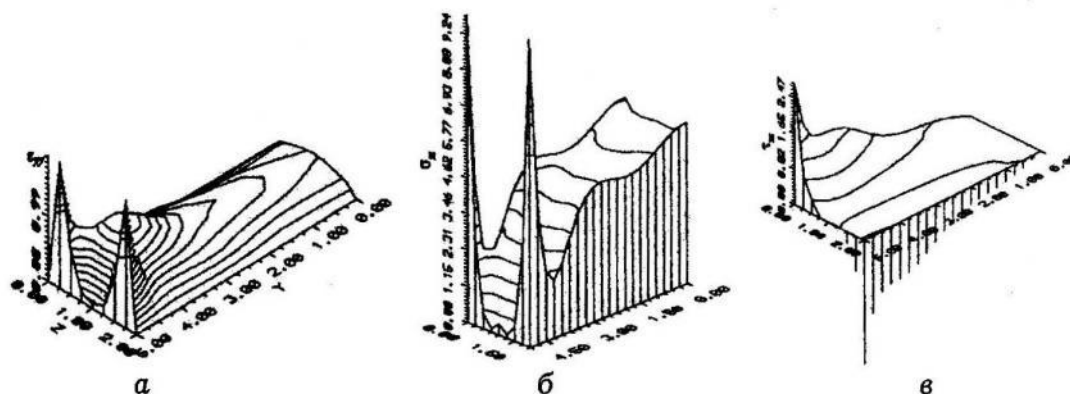
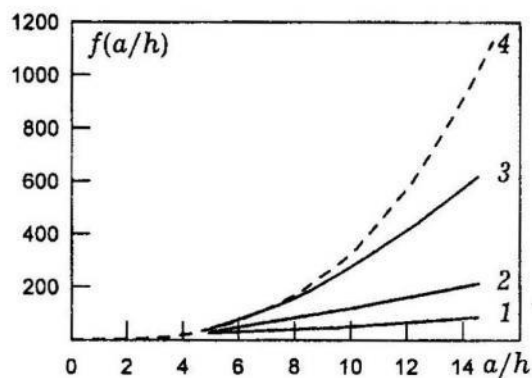


Рис. 3.

На рис. 4 зображена залежність стисного зусилля від параметра a/h (a – ширина плоского шару, h – його висота) для різних значень ν ($m \equiv \nu$).

Усі суцільні криві на рис. 4, навіть при $\nu = 0,498$, мають прямолінійну ділянку у разі збільшення a/h , що свідчить про зменшення впливу крайових напружень. На відміну від апроксимацій з $\nu = 0,5$ [2], ці криві ліпше узгоджуються з експериментальними даними.

Рис. 4. 1 – $m = 0.470$; 2 – $m = 0.490$; 3 – $m = 0.998$; 4 – $m = 0.500$.

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
2. Лавендел Э. Э. Расчет резинотехнических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.

DETERMINATION OF THE PERFORMANCES FOR ELASTIC SHOCK ABSORBERS

Bogdan Diveiev, Oleg Mykytiuk, Nadia Tymoshenko

National University «Lvivska Politechnika»

Indentation of constrained elastic shaft by a semi-infinite rigid cylindrical body is investigated. The effective procedure for decoupling of three-dimension elastic problem to two plane problems is presented. Some results established by variation-collocation method are presented.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.1999

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК

Уляна Жидик

Українська академія друкарства

Розглянемо оболонку сталої товщини $2h$, точки простору якої віднесені до нормальної криволінійної системи $\mathbf{x} = \{x^\alpha, x^3\}$ ($\alpha = 1, 2$), де $x^3 = 0$ описує середню поверхню G оболонки, обмежену контуром g . Матеріал оболонки є неоднорідним анізотропним двокомпонентним твердим розчином, який має в кожній точці лише одну площину симетрії стосовно фізико-механічних властивостей.

Нехай у момент часу τ під дією зовнішнього силового навантаження $\mathbf{q} = \{q^\alpha, q^3\}$, $\mathbf{m} = \{m^\alpha, m^3\}$, початкових деформацій [1, 3] $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{\varepsilon_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{\alpha 3}^0, \varepsilon_{33}^0\}$, $\boldsymbol{x}^0 = \{x_{\alpha\beta}^0, x_{\alpha 3}^0\}$, тепло-масообміну [2, 5] з зовнішнім середовищем, джерел тепла $W_{(n)}$ і маси $V_{(n)}$ ($n = 1, 2$), а також контурних силових і термоконцентраційних факторів в оболонці виникнуть: переміщення $\mathbf{u} = \{u_\alpha, u_3\}$ і кути повороту $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_\alpha, \gamma_3\}$, потоки тепла $\mathbf{Q}_{(n)} = \{Q_{(n)}^\alpha, Q_{(n)}^3\}$ і маси $\mathbf{P}_{(n)} = \{P_{(n)}^\alpha, P_{(n)}^3\}$, температурне поле $T_{(n)}$ і хімічний потенціал $M_{(n)}$, ентропія $S_{(n)}$ і концентрація $C_{(n)}$, зусилля-моменти $\mathbf{N} = \{N^{\alpha\beta}, N^{\alpha 3}, N^{33}\}$, $\mathbf{M} = \{M^{\alpha\beta}, M^{\alpha 3}\}$ і деформації $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}\}$, $\boldsymbol{x} = \{x_{\alpha\beta}, x_{\alpha 3}\}$. Перелічені величини віднесені до середньої поверхні оболонки і тому є функціями поверхневих координат x^α і часу τ .

Фізико-механічний стан розглядуваної оболонки опишемо математичною моделлю, яка складається з системи диференціальних рівнянь і крайових умов, одержаних шляхом прийняття гіпотез про лінійний характер розподілу компонент вектора переміщень, температури і хімічного потенціалу по товщині стінки [5]. Цю систему виведемо, усереднюючи відповідну тривимірну задачу [4]. В результаті одержимо:

рівняння руху

$$\begin{aligned} \nabla_\beta N^{\beta\alpha} - b_\beta^\alpha N^{\beta 3} + q^\alpha - \ddot{I}_N^\alpha &= 0, \quad \nabla_\beta N^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + q^3 - \ddot{I}_N^3 = 0, \\ \nabla_\beta M^{\beta\alpha} - N^{\alpha 3} + m^\alpha - \ddot{I}_M^\alpha &= 0, \quad \nabla_\beta M^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N^{33} + m^3 - \ddot{I}_M^3 = 0 \quad ; \quad (1) \end{aligned}$$

балансові рівняння

$$T_0 \dot{S}_{(n)} - W_{(n)} = -\nabla_\alpha Q_{(n)}^\alpha + b_\alpha^\alpha Q_{(n)}^3 - \frac{2n-1}{2h} [q^+ - (-1)^n q^- - 2(n-1) Q_{(1)}^3],$$

$$\dot{C}_{(n)} - V_{(n)} = -\nabla_{\alpha} P_{(n)}^{\alpha} + b_{\alpha}^{\alpha} P_{(n)}^3 - \frac{2n-1}{2h} [p^{+} - (-1)^n p^{-} - 2(n-1) P_{(1)}^3]; \quad (2)$$

рівняння теплопровідності і дифузії

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^2 k_{\alpha\beta}^{(n,m)} l Q_{(m)}^{\alpha} &= -\frac{2h}{2n-1} \nabla_{\beta} T_{(n)}, & \sum_{m=1}^2 k_{33}^{(n,m)} l Q_{(m)}^3 &= -2(2-n) T_{(2)}, \\ \sum_{m=1}^2 K_{\alpha\beta}^{(n,m)} l' P_{(m)}^{\alpha} &= -\frac{2h}{2n-1} \nabla_{\beta} \mathcal{M}_{(n)}, & \sum_{m=1}^2 K_{33}^{(n,m)} l' P_{(m)}^3 &= -2(2-n) \mathcal{M}_{(2)}; \end{aligned} \quad (3)$$

рівняння стану

$$\begin{aligned} N^{\beta\alpha} &= D_{(1)}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^0) + D_{(2)}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varkappa_{\gamma\delta} - \varkappa_{\gamma\delta}^0) + D_{(1)}^{\alpha\beta 33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) - \\ &\quad - \sum_{m=1}^2 (\beta_{(m)}^{\beta\alpha} T_{(m)} - \gamma_{(m)}^{\beta\alpha} \mathcal{M}_{(m)}), \\ N^{33} &= D_{(1)}^{33\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^0) + D_{(2)}^{33\gamma\delta} (\varkappa_{\gamma\delta} - \varkappa_{\gamma\delta}^0) + D_{(1)}^{3333} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) - \\ &\quad - \sum_{m=1}^2 (\beta_{(m)}^{33} T_{(m)} - \gamma_{(m)}^{33} \mathcal{M}_{(m)}), \\ M^{\beta\alpha} &= D_{(2)}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^0) + D_{(3)}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varkappa_{\gamma\delta} - \varkappa_{\gamma\delta}^0) + D_{(2)}^{\alpha\beta 33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) - \\ &\quad - h \sum_{m=1}^2 (\beta_{(m+1)}^{\beta\alpha} T_{(m)} - \gamma_{(m+1)}^{\beta\alpha} \mathcal{M}_{(m)}), \\ N^{3\alpha} &= D_{(1)}^{3\alpha\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^0) + D_{(2)}^{3\alpha\gamma\delta} (\varkappa_{\gamma\delta} - \varkappa_{\gamma\delta}^0) + D_{(1)}^{3\alpha 33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0), \\ M^{3\alpha} &= D_{(1)}^{3\alpha\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^0) + D_{(2)}^{3\alpha\gamma\delta} (\varkappa_{\gamma\delta} - \varkappa_{\gamma\delta}^0) + D_{(1)}^{3\alpha 33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{\gamma 33}^0), \\ \frac{2h}{2n-1} S_{(n)} &= \sum_{m=1}^2 \left(\frac{1}{T_0} C_{(n,m)}^{\varepsilon, M} T_{(m)} + d_{(n,m)}^M \mathcal{M}_{(m)} \right) + \\ &\quad + \beta_{(n)}^{\alpha\delta} (\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon_{\alpha\delta}^0) + h \beta_{(n+1)}^{\alpha\delta} (\varkappa_{\alpha\delta} - \varkappa_{\alpha\delta}^0) + \beta_{(n)}^{33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0), \\ \frac{2h}{2n-1} C_{(n)} &= \sum_{m=1}^2 (d_{(n,m)}^M T_{(m)} + d_{(n,m)}^S \mathcal{M}_{(m)}) + \\ &\quad + \gamma_{(n)}^{\alpha\delta} (\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon_{\alpha\delta}^0) + h \gamma_{(n+1)}^{\alpha\delta} (\varkappa_{\alpha\delta} - \varkappa_{\alpha\delta}^0) + \gamma_{(n)}^{33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0); \end{aligned} \quad (4)$$

геометричні співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= (\nabla_{\beta} u_{\alpha} + \nabla_{\alpha} u_{\beta}) / 2 + b_{\alpha\beta} u_3, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha} + \nabla_{\alpha} u_3 + b_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}, \\ \varkappa_{\alpha\beta} &= (\nabla_{\beta} \gamma_{\alpha} + \nabla_{\alpha} \gamma_{\beta}) / 2 + b_{\alpha\beta} \gamma_3, \quad \varkappa_{\alpha 3} = \nabla_{\alpha} \gamma_3, \quad \varepsilon_{33} = \gamma_3; \end{aligned} \quad (5)$$

умови тепло- масообміну на поверхнях $x^3 = \pm h$

$$q^\pm = \alpha_\pm (t^\pm - t_c^\pm), \quad p^\pm = \alpha_\pm^* (\mu^\pm - \mu_c^\pm); \quad (6)$$

граничні умови на контурі g :

$$\begin{aligned} \text{механічні} \quad N^{\alpha i} v_\alpha &= \bar{N}^i, \quad M^{\alpha i} v_\alpha = \bar{M}^i, \\ \text{теплофізичні} \quad Q_{(n)}^\alpha v_\alpha &= \alpha_g (T_n - T_{(n)}^c), \quad P_{(n)}^\alpha v_\alpha = \alpha_g^* (\mathcal{M}_{(n)} - \mathcal{M}_{(n)}^c); \end{aligned} \quad (7)$$

початкові умови при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \text{механічні} \quad u_i &= u_i^\circ, \quad \gamma_i = \gamma_i^\circ, \quad \dot{u}_i = \bar{u}_i^\circ, \quad \dot{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i^\circ, \\ \text{теплофізичні} \quad T_{(n)} &= T_{(n)}^\circ, \quad \mathcal{M}_{(n)} = \mathcal{M}_{(n)}^\circ, \quad \dot{T}_{(n)} = \bar{T}_{(n)}^\circ, \quad \dot{\mathcal{M}}_{(n)} = \bar{\mathcal{M}}_{(n)}^\circ. \end{aligned} \quad (8)$$

Введені позначення

$$\{T_{(n)}, S_{(n)}, Q_{(n)}^i, \mathcal{M}_{(n)}, C_{(n)}, P_{(n)}^i, W_{(n)}, V_{(n)}\} = \int_{-h}^h \{t, s, q_t^i, \mu, c, p_c^i, w_t, v_c\} \left(\frac{x^3}{h}\right)^{n-1} dx^3;$$

$$\{k_{ij}^{(n,m)}, K_{ij}^{(n,m)}, C_{(n,m)}^{e,M}, d_{(n,m)}^M, d_{(n,m)}^S\} = \int_{-h}^h \{k_{ij}, K_{ij}, C_{ij}^{e,M}, d_M, d_S\} \left(\frac{x^3}{h}\right)^{m+n-2} dx^3;$$

$$I_N^i = \rho_{(1)} u^i + \rho_{(2)} \gamma^i; \quad I_M^i = \rho_{(2)} u^i + \rho_{(3)} \gamma^i;$$

$$\{\beta_{(n)}^{ij}, \gamma_{(n)}^{ij}\} = \int_{-h}^h \{\beta^{ij}, \gamma^{ij}\} \left(\frac{x^3}{h}\right)^{n-1} dx^3; \quad \rho_{(q)} = \int_{-h}^h \rho (x^3)^{q-1} dx^3 \quad (q = 1, 2, 3);$$

$$C^{e,M} = C^{e,c} + T_0 d_T^{e,c} d_M; \quad d_M = d_T^{e,c} / d_c^{e,t}; \quad d_S = 1 / d_c^{e,t};$$

$$\beta^{ij} = \beta_T^{ij} + \gamma^{ij} d_T^{e,c}; \quad \gamma^{ij} = \gamma_c^{ij} d_S; \quad l = 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad l' = 1 + \tau_r' \frac{\partial}{\partial \tau};$$

$D_{(q)}^{ijkl}(\mathbf{x})$ – інтегральні характеристики тензора жорсткості анізотропного тіла; $\beta_T^{ij}(\mathbf{x})$ і $\gamma_c^{ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів термопружності і механодифузії; $k_{ij}(\mathbf{x})$ і $K_{ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів теплового і концентраційного опору; $C^{e,c}(\mathbf{x})$ – теплоємність при сталій деформації та концентрації; $\rho(\mathbf{x})$ – густина матеріалу; $d_T^{e,c}(\mathbf{x})$ і $d_c^{e,t}(\mathbf{x})$ – коефіцієнти, які характеризують залежність хімічного потенціалу $\mu(\mathbf{x}, \tau)$ від температури $t(\mathbf{x}, \tau)$ і концентрації $c(\mathbf{x}, \tau)$. τ_r і τ_r' – час релаксації потоків тепла і маси; $s(\mathbf{x}, \tau)$ – ентропія одиниці об'єму; $w_t(\mathbf{x}, \tau)$ і $v_c(\mathbf{x}, \tau)$ – інтенсивності джерел тепла і маси;

$q_t^i(\mathbf{x}, \tau)$ і $p_c^i(\mathbf{x}, \tau)$ – компоненти векторів потоку тепла і маси; $\alpha_{\pm}$, $\alpha_{\pm}^*$, α_g , α_g^* – коефіцієнти тепло- і масовіддачі з граничних поверхонь $x^3 = \pm h$ і контура g відповідно; v_{α} – компоненти вектора нормалі до контура g ; ∇_{α} – символ коваріантної похідної в метриці середньої поверхні; $b_{\alpha\beta}$ – поверхневий тензор кривини; індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1, 2, латинськими – 1, 2, 3; індекси n і m в дужках не мають тензорного характеру і приймають значення 1, 2; використовується правило підсумовування за індексами, що повторюються; крапкою зверху позначена часткова похідна за часом.

Рівняння (1)–(8) становлять повну систему рівнянь математичної моделі, яка описує процес механотермодифузії в неоднорідних анізотропних оболонках з дисторсіями.

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. Підстригач Я. С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому тілі // Доп. АН УРСР. – 1961. – № 2. – С. 169–173.
3. Підстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсій в теорії тонких оболонок с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
4. Підстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
5. Швець Р. Н., Флячок В. М. Уравнения механотермодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // Мат. методы и физ.-мех. поля – 1984. – Вып. 20. – С. 54–61.

MATHEMATICAL MODELING THE THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF NONHOMOGENEOUS ELASTIC ANISOTROPIC SHELLS

Ulyana Zhydyk

The Ukrainian academy of a print

Model of thermodiffusion processes in nongomogeneous elastic anisotropic shells with distortions is proposed. The model processes effect of transverse mechanical and thermal material anisotropy.

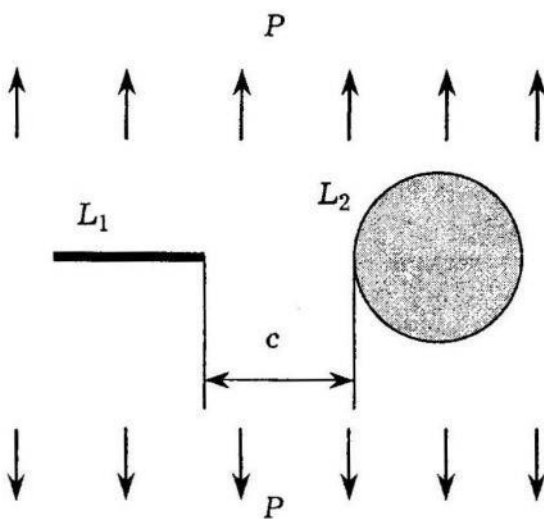
Стаття надійшла до редколегії 26.11.1999

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАТІВКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА НАЯВНОСТІ ТРІЩИНИ АБО ЛІНІЙНОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Стефан Калосров, Олена Горянська, Юлія Шаповалова

Донецький державний університет



Розглянемо анізотропну платівку з еліптичним отвором, до якого впаяно без попереднього натягу ядро з іншого анізотропного матеріалу. Платівка має прямолінійний розріз або абсолютно жорстке лінійне включення, які розглядатимемо як частковий випадок еліптичного дефекту з нульовою піввіссю. Платівку на нескінченності описують зусилля $\sigma_y^\infty = p$, що діють перпендикулярно до лінії тріщини (лінійного включення).

Визначення напруженого стану розглядуваної платівки зведено [1, 2] до знаходження комплексних потенціалів

ціалів

$$\Phi'_j(z_j) = \Gamma_j + \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p a_{jlp}}{\zeta_{kl}^{p-1} R_{jl} (\zeta_{jl}^2 - m_{jl})} \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

для платівки та

$$\Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_{kn}^2 \frac{(z_j^{(2)})^{n-1}}{(R_j^{(2)})^n}, \quad (2)$$

для включення із крайових умов [3]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \beta_{q1} \delta_j \Phi'_j(z_j) = f_{q1}(t) \quad (q = 1, 2), \quad (3)$$

на вільній від підкріплень або жорстко підкріплених тріщині та

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \{ \beta_{q2} \delta_j \Phi'_j(z_j) + \beta_{qj}^{(2)} \delta_j^{(2)} \Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) \} = \varphi_{q2} \quad (q = \overline{1, 4}) \quad (4)$$

на поверхні пружного включення. Тут ζ_{jl} – змінні, визначені з неявних залежностей [1]

$$z_j = z_{0jl} + R_{jl} (\zeta_{jl} + m_{jl}/\zeta_{jl}),$$

$$R_{jl} = \frac{a_l - i\mu_j b_j}{2}, \quad m_{jl} = \frac{a_l + i\mu_j b_j}{2R_{jl}}; \quad (5)$$

a_l , b_l – півосі еліпса L_l ; Γ_j – відомі сталі [1]; a_{jlp} та $b_{kn}^{(2)}$ – невідомі сталі, які визначають з крайових умов.

Функції $\Phi_j(z_j)$ та $\Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)})$ визначені відповідно в областях, що отримані з області S за допомогою афінних перетворень $z_j = x + \mu_j y$ та $z_j^{(2)} = x + \mu_j^{(2)} y$.

Використовуючи метод найменших квадратів таким же чином, як і в [1, 2], отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих сталих, що входять у функції (1), (2). Після розв'язання цієї системи напруження в пластинці та включеннях обчислюють за відомими формулами [3], а коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для кінців прямолінійного розрізу чи включення так [1]:

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_y; \quad K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} 2\tau_{xy}. \quad (6)$$

Виконано числові дослідження розподілу напружень та зміни КІН для анізотропної платівки з тріщиною або жорстким лінійним включенням L_1 одиничної напівдовжини та круговим пружним ядром з контуром L_2 одиничного радіуса. Вважали, що платівка виготовлена з ортотропного склопластику, для якого $a_{11} = 6.711$; $a_{12} = 2.081$; $a_{13} = a_{16} = a_{26} = 0$; $a_{22} = 166.670$; $a_{66} = 250.00$; $\mu_1 = 0.831 i$; $\mu_2 = 6.481 i$. Для коефіцієнтів деформації матеріалу ядра вважали $a_{ij}^{(2)} = \lambda a_{ij}$. У цьому разі коефіцієнт λ може набувати довільних значень. Значення λ , що дорівнюють ∞ або 0 , відповідають випадкам абсолютно податного (платівка з отвором) або абсолютно жорсткого ядра. Результати, наведені нижче, якщо інше не обумовлено, наведені для $\lambda = 2$.

У табл. 1 для деяких значень відстані між кінцем тріщини та контуром отвору s наведені значення нормальних напружень σ_θ^2 у платівці навколо контуру L_2 на площинах, перпендикулярних до контуру, та значення КІН для кінців тріщини або жорсткого лінійного включення L_1 . У цьому випадку θ – центральний кут кола L_2 , який відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки. З наведених даних можна зробити висновки, що у разі зближення тріщини з отвором виникає значне підвищення концентрації напружень у точках контуру L_2 при $5\pi/6 < \theta < 7\pi/6$, а також значень КІН; унаслідок зближення жорсткого лінійного включення з отвором значення КІН майже не змінюються, а концентрація напружень на контурі отвору значно зменшується.

Таблиця 1

с	Платівка з тріщиною та отвором					Платівка з жорстким лінійним включенням та отвором				
	K_1^-	K_1^+	θ			K_1^-	K_1^+	θ		
			0	$\pi/2$	π			0	$\pi/2$	π
∞	1.000	1.000	2.36	-5.38	2.36	0.010	0.010	2.36	-5.39	2.36
1	1.091	1.198	2.46	-5.87	2.40	0.011	0.010	2.06	-3.86	1.87
0.5	1.146	1.383	2.51	-6.01	2.54	0.012	0.007	1.90	-3.04	1.26
0.1	1.217	1.962	2.56	-6.04	5.89	0.017	0.009	1.83	-2.71	-0.28
0.01	1.220	2.751	2.60	-6.72	22.01	0.017	0.010	1.87	-2.70	-0.28

У табл. 2 для різних значень відстані s наведені значення нормальних напружень σ_θ^2 та σ_r^2 у пружному включенні на межі контакту з платівкою, а також КІН для кінців тріщини або жорсткого лінійного включення L_1 . Як бачимо, у разі зближення тріщини з пружним включенням значення КІН та напружень σ_θ^2 значно змінюються, значення напружень σ_r^2 змінюються мало. Унаслідок зближення жорсткого лінійного включення з пружним включенням значення КІН змінюються мало.

Таблиця 2

с	K_1^-	K_1^+	σ_θ^2			σ_r^2		
			θ			θ		
			0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
Платівка з тріщиною та пружним включенням								
∞	1.000	1.000	1.39	-0.65	1.39	-0.14	-0.65	-0.14
1	0.749	0.595	1.37	-0.61	1.39	-0.12	0.75	-0.01
0.5	0.687	0.452	1.34	-0.53	1.33	-0.12	0.78	-0.03
0.1	0.594	0.076	1.27	-0.38	0.45	-0.09	0.83	0.29
0.01	0.590	0.027	1.26	-0.37	0.29	-0.09	0.83	0.66
Платівка з жорстким лінійним включенням та пружним включенням								
∞	0.010	0.010	1.39	-0.65	1.39	-0.14	0.69	-0.14
1	0.010	0.010	1.30	-0.43	1.20	-0.14	0.78	-0.09
0.5	0.010	0.009	1.26	-0.37	0.99	-0.13	0.82	-0.05
0.1	0.010	0.008	1.22	-0.30	0.21	1.22	0.84	0.00
0.01	0.010	0.008	1.22	-0.29	0.06	1.22	0.85	0.03

Для різних λ дослідження, аналогічні до наведених вище, довели що зі збільшенням λ значення напружень σ_θ^2 навколо контуру пружного включення та КІН для кінців розрізу або лінійного включення збільшуються, а значення напружень σ_r^2 зменшуються.

1. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя и др. – К.: А.С.К., 1998. – Т. 7. – С. 10–26.
2. Калоеров С. А., Горянская Е. С., Шаповалова Ю. Б. Исследование напряженного состояния анизотропного тела с эллиптическими отверстиями, упругими включениями и трещинами // Теор. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 30. – С. 175–187.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

STRESS STATE OF THE ANISOTROPIC PLATE WITH ELLIPTIC ELASTIC INCLUSION AND CRACK OR LINEAR RIGID INCLUSION

Stefan Kaloerov, Olena Goryanska, Yulia Shapovalova

Donetsk state university

The stress state problem for the anisotropic plate with elliptic elastic inclusion and crack or linear rigid inclusion was solved. Influence of the geometric parameters of the plate on the stress state was investigated.

Стаття надійшла до редколегії 22.11.1999

УДК 539.3

КРУЧЕННЯ ОРТОТРОПНОГО ТОНКОСТІННОГО ПРИЗМАТИЧНОГО СТРИЖНЯ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ НА БОКОВІЙ ПОВЕРХНІ

Олександр Космодаміанський, Роман Нескородєв

Донецький державний університет

Розглянемо тонкостінний коробчастий стрижень прямокутного перерізу, віднесений до декартової системи координат $O_1x_1x_2x_3$. На одній з граней стрижня маємо еліптичний отвір з півсями a і b . Вважаємо отвір малим і розміщеним далеко від країв грані. Товщина стінки $2h$ є також малою порівняно з розмірами отвору. Головні осі еліпса збігаються з напрямками осей Ox і Oz локальної системи координат $Oxzy$, пов'язаної з центром отвору. Цю систему отримано з $O_1x_1x_2x_3$ перенесенням $z = x_3 - l$, $y = x_2 - (b_1 - h)$, $x = x_1$, так що серединна площина грані збігається з

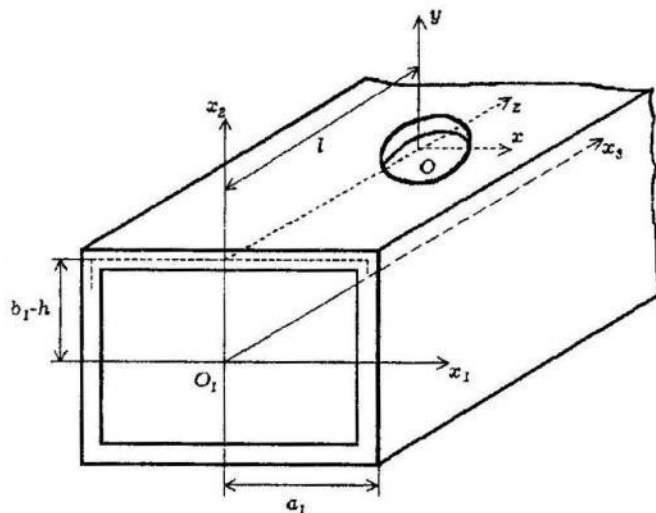


Рис. 1.

площиною Oxz ($-h \leq y \leq h$) (рис. 1). Припустимо, що в кожній точці стрижня є три площини пружної симетрії, які ортогональні до стінок коробки. Стрижень скручується моментами, прикладеними до його торців, а контур еліптичного отвору вільний від зовнішніх зусиль.

Розв'язок задачі, який відповідає основному напруженому стану, що виникає в стрижні без отвору, шукають у вигляді ряду за системою фундаментальних розв'язків відповідного диференціаль-

ного рівняння. Коефіцієнти розкладу визначають з крайової умови на боковій поверхні стрижня [2, 3]. Дослідження проводили для різноманітних матеріалів і товщин стінок коробки. Отримані результати апроксимували в околі еліптичного отвору степеневими функціями в системі координат $Oxzy$. Апроксимування засвідчило, що по товщині стінок дотичні напруження $\tau_{yz}^0 = 0$, а τ_{xz}^0 змінюються за лінійним законом (за винятком невеликих зон, що прилягають до місць різкої зміни форми стрижня):

$$\tau_{xz}^0 = (p_0 + p_1 y) A_{55} \vartheta b_1, \quad (1)$$

де A_{55} – модуль пружності; ϑ – відносний кут закручування, а сталі ве-

личини p_0 і p_1 залежать від геометричних та пружних параметрів розв'язку задачі кручення стрижня без еліптичного отвору.

Для відшукування другого поля напружень стінку коробки поблизу отвору будемо вважати тонкою пластиною. Інтегрування рівнянь теорії пружності ортотропного тіла для тонкої пластини в системі координат $Oxyz$, коли її бокові поверхні вільні від навантажень ($\tau_{yz} = \tau_{xy} = \sigma_y = 0$ при $y = \pm h$), виконаємо засобом малого параметра, за який виберемо величину h і товщинну координату y . Для цього розкладемо переміщення $u_i(x, z, y)$ в ряди за змінною y :

$$u_i = u_{i0}(x, z) + y u_{i1}(x, z) + \frac{y^2}{2!} u_{i2}(x, z) + \dots \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

Процес інтегрування рівнянь теорії пружності ортотропного тіла поділяють на дві задачі: розтягу-стиску (задача А) та згину (задача В). Наведемо остаточні результати за кожною з цих задач з точністю до значень, що містять малий параметр в степені не вище першого.

1. Задача А. Розклади (2) і напруження набувають вигляду:

$$(u_1, u_3) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (\delta_{1j}, \delta_{3j}) \varphi_j(z_j^0), \quad u_2 = y \left(2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \delta_{2j} \varphi_j'(z_j^0) \right); \quad (3)$$

$$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (\mu_j^2, 1, -\mu_j) \varphi_j'(z_j^0), \quad \tau_{yz} = \tau_{xy} = \sigma_y \equiv 0. \quad (4)$$

Тут $\varphi_j(z_j^0)$ – довільні функції узагальнених комплексних змінних $z_j^0 = x + \mu_j z$. Комплексні параметри μ_j є коренями рівняння

$$c_{11} A_{55} + (c_{11} c_{33} + A_{55}^2 - (c_{13} + A_{55})^2) \mu^2 + c_{33} A_{55} \mu^4 = 0, \quad (5)$$

а коефіцієнти δ_{kj} визначені співвідношеннями

$$\delta_{1j} = p_j / \Delta_j, \quad \delta_{3j} = q_j / \Delta_j, \quad \delta_{2j} = -(A_{21} \delta_{1j} + A_{23} \delta_{3j} \mu_j) / A_{22},$$

$$p_j = (c_{13} + A_{55}) \mu_j, \quad q_j = -(c_{11} + A_{55} \mu_j^2),$$

$$\Delta_j = c_{31} p_j + c_{33} \mu_j q_j, \quad c_{ij} = A_{ij} - A_{i2} A_{2j} / A_{22}, \quad i, j = 1, 3.$$

Крайові умови для функцій $\varphi_j(z_j^0)$ мають вигляд

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \mu_j \varphi_j = p_0 x, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \varphi_j = p_0 z. \quad (6)$$

2. Задача В. Розклади (2) і напруження набувають вигляду

$$(u_1, u_3) = -y \left(2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (1, -\lambda_j) w_j' \right), \quad u_2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} w_j; \quad (7)$$

$$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}) = -y \left(2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (p_j, q_j, r_j) w_j'' \right), \quad \sigma_y = 0;$$

$$\tau_{yz} = -f_2 (2 \operatorname{Re} (s_1 w_1'' + s_2 w_2'')), \quad \tau_{xy} = f_2 (2 \operatorname{Re} (\lambda_1 s_1 w_1'' + \lambda_2 s_2 w_2'')). \quad (8)$$

Тут $w_j(z_j^1)$ – довільні функції узагальнених комплексних змінних $z_j^1 = x + \lambda_j z$. Параметри λ_j задовольняють характеристичне рівняння

$$c_{11} + 2(c_{13} + 2A_{55})\lambda^2 + c_{33}\lambda^4 = 0. \quad (9)$$

У співвідношеннях (8) уведено такі позначення:

$$p_j = c_{11} + c_{13}\lambda_j^2, \quad q_j = c_{31} + c_{33}\lambda_j^2, \quad r_j = 2A_{55}\lambda_j, \quad f_2 = (y^2 - h^2)/2,$$

$$s_j = (c_{11} + (c_{13} + 2A_{55})\lambda_j^2)/\lambda_j = p_j/\lambda_j + r_j = -r_j - q_j\lambda_j.$$

Крайові умови для визначення функцій $w_j(z_j^1)$ описують співвідношення:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \frac{p_j}{\lambda_j} w_j' = -(p_1 - c)x, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} q_j w_j' = -(p_1 + c)z. \quad (10)$$

Тут, як і в прикладній теорії тонких плит, враховані крайові умови для напружень τ_{xy} і τ_{yz} . Ці умови дадуть співвідношення $2 \operatorname{Re} (s_1 w_1'' + s_2 w_2'') = c$, яке використовували у разі виведення (10). Стала c визначена з умови однозначності переміщень u_2 у (7).

Числові дослідження напруженого стану поблизу отвору проводили для ізотропного матеріалу (коефіцієнт Пуассона дорівнює 1/3) й ортотропного склопластика з пружними сталими [1]:

$$E_x = 4.76E, \quad E_y = 2.07E, \quad E_z = 1.45E, \quad G_{xy} = 0.531E, \quad G_{yz} = 0.434E,$$

$$G_{zx} = 0.501E, \quad \mu_{xy} = 0.149, \quad \mu_{yz} = 0.325, \quad \mu_{zx} = 0.099, \quad E = 10^4 \text{ МПа}.$$

Переріз коробки вважають квадратним ($a_1 = b_1$), товщина стінки $2h = 0.05b_1$. У цьому випадку $p_0 = -1$, $p_1 = -2$ для ізотропного матеріалу ($g = A_{55}/A_{44} = 1$) і $p_0 = -0.95$, $p_1 = -2$ для ортотропного ($g = 1.154$). Напруження σ_θ , що виникають поблизу контуру отвору на площадках, нормальних до нього, обчислювали за формулою $\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1 y$, де σ_θ^0 – складова задачі розтягу-стиску, а σ_θ^1 – згину.

У випадку кругового отвору ($a = b = 0.2b_1$) максимальні напруження σ_θ в ізотропному матеріалі досягають при $\theta = 45^\circ$, а в ортотропному – при

$\theta = 68^\circ$, вони, відповідно, такі:

$$\sigma_\theta = (4.00 + 3.20y)p,$$

$$\sigma_\theta = (3.95 + 1.69y)p$$

($p = A_{55} \theta b_1$). На рис. 2 показаний розподіл напружень σ_θ / p у точках серединної площини кругового отвору. Крива 1 відповідає ізотропному випадку, а крива 2 – ортотропному.

Дослідження також проводили для еліптичного отвору $2a = b = 0,2b_1$. Наведемо максимальні значення напружень:

$$\text{ізотропний матеріал: } \theta = 63^\circ, \sigma_\theta = (4.50 + 4.07y)p;$$

$$\text{ортотропний матеріал: } \theta = 78^\circ, \sigma_\theta = (4.765 + 0.20y)p.$$

Отже, поправка, яку вносить згинна складова, мала порівняно зі складовою розтягу-стиску. Її максимальне значення не перевищує $h \max |\sigma_\theta^1|$ і становить до 3% від напружень розтягу-стиску. Зі зменшенням товщини стінок вона наближається до нуля.

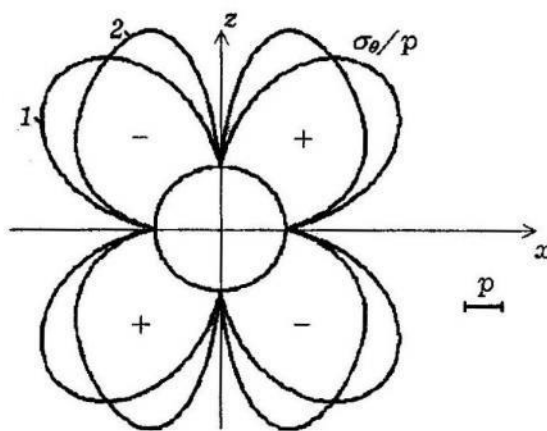


Рис. 2.

1. Ашкенази Е. К., Ганов Е. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К. – Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Нескородев Р. Н. Кручение полых анизотропных стержней произвольного поперечного сечения // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 1998. – Вип. 1. – С. 67–74.

TORSION OF AN ORTHOTROPIC THIN-WALLED PRISMATIC ROD WITH AN ELLIPTIC HOLE ON A LATERAL AREA

Alexander Kosmodamiansky, Roman Neskorohev

Donetsk state university

In the article a thin-walled prismatic rod twisted on butt-end and having an elliptic hole on a lateral area is considered. At determination of a strain state near a hole the task was divided in two: stretchings-compression and curving. The numerical researches for isotropic and orthotropic materials in case of circular and elliptic holes are given.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.1999

УДК 536.2

**УЗАГАЛЬНЕНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ТЕРМОЧУТЛИВОГО
ПІВПРОСТОРУ, ЗУМОВЛЕНЕ ОПРОМІНЮВАННЯМ
КОНЦЕНТРОВАНИМ ПОТОКОМ ЕНЕРГІЇ (КПЕ)**

Олександр Кулик*, Ігор Махоркін*, Андрій Сеник**

**Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

*** Національний університет «Львівська політехніка»*

Нехай поверхня $z = 0$ півпростору нагрівається нормально-розподіленим потоком енергії з коефіцієнтом зосередженості k

$$q = q_0 \exp(-kr^2), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Приймаємо також, що початкова температура тіла та середовища, яке омиває граничну поверхню однакові і дорівнюють $t_c = \text{const}$, а швидкість нагрівання тіла дорівнює нулю.

Наведена схема є розрахунковою моделлю для визначення теплового стану масивного тіла, поверхню якого опромінюється КПЕ [5]. Визначення температурного поля t проводиться на основі класичних співвідношень лінійної теорії теплопровідності. Однак реальне одержання імпульсів КПЕ протяжності 10^{-11} – 10^{-12} с. значної потужності вимагає враховувати час релаксації теплового потоку τ_r та теплову нелінійність матеріалу.

Для матеріалів з простою тепловою нелінійністю ($a = \lambda_t(t)/c_v(t) = \text{const}$), нехтуючи теплообміном, крайову задачу узагальненої теплопровідності [3] запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + c_q^{-2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2}, \\ \lambda_t^* \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -q_0 \exp(-kr^2) [S_+(\tau) + \tau_r \delta_+(\tau)], \\ \vartheta|_{r=0} \neq \infty, \quad \vartheta|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \quad \vartheta|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad \left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_t^*} \int_{t_c}^t \lambda_t(\xi) d\xi, \quad (2)$$

де $q_0 = Qk/\pi$ – густина потужності випромінювання в центрі плями нагрівання, Q – загальна потужність випромінювання, $c_q = \sqrt{a/\tau_r}$ – швидкість розповсюдження тепла, $c_v(t)$, $\lambda_t(t)$ – температурні залежності коефіцієнтів об'ємної теплоємності та теплопровідності відповідно, λ_t^* – опорне значення коефіцієнта теплопровідності, $S_+(\zeta) = \{1, \zeta > 0; 0, \zeta \leq 0\}$ – асиметрична функція Гевісайда $\delta_+(\zeta) = S'_+(\zeta)$.

Розв'язок крайової задачі (1) в трансформантах Ганкеля за радіальною координатою r та Лапласа за часом τ має вигляд

$$\bar{\vartheta} = \frac{1 + s\tau_r}{2ks\eta} q_0 \exp\left(-\frac{\xi^2 + 4k\eta z}{4k}\right). \quad (3)$$

Тут $\bar{\vartheta} = \int_0^\infty \vartheta \exp(-s\tau) d\tau$, $\bar{\vartheta} = \int_0^\infty r \vartheta J_0(\xi r) dr$, $\eta^2 = \xi^2 + \frac{s}{a} + \frac{s^2}{c_q^2}$, ξ, s – параметри перетворення Ганкеля та Лапласа [1] відповідно; $J_0(\zeta)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Переходячи в (3) до оригіналів, використавши довідкові дані [2] та теорему про згортку, отримуємо, що змінна Кірхгофа ϑ описується виразом

$$\vartheta = \frac{q_0 c_q}{2k\lambda_t^*} \left\{ \tau_r \exp\left(-\frac{\tau}{2\tau_r}\right) \int_0^\infty \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4k}\right) I_0(f(\tau, \xi, z)) J_0(\xi r) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{z/c_q}^\tau \exp\left(-\frac{\varsigma}{2\tau_r}\right) \int_0^\infty \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4k}\right) I_0(f(\varsigma, \xi, z)) J_0(\xi r) d\xi d\varsigma \right\} S_+\left(\tau - \frac{z}{c_q}\right), \quad (4)$$

де $f(\varsigma, \xi, z) = \frac{\varsigma}{2\tau_r} \sqrt{1 - 4a\tau_r \xi^2} \sqrt{1 - z^2/(c_q \varsigma)^2}$, $I_0(\eta)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Аналітично виразити t через ϑ можна лише в найпростіших випадках. Наприклад, коли $\lambda_t(t) = \lambda_t^*(1 \pm \alpha t)$. На практиці залежність $\lambda_t(t)$ здебільшого задається таблично і її, з відомою точністю, можемо апроксимувати виразом [4]

$$\lambda_t(t) \approx a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) S_+(t - t_i) + \left\{ b_0 + \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) S_+(t - t_i) \right\} t, \quad (5)$$

де $a_i = \frac{\lambda_{t_{i+1}} t_{i+1} - \lambda_{t_i} t_i}{t_{i+1} - t_i}$, $b_i = \frac{\lambda_{t_{i+1}} - \lambda_{t_i}}{t_{i+1} - t_i}$, $t_n = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = t_K$, $\lambda_i = \lambda_t(t_i)$, $[t_L; t_K]$ – область визначення температурної залежності коефіцієнта теплопровідності. Зауважимо, що співвідношенням (5), з заданим ступенем точності, можна описувати і довільно задані залежності $\lambda_t(t)$. Враховуючи, що при $\vartheta'(t) = \lambda_t(t)/\lambda_t^* > 0$ правильне співвідношення $S_+(\vartheta - \vartheta_i) = S_+(t - t_i)$, з (2) отримуємо [4]

$$t = \begin{cases} \frac{1}{b(\vartheta)} \left\{ \sqrt{a^2(\vartheta) + 2b(\vartheta) \left(\lambda_t^* \vartheta + \vartheta_c + \sum_{i=1}^n F_i S_+(\vartheta - \vartheta_i) \right)} - a(\vartheta) \right\}, & \text{при } b(\vartheta) \neq 0; \\ \frac{1}{a(\vartheta)} \left(\lambda_t^* \vartheta + \vartheta_c + \sum_{i=1}^n F_i S_+(\vartheta - \vartheta_i) \right), & \text{при } b(\vartheta) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тут

$$F_i = \left(a_i - a_{i-1} + \frac{b_i - b_{i-1}}{2} t_i \right) t_i, \quad \{a(\vartheta), b(\vartheta)\} \sim p(\vartheta) = p_0 + \sum_{i=1}^n (p_i - p_{i-1}) S_+(\vartheta - \vartheta_i),$$

$$\vartheta_c = \left(a_0 + \frac{b_0}{2} t_c \right) t_c + \sum_{i=1}^n \left(a_i - a_{i-1} + \frac{b_i - b_{i-1}}{2} (t_c - t_i) \right) (t_c - t_i) S_+(t_c - t_i), \quad \vartheta_i = \vartheta(t_i).$$

Якщо прийняти $\lambda_t(t) \approx \lambda_t^* = \text{const}$, то з (2) випливає, що змінна Кірхгофа (4) описує поле приростів температури $t - t_c$ нетермочутливого півпростору. Згідно з класичною теорією теплопровідності ($\tau_r = 0$) температурне поле нетермочутливого півпростору для цього випадку визначається виразом [5]

$$t = t_c + \frac{q_0}{\lambda_t^*} \sqrt{\frac{a}{\pi}} S_+(\tau) \int_0^\tau \exp \left[- \left(\frac{kr^2}{4ka\zeta + 1} - \frac{z^2}{4a\zeta} \right) \right] / [\sqrt{\zeta} (4ka\zeta + 1)] d\zeta. \quad (7)$$

Вираз (7) для t отримуємо також і з (4) граничним переходом при $\tau_r \rightarrow 0$.

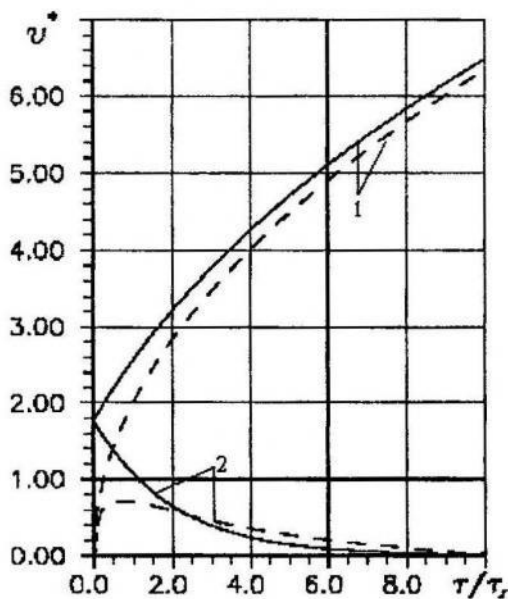
Числовий аналіз, виконаний на основі співвідношень (6), засвідчив, що врахування простої теплової нелінійності не впливає на якісний розподіл та часову поведінку значень температурного поля. Одержані значення температури можуть більше ніж на 20–25% відрізнятися від значень розрахованих при постійних теплофізичних характеристиках, що відповідають природній температурі $t_{np} \sim [18-27^\circ \text{C}]$. Використання середньоінтегральних

значень теплофізичних характеристик $[\lambda_t^*, c_v^*] \sim \frac{1}{t_K - t_c} \int_{t_c}^{t_K} P(\xi) d\xi$ допомага-

ло значно зменшити цю розбіжність, зробивши її в більшості випадків не більшою за 10%.

На рисунку зображено часову зміну $\vartheta^* = \vartheta \lambda_t^* \sqrt{\pi k} / (q_0 \sqrt{F_{or}})$ (криві 1) в центрі плями нагріву поверхні для значень комплексу $F_{or} = ak\tau_r < 10^{-5}$. Криві 2 відповідають значенням ϑ^* на осі потоку в точці $z = c_q \tau$ і характеризують зміну фронту температурної хвилі в часі. Суцільними лініями нанесені значення, які отримали на основі узагальненої моделі теплопровідності, штриховими – класичної.

З цих результатів випливає, що, аналізуючи тепловий стан тіл,



зумовлений дією КПЕ, в моменти часу $\tau < 10 \cdot \tau_r$ необхідно враховувати скінченність швидкості розповсюдження тепла. В моменти часу $\tau > 10 \cdot \tau_r$ дослідження температури можна вести, враховуючи класичну теорію теплопровідності, але густина теплового потоку q_0 не повинна перевищувати 10^{13} Вт/м². Аналогічні висновки, на підставі фізичних міркувань, отримано в [5].

Треба зауважити таке оскільки τ_r приймає значення $10^{-9} - 10^{-11}$ с, то з виразу (4) одержуємо просту формулу для обчислення температури поверхні нетермочутливого півпростору

$$t = t_c + \frac{q_0 \sqrt{a \tau_r}}{\lambda_t^*} \exp\left(-kr^2 - \frac{\tau}{2\tau_r}\right) \left[\left(1 + \frac{\tau}{\tau_r}\right) I_0\left(\frac{\tau}{2\tau_r}\right) + \frac{\tau}{\tau_r} I_1\left(\frac{\tau}{2\tau_r}\right) \right],$$

похибка обчислень за якою при $\tau \in [0; 10\tau_r]$ не перевищує 0,1%.

1. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – К.: Наук. думка, 1976. – 282 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая шк., 1965. – 466 с.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Кулик О. М., Маторкин І. М. Температурне поле термочутливого клина при опроміненні концентрованим потоком енергії // Крайові задачі термомеханіки: Зб. наук. праць. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Ч. 2. – С. 190–191.
5. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник / Н.Н. Рыкалин, А.А. Узлов, И.В. Зуев, А.Н. Кокора. – М.: Машиностроение, 1985. – 496 с.

GENERALIZED TEMPERATURE FIELD IN A THERMOSENSIBLE HALF-SPACE CAUSED BY CONCENTRATED ENERGY FLUX RADIATION

Olexandr Kulyk*, Ihor Makhorkin*, Andriy Senyk**

**Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

***National University «Lvivska Politechnika»*

Based on the generalized Fourier law the heat conduction problem is solved for heating a semi-infinite body with the simple heat nonlinearity by the normal distributed heat flux. The numerical investigation is carried out.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.1999

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ПОКРИТТЯМ

Олександр Максимук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

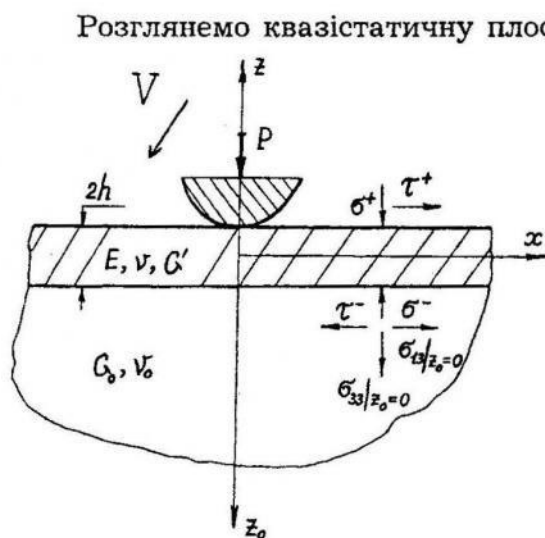


Рис. 1.

Розглянемо квазістатичну плоску задачу про контактну взаємодію системи: жорсткий штамп, пружна тонка пластина, пружна півплощина. Приймемо, що штамп притискається до пластини силою P (рис. 1), а між пластиною та півплощиною виконуються умови ідеального контакту. Штамп рухається з усередненою швидкістю V в напрямі перпендикулярному до площини (рис. 1). Внаслідок тертя відбувається зношування. Процес зношування моделюється лінійною залежністю між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя (теплові ефекти не враховуються) [3]

$$\frac{\partial w_*(x, t)}{\partial t} = f K_w V p(x, t), \quad (1)$$

де f – коефіцієнт тертя, $p(x, t)$ – контактний тиск під штампом, K_w – коефіцієнт інтенсивності зношування, t – час зношування, $w_*(x, t)$ – зміщення внаслідок зношування.

Рівняння рівноваги для покриття в переміщеннях мають вигляд

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tau, \quad -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(1 - \frac{D}{\Lambda'} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(p - q) - h \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (2)$$

де

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Bh^2}{3}, \quad \Lambda' = \frac{5hG'}{3}, \quad \tau = \tau^-, \quad \tau^+ = 0, \quad q = \sigma^-, \quad p = \begin{cases} \sigma^+, & |x| \leq a(t) \\ 0 & |x| \geq a(t) \end{cases}.$$

В умовах плоскої деформації напружено-деформований стан півплощини описується співвідношеннями ($x_0 = x$) [1]

$$\Delta u_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0, \quad \Delta w_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial z_0} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}, \quad \theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0}; \quad (3)$$

$$\sigma_{11} = \frac{2G_0}{1-2\nu_0} \left[(1-\nu_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial w_0}{\partial z_0} \right], \quad \sigma_{13} = G_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{33} = \frac{2G_0}{1-2\nu_0} \left[(1-\nu_0) \frac{\partial w_0}{\partial z_0} + \nu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right]. \quad (4)$$

Задача полягає в сумісному розв'язанні систем рівнянь (2), (3) за умов контакту між пластиною і півплощиною

$$u_1(x, -h) = u_0(x, 0), \quad u_3(x, -h) = w_0(x, 0), \quad q = -\sigma_{33}^0(x, 0), \quad \tau = -\sigma_{13}^0(x, 0) \quad (5)$$

та умові контакту штампа з пластиною

$$\delta(t) - f(x) = u_3(x, +h, t) + w_*(x, t), \quad |x| \leq a(t), \quad (6)$$

де $\delta(t)$ – переміщення штампа як жорсткого цілого, $f(x)$ – форма профілю штампа, $a(t)$ – область контакту штампа з пластиною. Диференціюючи перше рівняння (3) за x , друге за z_0 та додаючи їх, отримуємо, що $\Delta\theta_0 = 0$.

Застосовувавши оператор Δ до рівнянь (3), одержимо, що переміщення u_0 , w_0 задовольняють співвідношення

$$\Delta\Delta u_0 = 0, \quad \Delta\Delta w_0 = 0. \quad (7)$$

До (7) застосовуємо перетворення Фур'є за змінною x . З врахуванням умови, що $u_0, w_0 \rightarrow 0$ при $z_0 \rightarrow \infty$, розв'язок рівнянь (7) можемо записати у вигляді (t відіграє роль параметра, U_0, W_0 – трансформанти Фур'є)

$$\begin{aligned} U_0(\alpha, z, t) &= a_1(\alpha, t)e^{-|\alpha|z_0} + z_0 b_1(\alpha, t)e^{-|\alpha|z_0}, \\ W_0(\alpha, z, t) &= a_2(\alpha, t)e^{-|\alpha|z_0} + z_0 b_2(\alpha, t)e^{-|\alpha|z_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далі застосовуємо перетворення Фур'є до системи рівнянь (3) і знайдені розв'язки (8) підставляємо в (3), в результаті одержуємо

$$b_1 = (ia_2\alpha - a_1|\alpha|)/\chi, \quad b_2 = (a_2|\alpha| + ia_1\alpha)/\chi, \quad \chi = 3 - 4\nu_0.$$

Для знаходження a_1, a_2 використовуємо умови контакту (5) та рівняння (2). Застосовувавши перетворення Фур'є до (2) і (5) з використанням (8), отримуємо систему рівнянь для визначення a_1, a_2 . Не обмежуючи загальності постановки, проведемо цю процедуру в спрощеному варіанті. Розглядатимемо окремо задачу про накладку (термін введено в [1]) і задачу про згин пластини зчепленої з пружною півплощиною. В цьому випадку з (2) і (5) можемо записати ($z_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^0 &= G_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0, \\ -D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} &= \left(1 - \frac{D}{\Lambda'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p(x, t) + \frac{G_0}{1-2\nu_0} \left((1-\nu_0) \frac{\partial w_0}{\partial z_0} + \nu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Застосовувавши до (9) перетворення Фур'є та скориставшись співвідношеннями, що випливають з (8), остаточно одержуємо

$$a_1 = -\frac{i\alpha a_2(\chi - 1)}{(\chi + 1)|\alpha|}, \quad a_2 = -P(\alpha, t) \left(1 + \frac{D}{\Lambda'} \alpha^2\right) / \left(D\alpha^4 - |\alpha| \frac{G_0}{1 - \nu_0} \left(1 + \frac{D}{\Lambda'} \alpha^2\right)\right). \quad (10)$$

Для визначення контактної тиску під штампом використовуємо умову контакту (6). Оскільки в задачах зносостійкості важливо знати контактний тиск, умову (6) попередньо диференціюємо за x , довізначаємо функції на всю дійсну вісь [2] та застосовуємо пряме і обернене перетворення Фур'є. В результаті перетворень отримуємо інтегральне рівняння задачі вигляду (штрих означає похідну за x)

$$-f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) g(x - \xi) d\xi + fK_w V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t), \quad (11)$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad G(\alpha) = \left(1 + \frac{D}{\Lambda'} \alpha^2\right) / \left(D|\alpha|^3 - \frac{G_0}{1 - \nu_0} \left(1 + \frac{D}{\Lambda'} \alpha^2\right)\right).$$

Розв'язок інтегрального рівняння (11) шукаємо за умови рівноваги штамп.

З інтегрального рівняння (11) легко одержати часткові випадки:

- 1) прийнявши, що $G' = \infty$, отримуємо покриття, яке моделюється класичною теорією пластин Кірхгофа – Лява;
- 2) при $h = 0$ маємо інтегральне рівняння задачі про зношування пружної півплощини

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(x, \xi)}{\xi - x} d\xi + fK_w V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t), \quad (12)$$

де $\theta = G_0 / (1 - \nu_0)$. Якщо в (12) прийняти, що $V = 0$, одержимо відоме в літературі [4] сингулярне інтегральне рівняння першого роду;

- 3) якщо покриття моделювати вінклеровським шаром у вигляді неперервно розподілених пружних стрижнів (це відбувається, коли жорсткість покриття співвимірною або менша жорсткості основного тіла), тоді в умову контакту треба додати доданок пропорційний контактному тиску з коефіцієнтом Вінклера $K_B = 2h(1 - 2\nu)(1 + \nu) / (E(1 - \nu))$. Інтегральне рівняння в цьому випадку матиме вигляд

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(x, \xi)}{\xi - x} d\xi + K_B p'(x, t) + fK_w V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t). \quad (13)$$

Зауважимо, що в загальному випадку інтегрального рівняння (11) (трансформанта Фур'є ядра має полюс на дійсній осі) маємо особливий випадок [2], а розв'язок необхідно шукати в просторі узагальнених функцій (рівняння першого роду).

Шукаємо розв'язок інтегрального рівняння (13) у випадку дії параболічного штамп ($f(x) = x^2 / 2R$). Оскільки інтегральне рівняння (13) залежить від двох змінних, час зношування розбиваємо на досить малі відрізки Δt і

приймаємо допущення, що на кожному з них контактний тиск і область контакту є сталими.

При $t = 0$ ($i = 0$) в безрозмірних величинах $\bar{x} = x/a_i$, $\bar{p} = p/\theta$, (рисочки надалі опущені) інтегральне рівняння (13) можемо записати у вигляді

$$p'_0(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\lambda \pi a_0 x / R, \quad \lambda = a_0 (\pi \theta K_B)^{-1}, \quad |x| \leq 1, \quad (14)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді ряду за поліномами Чебишова другого роду [4]

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^{(0)} U_{2m}(x). \quad (15)$$

Підставляючи (15) в (14), використовуючи спектральне співвідношення для поліномів Чебишова [4] та умову їхньої ортогональності, задачу приводимо до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів $b_{2m}^{(0)}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^{(0)} \delta_{mk} - \frac{2k+1}{2\lambda} b_{2k}^{(0)} = -a_0 \delta_{0k} / R, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

де

$$\delta_{mk} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx = \frac{1}{1-4(m+k+1)^2} + \frac{1}{1-4(m-k)^2}.$$

Зв'язок між P і a_0 одержуємо з умови рівноваги штамп.

На проміжку $t \in [0, t_1 = \Delta t]$ розв'язок $p_1(x)$ знаходимо аналогічно. Коефіцієнти $b_{2m}^{(1)}$ обчислюємо з системи (16), замінивши λ на $\lambda_* = \lambda / (1 + \lambda \delta \Delta t)$, де $\delta = \pi f K_w V \theta / a_1$. На наступному кроці $t \in [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$ розв'язок $p_2(x)$ (коефіцієнти $b_{2m}^{(2)}$) знову знаходимо з системи (16), в якій $\lambda = \lambda_*$, а до правої частини додається доданок $\delta \Delta t b_{2m}^{(1)} (2k+1)/2$ ($b_{2m}^{(1)}$ – розв'язок отриманий на попередньому кроці) і т.д.

Числові результати одержано шляхом редукції нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (16). Проведено обчислення за таких значень параметрів:

$$v = v_0 = 0.3, \quad \frac{E}{E_0} = 1, \quad \frac{h}{R} = 0.1,$$

$$\frac{a}{h} = 0.5, \quad f = 0.1, \quad V = 1 \text{ м/с};$$

$$\Delta t = 100 \text{ с}, \quad \text{для пари тертя чавун - чавун } \theta K_w = 4 \cdot 10^{-5}.$$

На рис. 2 зображено розподіл контактного тиску в процесі

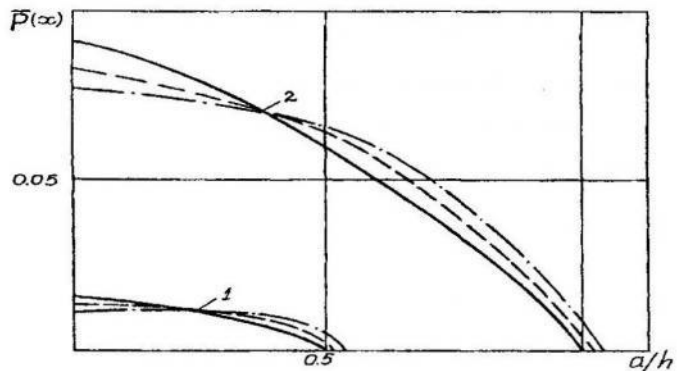


Рис. 2.

зношування для $(1 - a/h = 0.5; 2 - 1)$. Суцільна лінія відповідає $t = 0$, пунктирна – $t = 100$ с, штрихпунктирна – $t = 200$ с.

Розв'язок поставленої задачі дає змогу дослідити вплив покриття на процес зношування (співвідношень фізико-механічних характеристик контактуючих тіл, товщини покриття, фрикційних параметрів і т.п.), а наявність проміжкового шару Вінклера допомагає враховувати якість обробки поверхонь контактуючої пари.

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 487 с.
2. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
3. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 251 с.
4. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.

CONTACT PROBLEM ABOUT WEAR OF RIGID BODY WITH THIN SURFACE

Oleksandr Maksymuk

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

The article presents a mathematical model of contact interaction of rigid bodies with elastic protected thin surfaces with regard for their wear. The theory allowing to model the surface in the wide diapason of changes of its parameters is used. The problem is reduced to integro-differential singular equation approximate solution of which is obtained by the method of Chebyshev polynomials.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.2000

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЄДИНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОСТІ КОНТАКТНОГО ТЕРМООПОРУ

Юрій Мандзик

Львівський національний університет імені Івана Франка

Дослідимо модель термопружного контакту для довгого порожнистого колового ортотропного циліндра з внутрішнім радіусом r_1 та зовнішнім – r_0 , який поміщений у жорстку обойму. Поперечний переріз розглядуваної конструкції зображено на рис. 1.

Температура внутрішності циліндра та пружний обойми змінюються відповідно до законів $T_1^e(t) = T_*\theta_1^e(t)$, $T_2^e(t) = T_*\theta_2^e(t)$. Вважатимемо, що у початковий момент часу, коли $\theta_1^e(0) = \theta_2^e(0) = 0$, а температура циліндра також нульова, між зовнішньою поверхнею циліндра та обоймою існує невеликий прозор g_0 (або натяг, коли $g_0 < 0$), причому $|g_0/r_0| \ll 1$. Механічний вплив на циліндр зводиться до дії на нього жорсткої обойми, коли згаданий вище прозор у системі дорівнює нулю.

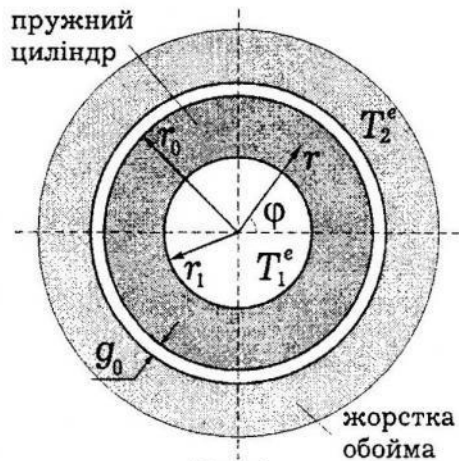


Рис. 1.

На внутрішній межі циліндра відбувається теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну α_1^T .

Між зовнішньою поверхнею циліндра та жорсткою обоймою припускати існування термічного опору R , величина якого приймається деякою функцією $R_s(g)$ від прозору g та функцією $R_c(P)$ від контактної тиску P . Вважатимемо, що ці функції є монотонно спадними зі зменшенням прозору та зі збільшенням контактної тиску (рис. 2). У випадку наявності прозору припускаємо, що термічний опір лінійно від нього залежить. Такий вибір вигляду функції R зумовлений результатами експериментальних та теоретичних праць [4, 6].

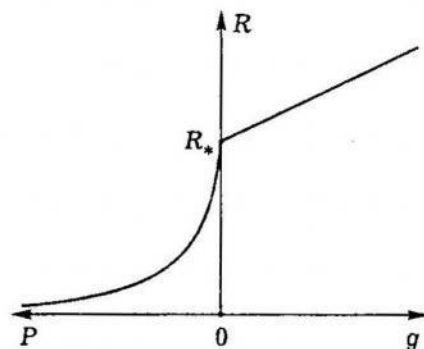


Рис. 2.

Запропонована конструкція може перебувати при $t \in t_s$ в умовах наявності прозору $g(t) > 0$, або при $t \in t_c$ в умовах пружного контакту $P(t) > 0$, причому $t_s \cup t_c = (0, \infty)$.

Подібну задачу з урахуванням нелінійності контактного термоопору, однак для ізотропного стрижня розглядали у праці [2], а для системи двох таких стрижнів – у [5].

У силу наших припущень циліндр перебуватиме в умовах плоскої деформації, а напружено-деформований стан описуватиметься крайовою задачею [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{K^2}{r^2} u_r = \delta_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \delta_2 \frac{T}{r}, \quad (2)$$

де, як і у попередньому розділі, $K^2 = \beta_{11}/\beta_{22}$, $\delta_1 = (\beta_1\beta_{22} - \beta_2\beta_{12})/\beta_{22}$, $\delta_2 = (\beta_1\beta_{22} - \beta_2\beta_{12} - \beta_2\beta_{11} + \beta_1\beta_{12})/\beta_{22}$, а $\beta_{nk}^{(j)}$ та $\beta_n^{(j)}$ для випадку плоскої деформації мають вигляд [3]

$$\beta_{nk} = a_{nk} - a_{n3}a_{3k}/a_{33}, \quad \beta_n = \alpha_n - a_{n3}\alpha_3/a_{33}, \quad n = 1, 2; \quad k = 1, 2.$$

1. Випадок існування прозору між обіймою та циліндром

$$t \in t_s, \quad g(t) = g_0 - u_r(r_0, t) > 0 \quad \text{— прозір у системі}$$

Механічні крайові умови

$$r = r_1: \quad \sigma_r(r_1, t) = 0, \quad (3)$$

$$r = r_0: \quad \sigma_r(r_0, t) = 0. \quad (4)$$

Теплові умови

$$r = r_1: \quad \lambda \partial T / \partial r = \alpha_1^T [T - T_1^e(t)], \quad (5)$$

$$r = r_0: \quad \lambda \partial T / \partial r = [T_2^e(t) - T] / R_s(g). \quad (6)$$

2. Випадок наявності у системі термopружного контакту

$$t \in t_c, \quad g(t) = 0, \quad P(t) > 0 \quad \text{— контактний тиск.}$$

Механічні крайові умови

$$r = r_1: \quad \sigma_r(r_1, t) = 0, \quad (7)$$

$$r = r_0: \quad u_r(r_0, t) = g_0. \quad (8)$$

Теплові умови

$$r = r_1: \quad \lambda \partial T / \partial r = \alpha_1^T (T - T_1^e(t)), \quad (9)$$

$$r = r_0: \quad \lambda \partial T / \partial r = (T_2^e(t) - T) / R_c(P). \quad (10)$$

Для обох випадків початкова умова на температуру

$$t = 0: \quad T(r, 0) = 0.$$

Час перебування конструкції в умовах наявності прозору чи контактного тиску можна подати у такому вигляді:

$$t_s = (0, t_1) \cup (t_2, t_3) \cup (t_4, t_5) \cup \dots \cup (t_{2i}, t_{2i+1}) \cup \dots \quad g(t) > 0,$$

$$t_c = (t_1, t_2) \cup (t_3, t_4) \cup (t_5, t_6) \cup \dots \cup (t_{2i-1}, t_{2i}) \cup \dots \quad P(t) > 0.$$

З огляду на нелінійність функції термічного опору R розглядувана задача є суттєво нелінійною. Для її розв'язування ми скористалися інтегральним перетворенням Лапласа за часом і в результаті одержали сис-

тему інтегральних рівнянь Вольтера – Гамерштейна. Цю систему розв'язували методом квадратур та ітерацій.

Задачу було повністю обезрозмірено і в процесі її розв'язування введено в розгляд функцію q , яка при $q > 0$ є безрозмірним прозором у системі, а при $q < 0$ – з точністю до множника – контактний тиск, тобто

$$q(\tau) = \begin{cases} \bar{q}(\tau), & q(\tau) > 0; \tau \in \tau_s, \\ -p(\tau)/p_0, & q(\tau) < 0; \tau \in \tau_c, \end{cases} \quad p_0 - \text{певна стала.} \quad (11)$$

Це дало змогу звести дві розглядувані задачі (випадки наявності прозору та контакту у системі) до однієї постановки задачі на температуру.

Коли ввести для відповідних стаціонарних величин позначення

$$q_s = \lim_{\tau \rightarrow \infty} q(\tau), \quad \theta_{i*}^e = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_i^e(\tau), \quad (12)$$

і прийняти конкретний вигляд термоопору у вигляді

$$\bar{R}(q) = \begin{cases} 1 + \psi_s q, & q \geq 0, \\ 1/(1 - \psi_c q), & q < 0, \end{cases} \quad (\psi_s, \psi_c - \text{визначаються з експерименту}), \quad (13)$$

то у стаціонарному випадку q_s набуде вигляду

$$q_s = f_\infty + \xi f(q_s), \quad (14)$$

де $f_\infty = \bar{g}_0 + A_G S_1 \theta_{1*}^e / G$; $f(q_s) = [\bar{R}(q_s) / (\bar{R}_1 + \bar{R}_1^s) + 1]^{-1}$; $\delta = \theta_{2*}^e - \theta_{1*}^e$;

$$\xi = \frac{S_1 \gamma \delta}{G(\bar{R}_1 + \bar{R}_1^s)}; \quad \xi_0 = \frac{1}{G} A_G S_1; \quad \gamma = A_G \bar{R}_1^s + A_a \bar{R}_1 - \frac{1}{\lambda} A_{GK}; \quad \hat{R} = 1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_1^s;$$

$$A_{GK} = a_+ G_{K+} + a_- G_{K-} \rho_1^{2K}; \quad A_G = a_+ G_+ + a_- G_- \rho_1^{2K}; \quad A_a = a_+ + a_- \rho_1^{2K};$$

$$G_\pm = 1 - \rho_1^{1 \pm K}; \quad G_{K\pm} = \frac{1 - \rho_1^{1 \pm K}}{1 \pm K}; \quad a_\pm = \frac{e_\pm}{x_{1\mp}(1 \pm K)}; \quad \Delta_s = \bar{R}_1 + \bar{R}_1^s + \bar{R}(q_s);$$

$$S_1 = x_{1+} + x_{1-}; \quad G = 1 - \rho_1^{2K}; \quad e_\pm = [d_2 - (1 \pm K) d_1] / 2K; \quad x_{1\pm} = (K b_{22} \pm b_{12}) / m;$$

$$m = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2; \quad n_1 = b_1 b_{22} - b_2 b_{12}; \quad \bar{R}_1^s = (\alpha_1^T \rho_1 R_*)^{-1};$$

$\bar{R}_1 = -\ln \rho_1 / \lambda$ – відповідно відносні опори тепловіддачі всередині системи та теплопровідності циліндра; $b_{nk} = \beta_{nk} E_*$ ($n, k = 1, 2$); $b_k = \beta_k / \alpha_*$, $d_k = \delta_k / \alpha_*$ ($k = 1, 2$); $\bar{g}_0 = g_0 / u_*$ – безрозмірний прозор у початковий момент часу; $\rho = r / r_0$ – безрозмірний радіус, ($\rho_1 = r_1 / r_0$); u_*, R_*, α_*, E_* – певні обезрозмірюючі параметри.

Формулу (14), з урахуванням (13), можна переписати у вигляді

$$\bar{g}_0 = g(q_s) = \begin{cases} g_+(q_s) = q_s - \xi_0 \theta_{1*}^e - \xi(\hat{R} - 1) / (\hat{R} + \psi_s q_s), & q_s \geq 0, \\ g_-(q_s) = q_s - \xi_0 \theta_{1*}^e - \xi - \xi / [(\hat{R} - 1) \psi_c q_s - \hat{R}], & q_s < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) є стаціонарним розв'язком поставленої задачі. З огляду на це, проведено детальне дослідження поведінки функцій g_+ і g_- залежно від вхідних даних. Визначено, що при $\xi \leq -\xi_+$ та $g^{(2)} < \bar{g}_0 < g^{(1)}$ чи $-\xi_+ < \xi < -\xi_-$ та $g^{(0)} < \bar{g}_0 < g^{(1)}$ у системі існує три стаціонарні стани. Коли

$\xi \leq -\xi_+$ та $(\bar{g}_0 = g^{(1)})$ або $\bar{g}_0 = g^{(2)}$ чи $-\xi_+ < \xi < -\xi_-$ та $(\bar{g}_0 = g^{(0)})$ або $\bar{g}_0 = g^{(1)}$ – то існуватиме два розв'язки. В усіх інших випадках розв'язок єдиний, причому

$$\begin{aligned}\xi_+ &= \frac{\hat{R}^2}{\psi_s(\hat{R}-1)}; \quad \xi_- = \frac{\hat{R}^2}{\psi_c(\hat{R}-1)}; \quad g^{(0)} = g_-(0) = g_+(0) = -\xi_0 \theta_{1*}^e - \xi \frac{\hat{R}-1}{\hat{R}}; \\ g^{(1)} &= g_-(q^{(1)}); \quad q^{(1)} = \frac{1}{\psi_c(\hat{R}-1)} \left[\hat{R} - \sqrt{-\xi \psi_c(\hat{R}-1)} \right]; \\ g^{(2)} &= g_+(q^{(2)}); \quad q^{(2)} = \frac{1}{\psi_s} \left[\sqrt{-\xi \psi_s(\hat{R}-1)} - \hat{R} \right].\end{aligned}$$

Для дослідження стійкості знайдених стаціонарних розв'язків нелінійної задачі було проведено її лінеаризацію в околі цих розв'язків. З аналізу характеристичного рівняння лінеаризованої задачі з'ясовано, що нестійкими будуть лише стаціонарні розв'язки

- 1) які перебувають у межах $q^{(1)} \leq q < 0$, коли $-\xi_+ < \xi \leq -\xi_-$;
- 2) які належать проміжку $q^{(1)} \leq q \leq q^{(2)}$, коли $\xi \leq -\xi_+$ ($q^{(1)} \leq 0$; $q^{(2)} \geq 0$).

Отже, узагальнюючи попередні дослідження, доходимо висновку, що у випадку, коли існують один або два стаціонарні розв'язки, то вони будуть асимптотично стійкими. Коли ж існують три стаціонарні розв'язки, то з них лише середній буде нестійким, а крайні будуть асимптотично стійкі.

1. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник. – К: ІЗМН, 1996. – 204 с.
2. Пир'єв Ю. О., Мокрик Р. І. Нелінійна нестационарна задача про термопружний контакт з урахуванням термічного опору // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Т. 43. – С. 51–55.
3. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов, 1967. – 167 с.
4. Barber J.R., Zhang R. Transient behaviour and stability for the thermoelastic contact of two rods of dissimilar materials // Int. J. Mech. Sci. – 1988. – Vol. 30, No. 9. – P. 691–704.
5. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. Transient response in a one-dimensional model of thermoelastic contact // J. of Applied Mechanics. – 1996. – Vol. 63. – P. 575–581.
6. Shlykow Y.P., Ganin A. Thermal resistance of metallic contacts // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1964. – Vol. 7. – P. 921–929.

INVESTIGATION OF UNIQUENESS AND STABILITY OF TRANSIENT THERMOELASTICITY PROBLEM SOLUTION FOR HOLLOW ORTHOTROPIC CYLINDER WITH NONLINEAR CONTACT THERMAL RESISTANCE

Yuriy Mandzyk

Ivan Franko National University of L'viv

The investigation of uniqueness and stability of the solution of quasistatic thermoelasticity problem for circular hollow orthotropic cylinder which is placed in a hard bush is performed. Between the cylinder and a hard bush the presence of a nonlinear thermal resistance is assumed. Thus the considered problem is a nonlinear one.

Стаття надійшла до редколегії 21.11.1999

УДК 539.3

ВЕЛИКІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ КРУГЛИХ ПЛАСТИН У ПРОЦЕСАХ ФОРМОУТВОРЕННЯ

Михайло Михайлишин, Ірина Капаціла

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

Розглянемо осесиметричні задачі формоутворення оболонок обертання з плоских кругових заготовок шляхом пластичного деформування під дією рівномірно розподіленого нормального тиску. Будемо використовувати рівняння рівноваги, складені для деформованої геометрії, і нелінійні геометричні співвідношення [1, 3]. Припустимо, що у всіх точках конструкції діє просте навантаження і справджується деформаційна теорія пластичності [2, 7, 8]. Тоді повна система рівнянь задачі у разі використання гіпотези Кірхгофа – Лява, буде такою

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= -(1 + \varepsilon_{10}) \left(U \frac{\cos \psi^+}{r^+} - \frac{N_2}{r^+} + q_n \sin \psi^+ \right); \\ \frac{dM_1}{ds} &= -(1 + \varepsilon_{10}) \left[\frac{M_1 - M_2}{r^+} \cos \psi^+ - (U \sin \psi^+ - V \cos \psi^+) \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dr^+}{ds} = (1 + \varepsilon_{10}) \cos \psi^+; \quad \frac{dZ^+}{ds} = (1 + \varepsilon_{10}) \sin \psi^+; \quad \frac{d(\psi^+ - \psi)}{ds} = \chi_1;$$

$$N_1 = U \cos \psi^+ + V \sin \psi^+; \quad V = \frac{q_n r^+}{2}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{j0} + z\chi_j, \quad j = 1, 2; \quad ds^+ = ds(1 + \varepsilon_{10});$$

$$\varepsilon_{20} = \frac{r^+}{r} - 1; \quad \chi_2 = \frac{1}{r} (\sin \psi^+ - \sin \psi). \quad (3)$$

$$\varepsilon_{10} = (I_3 N - I_2 M) / D; \quad \chi_1 = (I_1 M - I_2 N) / D;$$

$$N_2 = I_1 \varepsilon_{20} + I_2 \chi_2 + (N I_{13} + M I_{12}) / D; \quad (4)$$

$$M_2 = I_2 \varepsilon_{20} + I_3 \chi_2 + (N I_{23} + M I_{31}) / D;$$

$$N = U \cos \psi^+ + V \sin \psi^+ - I'_1 \varepsilon_{20} - I'_2 \chi_2; \quad M = M_1 - I'_2 \varepsilon_{20} - I'_3 \chi_2; \quad (5)$$

$$I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^*}{1 - v^{*2}} z^{k-1} dz; \quad I'_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^* v^*}{1 - v^{*2}} z^{k-1} dz, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$E^* = \frac{3E}{2(1 + v)\omega + 1 - 2v}; \quad v^* = \frac{(1 + v)\omega - 1 + 2v}{2(1 + v)\omega + 1 - 2v}; \quad \omega = 3G \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}; \quad (6)$$

$$G = \frac{E}{2(1 - v)}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad \varepsilon_3 = -\frac{v^*}{1 - v^*} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

$$\sigma_{11} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}}(\varepsilon_1 + \nu^* \varepsilon_2); \quad \sigma_{22} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}}(\varepsilon_2 + \nu^* \varepsilon_1); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= I'_1 I_3 - I'_2 I_2; & I_{12} &= I_1 I'_2 - I_2 I'_1; \\ I_{23} &= I'_2 I_3 - I'_3 I_2; & I_{31} &= I'_3 I_1 - I'_2 I_2; & D &= I_1 I_3 - I_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут індексом «+» позначено величини, що характеризують геометрію деформованої поверхні, причому ψ^+ – кут між нормаллю до поверхні і віссю обертання; r^+ , Z^+ – радіус та вертикальна координата точки серединної поверхні оболонки; ds^+ – елемент дуги меридіана серединної поверхні; U , V , N_1 , N_2 – інтенсивності внутрішніх зусиль у радіальному, вертикальному, меридіональному і коловому напрямках; M_1 , M_2 – інтенсивності меридіонального та колового моментів; q_n – інтенсивність розподіленого навантаження в нормальному до серединної поверхні напрямі. Величини, що характеризують геометрію недеформованої поверхні, позначені такими ж буквами без індексу «+». Меридіональний та нормальний напрями визначені відносно деформованої поверхні.

Розглядатимемо два випадки, коли зовнішній край зацмлений або шарнірно опертий. У першому випадку на зовнішньому краю повинні виконуватись умови

$$r = R: \quad r^+ = R, \quad Z^+ = 0, \quad \psi^+ = 0, \quad (9)$$

а в другому, відповідно, –

$$r = R: \quad r^+ = R, \quad Z^+ = 0, \quad M_1 = 0. \quad (10)$$

У точці $r = 0$ внаслідок симетрії, крім вже використаної умови $V = 0$, повинні виконуватись умови

$$r = 0: \quad r^+ = 0, \quad \psi^+ = 0. \quad (11)$$

Сформульовану вище геометрично і фізично нелінійну крайову задачу в загальному випадку можна розв'язувати тільки числовим способом. Тому виникає необхідність позбавлення особливості в точці $r = 0$. Для цього використаємо спосіб, запропонований у праці [4] для пружних оболонок. Приймемо, що в околі особливої точки $r = 0$ zdeформована оболонка близька до сферичної. Чинячи аналогічно й у випадку пружно-пластичних деформацій та використовуючи умови регулярності в точці $r = 0$, систему рівнянь (1–4) у цій точці можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= 0; & \frac{dM_1}{dr} &= 0; & \frac{dr^+}{dr} &= 1 + \varepsilon_{10}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{dZ^+}{dr} = 0; \quad \frac{d\psi^+}{dr} = \chi_1.$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{U(I_3 + I'_3) - M_1(I_2 + I'_2)}{D_1}; \quad \chi_1 = \frac{M_1(I_1 + I'_1) - U(I_2 + I'_2)}{D_1};$$

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon_{10}; \quad \chi_2 = \chi_1; \quad N_2 = N_1 = U; \quad M_2 = M_1;$$

$$D_1 = (I_1 + I'_1)(I_3 + I'_3) - (I_2 + I'_2)^2. \quad (13)$$

Опишемо коротко алгоритм числового розв'язування задачі. Як зазначено, лінеаризацію фізичної нелінійності виконують методом змінних параметрів пружності [2,8]. Це приводить до ітераційного циклу, в кожній ітерації якого по всіх точках конструкції уточнюють функцію пластичності ω на основі діаграми матеріалу $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$, а також змінні параметри пружності (6), які в початковому наближенні приймають такими, що дорівнюють пружним модулям. Геометричну нелінійність лінеаризуємо згідно з методом Ньютона – Канторовича [1, 5, 6], що теж приводить до ітераційного циклу. Оскільки робочі навантаження, при яких на практиці формують параболічні антени, досягає 10^6 Па, а кінцева геометрія значно відрізняється від початкової, то особливе значення має вдалий вибір початкового наближення з уточненням геометричної нелінійності. Для його відшукування використано метод послідовного довантаження, відповідно до якого як початкове наближення для деякого рівня навантаження служить розв'язок, знайдений при меншому рівні навантаження. Лінійні крайові задачі в кожному наближенні розв'язують стійким числовим методом С.Годунова. Числовий експеримент засвідчив, що ліпшої збіжності досягають тоді, коли фізичну нелінійність уточнюють у зовнішньому циклі, а геометричну – у внутрішньому.

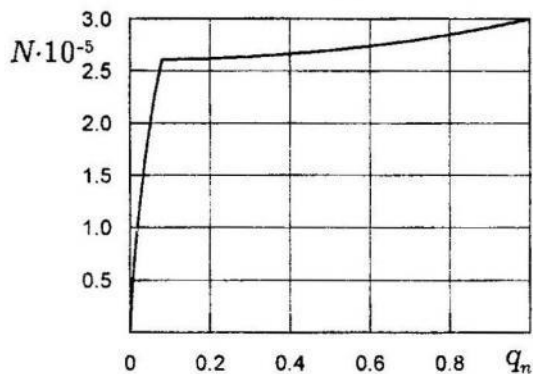


Рис. 1. Залежність значення мембранних зусиль у полюсі защемленої оболонки від q_n , МПа.

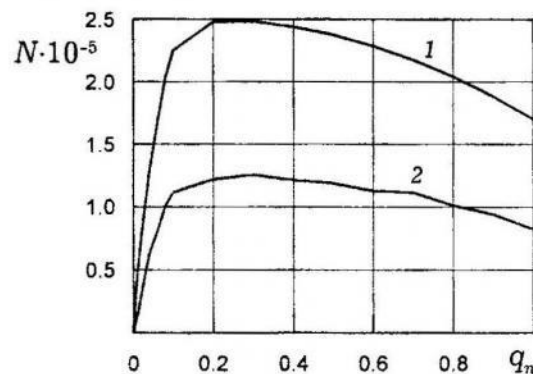


Рис. 2. Залежність зусиль N_1 (1) і N_2 (2) на зовнішньому контурі защемленої оболонки від q_n , МПа.

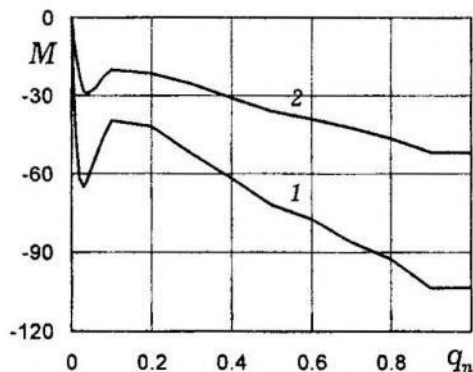


Рис. 3. Залежність моментів M_1 (1) і M_2 (2) на зовнішньому контурі защемленої оболонки від q_n , МПа.

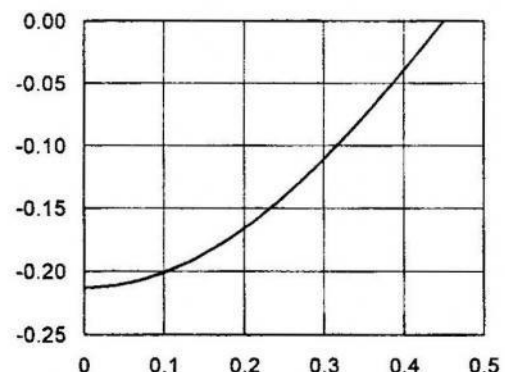


Рис. 4. Форма zdeформованої поверхні оболонки.

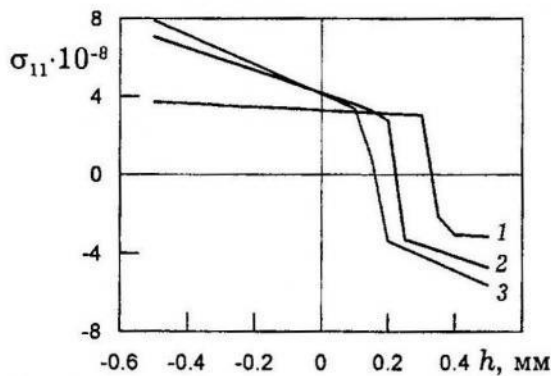


Рис. 5. Зміна напруження σ_{11} за товщиною оболонки при різних інтенсивностях навантаження: 1 – 100 МПа, 2 – 500 МПа, 3 – 1 ГПа.

Обчислення проводили при таких значеннях геометричних параметрів та модулів матеріалу: товщина заготовки $h = 0.001$ м, $R = 0.45$ м, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $E_1 = (0.1 - 0.3) \cdot 10^9$ Па, $\sigma_s = 2.6 \cdot 10^8$ Па. Приймали, що матеріал має лінійне зміцнення з модулем E_1 . Результати обчислень для випадку зацмленого зовнішнього контуру показані на рис. 1–5.

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 486 с.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф. Термопрочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
3. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М., 1976. – 279 с.
4. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основы теории пластин та оболонок.: Навч. посібн. – К.: Либідь, 1993. – 232 с.
5. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Вища шк., 1983. – 286 с.
6. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Розв'язування лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1992. – 152 с.
7. Шаблій О. М., Михайлишин М. С., Дячук С. Ф. Математическое моделирование процесса образования тонкостенных элементов конструкций заданной формы // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – № 35. – С. 21–28.
8. Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – К.: Наук. думка, 1981. – 295 с.

MAJOR AXIS SYMMETRY PLASTO-ELASTIC DEFORMATIONS OF ROUND PLATES IN THE SHAPE FORMATION PROCESSES

Mychajlo Mychajlyshyn, Iryna Kapatsila

Ivan Pulyuy Ternopil' State Engineering University

Are considered a major axis symmetry plasto-elastic deformations of initially round preforms in parabolical shapes of gyration. It is offered a numerical method of solution of this problem. It is obtained and analysed solutions of practical problems, which arise at manufacture of parabolical antennas.

Стаття надійшла до редколегії 16.01.2000

УДК 539.3

ЗАДАЧА ПРО КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ДВОХ ТРІЩИН, ЯКІ ПЕРЕТИНАЮТЬ ЛІНІЮ ЗМІНИ МАТЕРІАЛІВ СКЛАДЕНОЇ ПРУЖНОЇ ПЛОЩИНИ

Микола Моїсєєв, Віктор Янковий

Одеський державний університет ім. І. І. Мечникова

Точне розв'язання аналогічної задачі у випадку однієї тріщини побудовано в [1]. Розглядувану задачу точно розв'язати не вдалося, бо відповідна їй система сингулярних інтегральних рівнянь з непорушними особливостями містить, окрім характеристичної частини (матричний оператор Вінера – Хопфа зі згортою Меліна), також і регулярну. Запропоновано ефективний наближений метод розв'язування задачі, побудований на застосуванні векторних аналогів біортогональних базисних систем функцій і поліномів [5] для характеристичної частини, а також на спеціальній апроксимації регулярної частини поліномами. Одержано оцінки швидкості збіжності. Наведено формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Дві півплощини $\{x < 0; E_1, \nu_1\}$ і $\{x > 0; E_2, \nu_2\}$ ($E_j, \nu_j, j = 1, 2$ – відповідно їхні модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона) повністю зчеплені між собою $\left(\{u, v, \sigma_x, \tau_{xy}\}\right)_{y=-0} = \left(\{u, v, \sigma_x, \tau_{xy}\}\right)_{y=+0}$. Розглядувана складена площина містить дві тріщини: $\{y = -b, -a \leq x \leq +a\}$ і $\{y = +b, -a \leq x \leq +a\}$. Вважають, що розкриття тріщин відбувається за дією нормального навантаження, даного до їхніх берегів $\sigma_y(x, b \pm 0) = \sigma_y(x, -b \pm 0) = -p(x)$, $\tau_{xy}(x, b \pm 0) = \tau_{xy}(x, -b \pm 0) = 0$, $-a < x < a$. Розглянемо плоский напружений стан. Необхідно знайти коефіцієнти інтенсивності напружень.

Позначимо $E(x) = E_1$ при $x < 0$ і $E(x) = E_2$ при $x > 0$, $\nu_0(x) = E(x) \times [(\partial v / \partial x)(x, b - 0) - (\partial v / \partial x)(x, b + 0)]$, $u_0(x) = E(x) [(\partial u / \partial x)(x, b - 0) - (\partial u / \partial x)(x, b + 0)]$, $\varphi(t) = (\nu_0(at), -\nu_0(-at), u_0(at), -u_0(-at))_*$, $f(t) = -4(p(at), p(-at), 0, 0)_*$. Тут і далі вважаємо, що $()_*$ – операція транспонування матриці, e_j – j -й стовпець, $e_j^* = (e_j)_*$ – j -й рядок одиничної матриці $E = \text{diag}\{1, j = \overline{1, 4}\}$ і для вектор-стовпців $h(t) = \{h_m(t)\}_{m=1}^4$, $g(t) = \{g_m(t)\}_{m=1}^4$, $[h, g] = \int_0^1 (h(t))_* g(t) dt$.

За допомогою узагальненої схеми методу інтегральних перетворень [8] сформульована задача з урахуванням симетрії $u(x, -y) = u(x, y)$, $v(x, -y) = -v(x, y)$ зводиться до системи чотирьох сингулярних інтеграль-

них рівнянь з непорушними особливостями в точках перетинання тріщин з лінією зміни матеріалів

$$(K_- + R)\varphi = f(t), \quad 0 < t < 1;$$

$$\{K_-, K_+, R\}h = \int_0^1 \{k(t, \tau), k(\tau, t), \rho(t, \tau)\} h(\tau) d\tau,$$

$$k(t, \tau) = \text{diag} \{k_1(t, \tau), k_2(t, \tau)\}, \quad \rho(t, \tau) = \rho_+(t, \tau) + \rho_-(t, \tau),$$

$$\pi k_j(t, \tau) = \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{(\tau + t)^3} \sum_{m=0}^2 B_{j,m} t^m \tau^{2-m},$$

$$\rho_{\pm}(t, \tau) = [(t - \tau)^2 + 4\beta^2]^{-\alpha_{\pm}} c_{\pm}(t, \tau), \quad \beta = ba^{-1}, \quad 2\alpha_{\pm} = 5 \pm 1,$$

$$c_{\pm}(t, \tau) = \sum_{j \in J_{\pm} = \{j: j=(j_1, j_2, j_3, j_4), j_1+j_2+j_3+j_4=4 \pm 1, j_s \geq 0\}} (t \pm \tau)^{j_1} t^{j_2} \tau^{j_3} \beta^{j_4} C_j^{\pm}, \quad (1)$$

де $B_{j,m} - (2 \times 2)$, $C_j^{\pm} - (4 \times 4)$ – числові матриці, які залежать тільки від параметрів $v_1, v_2, \mu = E_1 E_2^{-1}$. Характеристична частина системи (1) (оператор K_-) визначена такими співвідношеннями

$$\int_0^{+\infty} k_j(t, 1) t^{s-1} dt = \text{ctg } \pi s G_j(s-1), \quad 0 < \text{Re}(s) < 1, \quad j = 1, 2,$$

$$G_2(-s) = G_1(s) = \left(1 + \frac{r_0 + r_1 s^2}{\cos \pi s}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\cos \pi s} \begin{pmatrix} l(s) & m(-s) \\ \mu m(s) & -l(s) \end{pmatrix},$$

$$l(s) = 4(1 + \mu)[\mu - 1 + (v_0 + 1 - \mu)s^2], \quad v_0 = v_1 - \mu v_2,$$

$$m(s) = 8[-1 - \mu + (v_0 + 1 - \mu)s], \quad r_0 = (v_0 + \mu - 1)^2,$$

$$r_1 = 2[(1 - \mu)^2 - v_0^2], \quad \delta_0 = (1 + 3\mu + v_0)(3 + \mu - v_0), \quad \mu = E_1 E_2^{-1}. \quad (2)$$

Умови замикавання тріщини мають вигляд

$$[\mu e_1 - e_2, \varphi(t)] = [\mu e_3 - e_4, \varphi(t)] = 0. \quad (3)$$

Зауваження 1. Однорідна задача (1)–(3) має в $\bigcup_{p>1} L_p(0,1)$ тільки триві-

альні розв'язання.

Зауваження 1 можна довести на підставі теореми єдності розв'язності змішаних задач теорії пружності [6].

Для розв'язання системи (1) використовуватимемо біортогональні базисні системи вектор-функцій і вектор-поліномів [5] характеристичного оператора K_- і двоїстого йому K_+ (1). Їхня побудова ґрунтується [5] на канонічній факторизації [2]

$$G(s) = \frac{X^+(s)}{X^-(s)}, \quad 1 - \varepsilon < \operatorname{Re}(s) < 1, \quad G(s) = \operatorname{ctg} \pi s \operatorname{diag} \{G_j(s-1), j=1,2\}. \quad (4)$$

Канонічну факторизацію

$$G_j(s) = X_j^+(s) [X_j^-(s)]^{-1}, \quad -\varepsilon < \operatorname{Re}(s) < 1, \quad j=1,2 \quad (5)$$

для $G_1(s)$ за [4] побудовано в [1] (отримані явні формули факторизації). Для $F_2(s)$ її будують аналогічно. Частинні індекси [2] канонічної факторизації матриць $G_j(s)$, $j=1,2$ відповідно такі:

$$\alpha_{j,1} = 0, \quad \alpha_{j,2} = -1, \quad j=1,2. \quad (6)$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$(\mu, -1) X_j^-(0) (0, 1)_* = 0, \quad j=1,2. \quad (7)$$

Канонічну факторизацію матриці $G(s)$ (4) для розв'язання системи $K_h = g$ у класі $\bigcup_{p>1} L_p(0,1)$ виконують матрицями

$$X^\pm(s) = w_\pm(s) \operatorname{diag} \{X_j^\pm(s-1), j=1,2\},$$

$$w_+(s) = \Gamma(1-s) \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right) \right)^{-1}, \quad w_-(s) = -\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) (\Gamma(s))^{-1}. \quad (8)$$

Відповідно до (6) частинні індекси цієї факторизації

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \quad (9)$$

а в силу (7) виконані умови

$$(\mu e_1^* - e_2^*) X^-(1) e_j = (\mu e_3^* - e_4^*) X^-(1) e_n = 0, \quad j \neq 1, n \neq 3. \quad (10)$$

Факторизація (4), (9) породжує такі системи вектор-функцій $x_{n,j}^\pm(t)$ і вектор-поліномів $\pi_{n,j}^\pm(t)$, $n = \overline{0, \infty}$, $j = \overline{1, 4}$,

$$x_{n,j}^\mp(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mp - i\infty}^{\gamma_\mp + i\infty} u^\mp(\alpha_j; n; s) \cdot Y_\mp(s) e_j t^{-s} ds,$$

$$\pi_{n,j}^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mp - i\infty}^{\gamma_\mp + i\infty} u^\mp(\alpha_j; n \pm \alpha_j; s) \cdot Z_\pm(s) e_j t^{-s} ds, \quad (11)$$

$$0 < \gamma_+ < \beta, \quad 1 - \beta < \gamma_- < 1,$$

$$u^\mp(\alpha; n; s) = \gamma_{n+\max(0, \mp \alpha)}^\mp(\alpha) \cdot (1-s; n) \cdot (s; n \mp \alpha + 1)^{-1},$$

$$(a; m) = \left((a)_{|m|} \right)^{\operatorname{sgn}(m)}, \quad (a)_m = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+m-1), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$(a)_0 = 1, \quad 2\gamma_n^+(x) \cdot \gamma_n^-(x) = 1 + 2n + |2n - 2|x| + 1|,$$

$$Y_-(s) = X^-(s); \quad Y_+(s) = (X^+(1-s))_*^{-1}; \quad Z_+(s) = X^+(s); \quad Z_-(s) = (X^-(1-s))_*^{-1}.$$

Вони є біортогональними базисними системами для характеристичного оператора K_- і двоїстого йому K_+ , бо задовольняють співвідношенням

$$K_{\mp} x_{n,j}^{\mp} = \pi_{n-x_j,j}^{\pm}(t), \quad t \in (0,1); \quad [x_{n,k}^{\mp}, \pi_{m,j}^{\pm}(t)] = \delta_{k,j} \cdot \delta_{n,m}, \quad (12)$$

де $\max_{\sigma=1,\dots,4} \deg_t e_{\sigma}^* \pi_{m,k}(t) = m$; $k, j = \overline{1,4}$; $n, m = 0, 1, \dots$; $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера.

Для означеності вважаємо, що $\gamma_m^-(x_j) = 1$, $m = \overline{0, \infty}$, $j = \overline{1,4}$.

Системи (11) пов'язані [5] з багаточленами Якобі [7]. Це дало змогу одержати такі оцінки:

$$\|x_{n,k}^{\mp}\|_{L_2\{1/2, 1/2\}} \leq C, \quad L_2\{\alpha, \delta\} = L_2([0,1], t^{\alpha}(1-t)^{\delta}), \quad (13)$$

в яких стала C не залежить від n .

Співвідношення (12) дають змогу застосувати для розв'язання системи (1) проєкційний засіб методу ортогональних багаточленів [8]

$$\phi_N(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=0}^N \phi_{m,j}^{(N)} x_{m+x_j,j}^-(t), \quad (14)$$

$$\phi_{n,k}^{(N)} + \sum_{j=1}^4 \sum_{m=0}^N \rho_{n,m}^{(k,j)} \phi_{m,j} = -4pf_k \delta_{n,0}, \quad m = \overline{0, N}, \quad k = \overline{1,4}. \quad (15)$$

Зазначимо, що в силу (9) наближення (14) задовольняє умову (3). Отримано оцінки $|\rho_{n,m}^{(k,j)}| \leq C'(m+n)^{7/4} \varepsilon_+^{n+m}$, де $0 < \varepsilon_+ = (1 + 4v + \beta^2)^{-1/2} < 1$. Зауваження 1, одержані оцінки і загальні положення теорії наближених методів розв'язування лінійних операторних рівнянь [3] приводять до таких висновків:

1) при досить великих N система (15) однозначно розв'язана;

$$2) \|\phi(t) - \phi_N(t)\|_{L_2\{1/2, 1/2\}} \leq O\left(N^{7/4} \varepsilon_+^N\right), N \rightarrow \infty;$$

$$3) \left| 2K_1 \sqrt{\frac{2}{a}} - \sum_{j=1}^4 \lambda_j^{(1)} \sum_{m=0}^N (-1)^m \phi_{m,j}^{(N)} \right| \leq O\left(N^{7/4} \varepsilon_+^N\right),$$

$$\lambda_j^{(1)} = e_1^* \text{diag}\{X_l^{(\infty)}, l = 1, 2\} e_j; \quad K_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi} \sqrt{x-a} \cdot \sigma_y(x, 0).$$

Для інших коефіцієнтів інтенсивності отримані аналогічні (3) наближення.

Отже, одержано ефективні наближення зображень для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

1. Антипов Ю. А., Моисеев Н. Г. Точное решение плоской задачи для составной плоскости с разрезом, пересекающим линию раздела сред // Прикл. математика и механика. – 1991. – Т. 55, вып. 4. – С. 662–671.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 750 с.
4. Моисеев Н. Г. О факторизации матриц-функций специального вида // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 305, № 1. – С. 44–47.
5. Моисеев Н. Г. Аналогии спектральных соотношений для операторов Винера-Хопфа со сверткой Меллина // Докл. РАН. – 1999. – Т. 305, № 1. – С. 17–21.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
8. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.

THE PROBLEMS OF STRESS CONCENTRATION BY TWO CRACKS CROSSED A MATERIALS CHANGE LINE OF A COMPOSITE ELASTIC PLANE

Mykola Moiseyev, Victor Yankoviy

Mechnikova State University Odessa

In the paper the effective approximate method of solving the problem is proposed using vector analogy of functional and polynomial system. The formulas for the stress intensity factors are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.1999

УДК 539.377

ТЕРМОПРУЖНІ ПРОЦЕСИ В ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ НЕФЕРОМАГНІТНОМУ ЦИЛІНДРІ ПРИ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ДІЯХ

Роман Мусій, Лідія Швець, Наталія Мельник

Національний університет «Львівська політехніка»

Формулювання задачі. Розглянемо однорідний неферромагнітний довгий порожнистий циліндр, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) , який перебуває під дією зовнішнього нестационарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого поверхневими значеннями вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; 0; H_z\}$. У циліндрі індукується вторинне ЕМП, що створює в ньому розподіл нестационарних джоулевих тепловиділень Q і об'ємних пондеромоторних сил $\vec{F} = \{F_r; 0; 0\}$. Механо- і термоелектричними ефектами, поляризацією і намагнічуванням, а також впливом рухомості середовища на струми провідності нехтується, а процеси теплопровідності і деформації в тілі зумовлюються джоулевими тепловиділеннями і пондеромоторними силами. За вихідну приймається система рівнянь динамічної незв'язної електромагнітотермопружності [1]. Обчислення задачі складається з трьох етапів. На першому визначають розподіл ЕМП, джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил. На другому – розподіл температурного поля, зумовленого джоулевими тепловиділеннями, на третьому – з рівнянь термопружності визначають термонапружений стан, зумовлений джоулевим нагрівом і дією пондеромоторних сил. Розглянемо кожний з етапів.

Аксіальна компонента $H_z = H(r, t)$ вектора напруженості $\vec{H}$ магнітного поля визначається з рівняння

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \sigma_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

при граничних умовах

$$H(r_0, t) = H^-(t), \quad H(r_1, t) = H^+(t) \quad (2)$$

на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях і нульовій початковій умові.

За знайденою функцією H питомі густини джоулевих тепловиділень Q і радіальної компоненти пондеромоторної сили $F_r = F(r, t)$ визначаються співвідношеннями

$$Q = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2, \quad F = -\mu \frac{\partial H}{\partial r} H, \quad (3)$$

де σ_0 , μ – коефіцієнти електропровідності і магнітної проникливості матеріалу циліндра, t – час. За знайденим виразом Q температурне поле в циліндрі визначається з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q}{\lambda} \quad (4)$$

при граничних умовах конвективного теплообміну і нульовій початковій умові, де κ , λ – коефіцієнти температуро- та теплопровідності.

Відмінні від нуля компоненти σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} тензора динамічних напружень визначають з такої системи рівнянь [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} &= -\frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{F_r}{r} - \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\alpha E(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial t^2} - \frac{2c_2^2}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{2c_2^2}{1-\nu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{F_r}{r} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \alpha E T. \end{aligned} \quad (5)$$

Початкові умови на функції σ_{rr} і $\sigma_{\varphi\varphi}$ будуть

$$\sigma_{rr}(r, 0) = \sigma_{\varphi\varphi}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}(r, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}(r, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1+\nu} \frac{\partial T(r, 0)}{\partial t}, \quad (6)$$

а граничні умови на функцію σ_{rr} при вільних від зовнішнього навантаження зовнішніх поверхнях циліндра запишемо

$$\sigma_{rr}(r_0, t) = \sigma_{rr}(r_1, t) = 0, \quad (7)$$

де $c_1 = ((1-\nu)E/(\rho(1+\nu)(1-2\nu)))^{-1/2}$, $c_2 = (E/(2\rho(1+\nu)))^{1/2}$ – швидкості пружних хвиль розширення і спотворення, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення, E – модуль пружності, ρ – густина.

Числовий аналіз задачі виконували для циліндра зі сталі X18H9T з внутрішнім $r_0 = 8$ мм і зовнішнім $r_1 = 10$ мм радіусами поверхонь при дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ) тривалістю $\tau_i = 10^{-4}$ с, що моделювався функцією $H_0(t) = k \cdot H_0(\exp(-\beta_1 t) - (\exp(-\beta_2 t)))$. Тут β_1 і β_2 – параметри, які відповідають часові фронту наростання і фронту спадання імпульсу, H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі, k – нормуючий коефіцієнт.

На рис. 1–3 зображено розподіл в часі при $r = 9.8$ мм джоулевих тепловиділень Q , радіальної пондеромоторної сили F_r і температури T . На інших рисунках зображено розподіли в часі квазістатичних напружень σ_{rr} і $\sigma_{\varphi\varphi}$, зумовлених дією пондеромоторної сили (рис. 4) і джоулевим тепловим на-

грівом (рис. 5). Криві 1 відповідають радіальним напруженням σ_{rr} , а криві 2 – кільцевим напруженням $\sigma_{\phi\phi}$. Як видно з графіків, пондеромоторна сила та зумовлені нею напруження мають імпульсний характер, розподіл температури відповідає тепловому удару зі скінченною швидкістю.

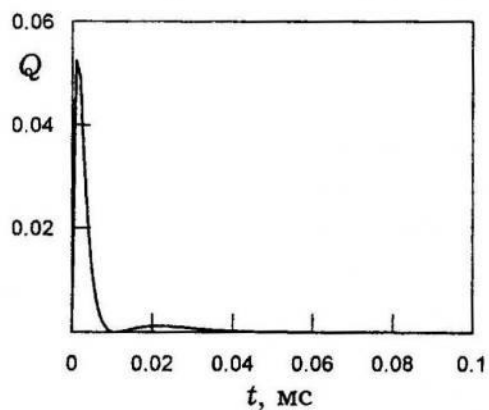


Рис. 1.

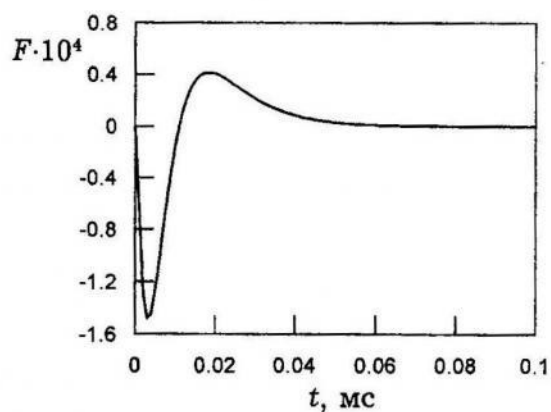


Рис. 2.

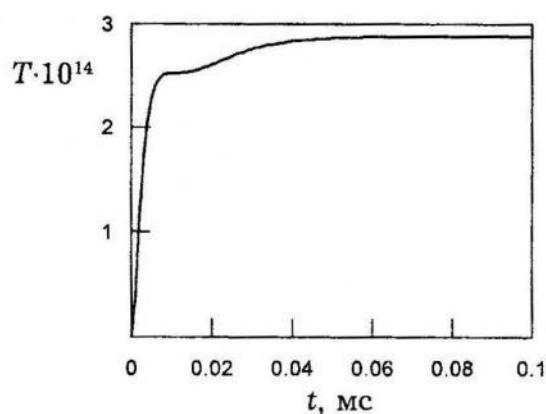


Рис. 3.

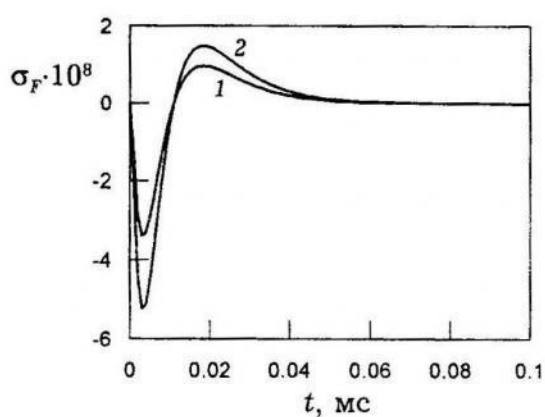


Рис. 4.

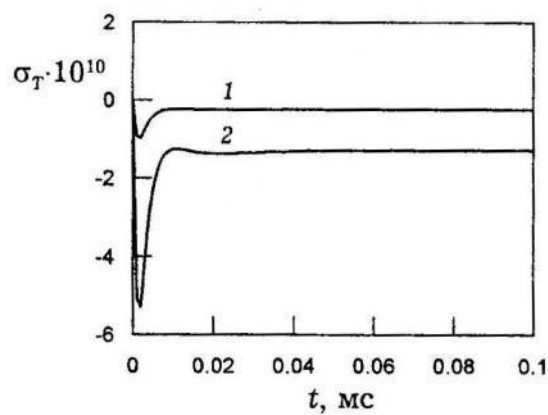


Рис. 5.

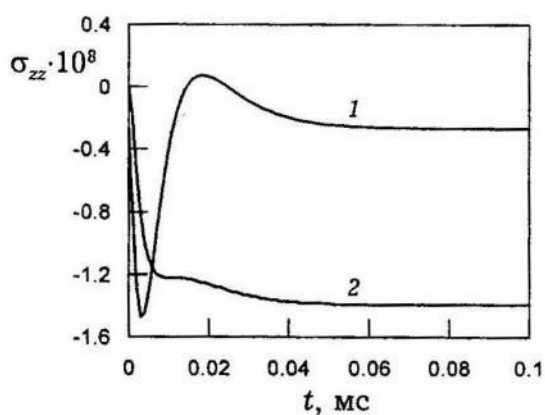


Рис. 6.

При даних параметрах ЕМІ напруження σ_{rr} і $\sigma_{\phi\phi}$, зумовлені пондеромоторною силою, значно більші від аналогічних напружень внаслідок джоулевого нагріву. На рис. 6 зображено розподіл у часі осевих напружень σ_{zz} . Крива 1 відповідає напруженням, зумовленим дією пондеромоторної сили, а криві 2 – напруженням за рахунок джоулевого нагрівання.

Динамічні напруження осцилюють навколо квазістатичних і їхні максимальні значення не більше як в 1.5 рази перевищують квазістатичні напруження. Зауважимо, що всі величини віднесені до H_0^2 – квадрата максимальної напруженості магнітного поля.

На підставі розглядуваного вище формулювання незв'язаної динамічної задачі електромагнітотермопружності для довгого циліндра в працях [3, 4] одержано розв'язки і виконано числовий аналіз термопружних процесів у порожнистому однорідному та біметалевому циліндрах при дії радіоімпульсів на поверхнях, а в [5] – розв'язки і аналіз для суцільного циліндра при магнітному ударі на поверхні.

1. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термомеханіка електропровідних тіл при дії неусталених електромагнітних полів. – Львів, 1993. – 54 с. (Препринт / АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Підстригача; № 3–93).
2. Мусій Р. С. Формулювання і розв'язування в напруженнях плоских крайових задач динамічної термопружності для циліндричних тіл / Прикладна математика. Вісник ДУ «ЛП». – 1999. – № 364. – С. 326–333.
3. Мусій Р. С. Динамічна задача електромагнітотермопружності для довгого порожнистого циліндра при дії радіоімпульсів на поверхнях // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 3. – С. 141–147.
4. Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Микитюк О. А. Динамічні термопружні процеси в довгому біметалевому порожнистому циліндрі при дії радіоімпульсів / Прикладна математика. Вісник ДУ «ЛП». – 1998. – № 337. – С. 238–240.
5. Мусій Р. С. Термонапружений стан неферромагнітного циліндра при магнітному ударі на поверхні / Прикладна математика. Вісник ДУ «ЛП». – 1997. – № 320. – С. 175–178.

THERMOELASTICITY PROCESSES IN THE LONG HOLLOW ELECTROCONDUCTIVE NON-FERROMAGNETIC CYLINDER WITH IMPULSE ELECTROMAGNETIC INFLUENCE

Roman Musij, Lidiya Shvets, Nataliya Melnyk

National University «Lvivska Politechnika»

The mathematical formulation of the dynamical problem of the thermoelasticity for the long hollow cylinder has been made. Results of the numerical analyze with the influence of the electromagnetic impulses on the external surfaces, have been written, which show dynamicity of the thermoelasticity process.

Стаття надійшла до редколегії 31.01.2000

УДК 539.3

ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ТІЛ ЗІ ЗМІННОЮ ДІЛЯНКОЮ КОНТАКТУ

Володимир Онішкевич*, Володимир Новосад**

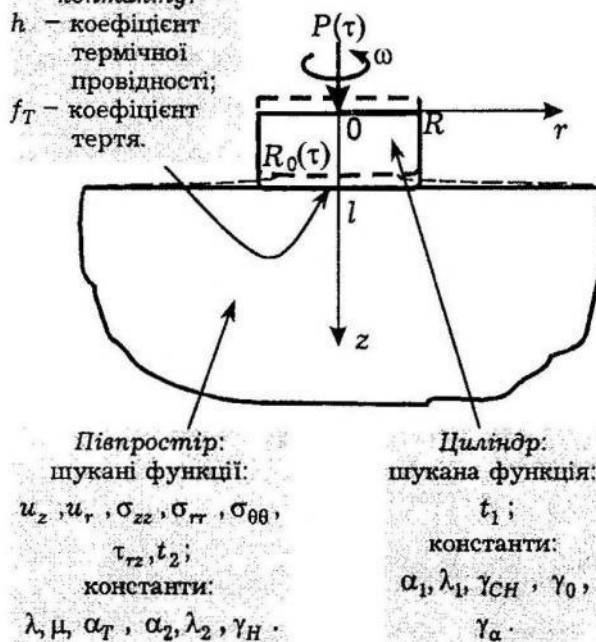
*Український державний лісотехнічний університет

**Львівська філія Української Академії державного управління
при Президенті України

Глибше досліджено взаємодію жорсткого циліндричного штампа та ізо-
тропного півпростору для випадку теплоутворення від тертя на ділянці ко-
нтакту [1, 2]. Як засвідчив аналіз стаціонарної задачі, можлива така ситуа-
ція, що наперед задані і на перший погляд очевидні крайові умови приво-
дять до фізично нереальних результатів. У такому разі потрібно підбирати
такі крайові умови, які б враховували явище відокремлення контактних по-
верхонь [1]. Отже, у випадку розгляду аналогічної квазістатичної задачі є

Характеристики
контакту:

h – коефіцієнт
термічної
провідності;
 f_T – коефіцієнт
тертя.

Півпростір:
шукані функції:

$u_z, u_r, \sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta},$
 $\tau_{rz}, t_2;$
константи:
 $\lambda, \mu, \alpha_T, \alpha_2, \lambda_2, \gamma_H.$

Циліндр:
шукана функція:

$t_1;$
константи:
 $\alpha_1, \lambda_1, \gamma_{CH}, \gamma_0,$
 $\gamma_a.$

Рис. 1.

деякий момент часу τ_s , у який ді-
лянка контакту починає зміню-
ватись. Тому формулюючи зада-
чу, взагалі кажучи, потрібно вра-
ховувати можливі зміни крайових
умов.

Формулювання задачі. Роз-
глянемо циліндричний штамп з
радіусом R і висотою l , який
обертається зі сталою кутовою
швидкістю ω і який притискає до
пружного півпростору вертикаль-
на сила $P(\tau)$ (рис. 1). Передба-
чається контактне теплоутворен-
ня від тертя, неідеальність тепло-
вого контакту та теплообмін неза-
вантажених поверхонь з навко-
лишнім середовищем. У початко-
вий момент температуру тіл та
переміщення штампа, як жорст-
кого цілого, вважаємо ну-
льовими.

Задача полягає в тому, щоб задовольнити такі головні співвідношення:

а) рівняння термопружності для півпростору

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + k \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t_2}{\partial r}, \quad \Delta u_z + k \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t_2}{\partial z}, \quad (1)$$

де k, β – сталі [2], які залежать від сталих Ляме, e – модуль об'ємного роз-
ширення;

б) рівняння теплопровідності для циліндра і півпростору

$$\Delta t_1 = X_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau}, \quad \Delta t_2 = X_2 \frac{\partial t_2}{\partial \tau}, \quad (2)$$

де $X_i = 1/\alpha_i$, α_i – коефіцієнти температуропровідності;

в) температурні крайові умови

$$\frac{\partial t_1}{\partial z} = \gamma_0 t_1 \quad (0 \leq r \leq R, \quad z = 0, \quad \tau > 0); \quad (3)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = -\gamma_\alpha t_1 \quad (r = R, \quad 0 \leq z \leq l, \quad \tau > 0); \quad (4)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz},$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = h(t_2 - t_1) \quad (0 \leq r < R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (5)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial z} = -\gamma_{CH} t_1 \quad (R_0(\tau) < r < R, \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (6)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial z} = \gamma_H t_2 \quad (r > R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (7)$$

г) силові крайові умови

$$u_z = f(r, \tau) \quad (0 \leq r < R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (8)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (r > R_0(\tau), \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (0 < r < \infty, \quad z = l, \quad \tau > 0); \quad (10)$$

д) початкові умови

$$t_1 = t_2 = f = \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \quad (\tau = 0); \quad (11)$$

е) умову рівноваги штампа

$$P + 2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}|_{z=l} dr = 0. \quad (12)$$

Функція $R_0(\tau)$, яка задає радіус ділянки контакту, визначається в процесі розв'язування задачі на підставі припущення

$$R_0(\tau) = R \left(1 - \Delta\rho \sum_{j=1}^M H(\tau - \tau_j) \right), \quad (13)$$

де $H(\cdot)$ – функція Хевісайда, $\Delta\rho$ – безрозмірний крок, що визначає на ділянці контакту дискретну множину точок розбиття $r_i = R\Delta\rho(i-1)$ ($i = \overline{1, N}$); N – кількість точок розбиття; M, τ_j – визначають у процесі розв'язування.

Метод послідовно-дискретного розділення крайових умов. Згідно з цим методом, який детальніше описаний у праці [3], розв'язок задачі зручно записати у вигляді

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \sum_{j=1}^M \Gamma^{(j)}, \quad (14)$$

де $\Gamma^{(0)} = \{u_z^{(0)}, u_r^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}, \sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{\theta\theta}^{(0)}, \tau_{rz}^{(0)}, t_1^{(0)}, t_2^{(0)}\}$ – початковий розв'язок, який задовольняє рівняння термопружності і теплопровідності та співвідношення (1)–(10) при $R_0(\tau) = R$; $\Gamma^{(j)} = \{u_z^{(j)}, u_r^{(j)}, \sigma_{zz}^{(j)}, \sigma_{rr}^{(j)}, \sigma_{\theta\theta}^{(j)}, \tau_{rz}^{(j)}, t_1^{(j)}, t_2^{(j)}\}$ – коректувальні розв'язки, які задовольняють рівняння термопружності та теплопровідності і крайові умови для яких підбирають так, щоб на проміжку $[0, \tau_j]$ $\Gamma^{(j)}$ був нульовим, а потім враховував зміну крайових умов у момент τ_j .

Якщо виникає потреба врахувати відокремлення контактних поверхонь, яке починається від краю штампа, то перед відшукуванням розв'язку $\Gamma^{(1)}$ потрібно визначити момент $\tau = \tau_1$, коли в точці ($z = l$, $r = r_{N-1}$) контактний тиск змінює знак. Для знаходження $\Gamma^{(1)}$ використовуємо співвідношення (1), (2), (4), (7)–(9), однак замість (3), (5), (6), (10) потрібно задовольняти, відповідно,

$$\frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial z} + \gamma_{CH} t_1^{(1)} = \begin{cases} 0, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, 0 < \tau < \tau_1) \\ -\frac{\partial t_1^{(0)}}{\partial z} - \gamma_{CH} t_1^{(0)}, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, \tau > \tau_1) \end{cases}; \quad (15)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2^{(1)}}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz}^{(1)},$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2^{(1)}}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial z} = h(t_2^{(1)} - t_1^{(1)}) \quad (0 \leq r \leq R - \Delta R, z = l, \tau > 0); \quad (16)$$

$$\frac{\partial t_2^{(1)}}{\partial z} - \gamma_H t_2^{(1)} = \begin{cases} 0, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, 0 < \tau < \tau_1) \\ -\frac{\partial t_2^{(0)}}{\partial z} + \gamma_H t_2^{(0)}, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, \tau > \tau_1) \end{cases}; \quad (17)$$

$$u_z^1 = f^1 \quad (0 \leq r < R - \Delta R, z = l, \tau > 0); \quad (18)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \begin{cases} 0, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, 0 < \tau < \tau_1) \\ -\sigma_{zz}^{(0)}, & (R - \Delta R < r \leq R, z = l, \tau > \tau_1) \end{cases}; \quad (19)$$

$$2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{z=l} dr = 0. \quad (20)$$

Головні етапи відшукування розв'язків Γ_j ($j = \overline{0, M}$). Методика пошуку коректувальних розв'язків фактично нічим не відрізняється від шукання основного розв'язку [2]. Умовно процес знаходження Γ_j ($j = \overline{0, M}$) можна розділити на такі етапи:

1) застосування перетворення Лапласа до визначальних співвідношень. Наприклад, співвідношення (19) з урахуванням теореми запізнення матиме вигляд

$$\sigma_{zz}^{(1)L} = \exp(-s\tau_1)g_3^L \quad (R - \Delta R \leq r \leq R, \quad z = l), \quad (21)$$

де $g_3^L = -\sigma_{zz}^{(0)}(r, l, \tau + \tau_1)$;

2) відшукування розв'язку задачі теплопровідності для циліндра в трансформантах Лапласа;

3) знаходження розв'язку задачі термодружності для півпростору в подвійних трансформантах Ханкеля – Лапласа;

4) задоволення крайових умов і зведення задачі до сукупності парних інтегральних рівнянь;

5) задоволення інтегральних співвідношень на нескінченному проміжку за допомогою методу довизначення;

6) розклад невідомих функцій на межі півпростору в ряди за циліндричними функціями з коефіцієнтами, які залежать від параметра перетворення Лапласа

$$\varphi(\rho, s) = b_0(s) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s)J_0(\mu_n \rho), \quad (22)$$

де μ_n – нулі функції Бесселя 1-го роду нульового порядку;

7) застосування методу колокації і зведення задачі до системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладів шуканих функцій;

8) розв'язування системи для кожного з $s_n = (2n + 1)\sigma$ (σ – деяке дійсне число, $n = 1, 2, \dots, N^*$) і знаходження значень трансформант у рівновіддалених точках на дійсній осі;

9) обчислення оригіналів шуканих функцій методом Папуліса.

Аналіз результатів. Нехай сила P діє на штамп за законом $P(\tau) = F(1 - \exp(-a\tau))$, де F і a – деякі сталі. Розрахунки виконували для таких значень вхідних параметрів:

$$N = 21, \quad N^* = 11, \quad \gamma_0 = \gamma_H = \gamma_\alpha = 10 \text{ м}^{-1}, \quad h = 10 \text{ кВт/м}^2\text{К},$$

$$\alpha_T = 22,9 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad F = 15 \text{ кН}, \quad \omega = 0,05 \text{ с}^{-1}, \quad R = 0,5 \text{ м}, \quad l = 0,15 \text{ м},$$

$$\alpha_1 = 1/200000 \text{ м}^2/\text{с}, \quad \alpha_2 = 1/50000 \text{ м}^2/\text{с}, \quad a = 2, \quad \lambda = 5,46 \times 10^{10} \text{ Па},$$

$$\mu = 2,56 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad f_T = 0,1, \quad \lambda_1 = 22 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_2 = 209 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Для зручності задачу розглядали відносно безрозмірного часу $\tau' = \alpha_2 \tau / R^2$. В процесі розв'язування задачі визначено чотири точки розбиття, де спостерігали відокремлення контактних поверхонь (рис. 2). У початковий період контактна площа зменшується швидшими темпами. Цікаво зазначити, що відокремлення основи штампа від поверхні півпростору розпочалось у момент $\tau = \tau'_v$ одночасно зі зміною знака вертикальних переміщень під штампом.

На рис. 3 показано розподіли контактних напружень у різні моменти часу. Як бачимо, фрикційне нагрівання приводить до переміщення максимуму контактних напружень у глибину ділянки контакту. Важливо, що максимуми контактних напружень і контактних температур в однакові моменти часу спостерігали приблизно в однакових точках. Це свідчить про визначальний вплив температурних чинників на характер напружень під штампом.

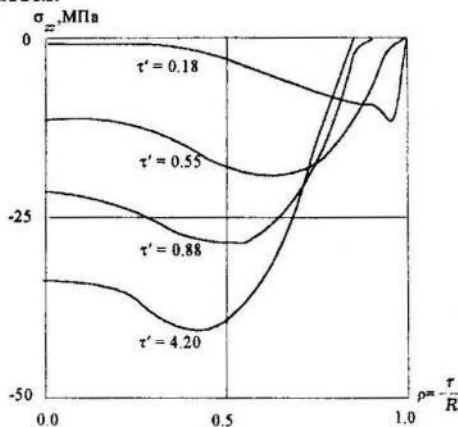


Рис. 2.

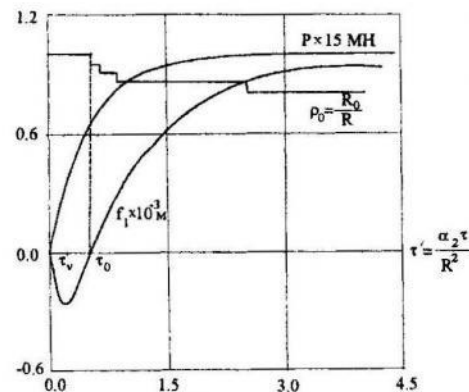


Рис. 3.

Точність запропонованого методу підтверджено порівнянням результатів у стаціонарному режимі з результатами відповідної стаціонарної задачі [1] з неповним контактом.

1. Левицкий В. П., Новосад В. П., Онишкевич В. М. Взаимодействие жесткого цилиндра с упругим полупространством при теплообразовании на площадке контакта // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, №11. – С. 26–31.
2. Левицкий В. П., Новосад В. П. Нестационарная осесимметричная задача при наличии теплообразования // Прикл. математика и механика – 1997. – Т. 61, Вып. 5. – С. 873–881.
3. Новосад В. П., Онишкевич В. М. Метод последово-дискретного разделения граничных условий в смешанных нестационарных задачах // Вісник держ. ун-ту «Львівська політехніка». – Прикл. математика. – 1998. – № 337. – С. 240–243.

DISCRETIZATION OF PROBLEM ABOUT INTERACTION OF AXIALLY SYMMETRICAL THERMOELASTIC BODIES WITH CHANGEABLE CONTACT AREA

Volodymyr Onyshkevych*, Volodymyr Novosad**

*Ukrainian state forestry engineering university

**Lviv branch of the Ukrainian Academy of state management
at the President of Ukraine

Nonstationary contact of a thermoelastical half-space and a rigid punch are considered. The half-space curves as a result of friction heatgeneration and it leads to decrease of contact area. The method of solving is described. The results are analysed.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.1999

**МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У
КОМПОЗИТАХ, АРМОВАНИХ КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ****Олексій Онишко***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Композити, армовані короткими тонкими волокнами, широко застосовують у сучасній техніці. Одним з матеріалів, який з успіхом використовують у будівництві, особливо транспортному та гідротехнічному, є фібробетон. Функції арматури в ньому виконують як сталь, так і полімерні матеріали. Сьогодні розроблені технології, які забезпечують рівномірне розсіяння волокон у бетоні, що дає змогу розглядати фібробетон як однорідний ізотропний матеріал. З іншого боку, в разі потреби забезпечується впорядковане розташування волокон, чим досягають необхідної міцності матеріалу в певному напрямі.

Є численні дослідження технологічних властивостей та механічних характеристик цих волокнистих композитів [2, 4]. Проте питання створення математичної моделі, яка б давала змогу кількісно описати термомеханічні процеси у таких матеріалах, досі відкрите. Особливо цікаво і важливо дослідити перерозподіл напружень між матрицею і волокнами в процесі експлуатації, викликаний непружною поведінкою матеріалу матриці, на відміну від пружних волокон. Ми спробували побудувати модель, яка дала б змогу відповісти на ці питання. Для цього використано методи термодинаміки нерівноважних процесів та механіки суцільного середовища, зокрема, термов'язкопружності [1, 6]. На підставі результатів експериментальних досліджень [2, 3–5] враховано також фізичний зміст та особливості проходження термомеханічних процесів у фібробетонах за умов складного термомеханічного зовнішнього навантаження.

Розглянемо в'язкопружне теплопровідне тіло, що перебуває під дією силового навантаження в умовах теплообміну з навколишнім середовищем. Вважаємо, що в кожний момент часу в кожній точці тіла густина

$$\rho = (1 - \beta)\rho^{(1)} + \beta\rho^{(2)}. \quad (1)$$

Індекс 1 стосується матеріалу матриці, а індекс 2 – матеріалу волокон. Припустимо, що концентрація волокон β у тілі однорідна і незмінна в часі. Приймаємо також, що напруження в кожній точці тіла в будь-який момент часу t є сумою напружень у матриці та волокні:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^{(1)}(t) + \sigma_{ij}^{(2)}(t). \quad (2)$$

Деформації ϵ_{ij} вважаємо неподільними.

За цих припущень маємо такий вигляд балансових співвідношень для маси, кількості руху, енергії та ентропії тіла:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 0; & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \text{div} \hat{\sigma}; \\ \rho(\dot{U} + \dot{K}) &= \text{div}(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \text{div} \mathbf{q} + \rho r; & \rho \dot{S} &\geq -\text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T}. \end{aligned} \quad (3)$$

У виразі (3) символами $\mathbf{v}$, $\hat{\sigma}$, ρr , $\mathbf{q}$, ρS , ρU , ρK , T позначено відповідно вектор швидкості, тензор напружень, джерело і потік тепла, ентропію, внутрішню і кінетичну енергію та температуру.

Після введення вільної енергії $A = U - TS$ та потрібних перетворень запишемо

$$-\rho \dot{S} - \rho \dot{A} + \sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{\alpha} \dot{\varepsilon}_{ij} - \mathbf{q} \nabla T / T \geq 0. \quad (4)$$

Вважаємо, що вільна енергія є функціоналом [1], залежним не тільки від історії деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і температури $T(t)$, а й від внутрішніх змінних $\xi^{(\alpha)}(t)$ – скалярних параметрів, що описують вплив деформацій на окремі компоненти тіла:

$$\dot{\xi}^{(\alpha)}(t) = a_{ij}^{(\alpha)} \dot{\varepsilon}_{ij}(t), \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

Припускаємо, що ці функції є неперервними в інтервалі $-\infty < t < \infty$ та що при $t \rightarrow -\infty$ виконується $\varepsilon_{ij}(t) \rightarrow \varepsilon_{ij}^0$, $T(t) \rightarrow T^0$. Використовуючи теорему Стоуна – Веєрштраса, при $-\infty < \tau \leq t$ апроксимуємо вибраний функціонал багаточленом з множини неперервних дійсних лінійних функціоналів, залежних від $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $T(\tau)$, $\xi^{(\alpha)}(\tau)$. Виразимо їх за допомогою інтегралів, приймаючи, що $(T(\tau) - T^0)/T^0$ – величина порядку $O(\varepsilon)$. Обмеживши розклад лінійними та квадратними функціоналами, одержимо

$$\begin{aligned} \rho A &= \rho A^0 + \int_{-\infty}^t D_{ij}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t \beta(t-\tau) \dot{T}(\tau) d\tau + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{-\infty}^t B^{(\alpha)}(t-\tau) \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau, t-\tau') \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau') d\tau d\tau' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t m(t-\tau, t-\tau') \dot{T}(\tau) \dot{T}(\tau') d\tau d\tau' + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t n^{(\alpha)(\beta)}(t-\tau, t-\tau') \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau) \dot{\xi}^{(\beta)}(\tau') d\tau d\tau' - \\ &- \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t W_{ij}(t-\tau, t-\tau') \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) \dot{T}(\tau') d\tau d\tau' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \Psi_{ij}(t-\tau, t-\tau') \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau') d\tau d\tau' - \\
 & - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t l^{(\alpha)}(t-\tau, t-\tau') \dot{T}(\tau) \dot{\xi}^{(\alpha)}(\tau') d\tau d\tau'.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Продиференціюємо (6), використовуючи формули Лейбніца, та підставимо результат у нерівність (4). Увівши позначення $\int_{-\infty}^t F(t-\tau)f(\tau)d\tau \equiv F * f$, упорядкувавши та врахувавши симетрію інтегральних ядер, матимемо

$$\begin{aligned}
 & \left[-\rho S + \beta(0) + m * \dot{T} + W_{ij} * \dot{\epsilon}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^2 l^{(\alpha)} * \dot{\xi}^{(\alpha)} \right] \dot{T}(t) + \\
 & + \left[\sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{(\alpha)} - D_{ij}(0) - G_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl} + W_{ij} * \dot{T} - \sum_{\alpha=1}^2 \Psi_{ij}^{(\alpha)} * \dot{\xi}^{(\alpha)} \right] \dot{\epsilon}_{ij}(t) + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \left[-B^{(\alpha)}(0) - \sum_{\beta=1}^2 n^{(\alpha)(\beta)} * \dot{\xi}^{(\beta)} - \Psi_{ij}^{(\alpha)} * \dot{\epsilon}_{ij} + l^{(\alpha)} * \dot{T} \right] \dot{\xi}^{(\alpha)}(t) + R - \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T_0} \geq 0,
 \end{aligned} \quad (7)$$

де $\beta(0)$, $D_{ij}(0)$ – початкові значення ентропії та напружень.

Нерівність (7) повинна виконуватись при довільних значеннях $\dot{\epsilon}_{ij}(t)$, $\dot{T}(t)$. Це означає, що коефіцієнти при них повинні дорівнювати нулю. Підставивши в них ще (5), одержимо визначальні співвідношення для напружень та ентропії:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{(\alpha)} = D_{ij}(0) + (G_{ijkl} + \sum_{\alpha=1}^2 a_{kl}^{(\alpha)} \Psi_{ij}^{(\alpha)}) * \dot{\epsilon}_{kl} - W_{ij} * \dot{T}; \quad (8)$$

$$\rho S = \beta(0) + m * \dot{T} + (W_{ij} + \sum_{\alpha=1}^2 a_{ij}^{(\alpha)} l^{(\alpha)}) * \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (9)$$

Враховуючи, що для сумарних напружень повинно виконуватись співвідношення

$$\sigma_{ij} = D_{ij}(0) + G_{ijkl} * \dot{\epsilon}_{kl} - W_{ij} * \dot{T}, \quad (10)$$

з порівняння (8) і (10) випливає, що

$$\sum_{\alpha=1}^2 a_{kl}^{(\alpha)} \Psi_{ij}^{(\alpha)} * \dot{\epsilon}_{kl} = 0. \quad (11)$$

Умова (11) є обмеженням на коефіцієнти з (5).

Після підстановки (1) у (8) та виконано необхідних перетворень запишемо співвідношення для складових напружень у матриці $\sigma_{ij}^{(1)}$ та волокнах $\sigma_{ij}^{(2)}$:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{(1-\beta)\rho^{(1)}}{\rho} D_{ij}(0) + \left[\frac{(1-\beta)\rho^{(1)}}{\rho} G_{ijkl} + a_{kl}^{(1)} \Psi_{ij}^{(1)} \right] * \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{(1-\beta)\rho^{(1)}}{\rho} W_{ij} * \dot{T}, \quad (12)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \frac{\beta\rho^{(2)}}{\rho} D_{ij}(0) + \left[\frac{\beta\rho^{(2)}}{\rho} G_{ijkl} + a_{kl}^{(2)} \Psi_{ij}^{(2)} \right] * \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\beta\rho^{(2)}}{\rho} W_{ij} * \dot{T}. \quad (13)$$

За допомогою рівнянь (12) і (13) можна обчислити перерозподіл напружень між матрицею та волокнами з плином часу. Принципи використання моделі опишемо на такому прикладі.

Розглянемо пружний ізотропний шар з фібробетону товщиною $2h$ ($-h \leq z \leq h$), що перебуває під дією згинного моменту M . Припустимо, що температура шару стала. В такому разі рівняння (12) і (13) зводяться до вигляду

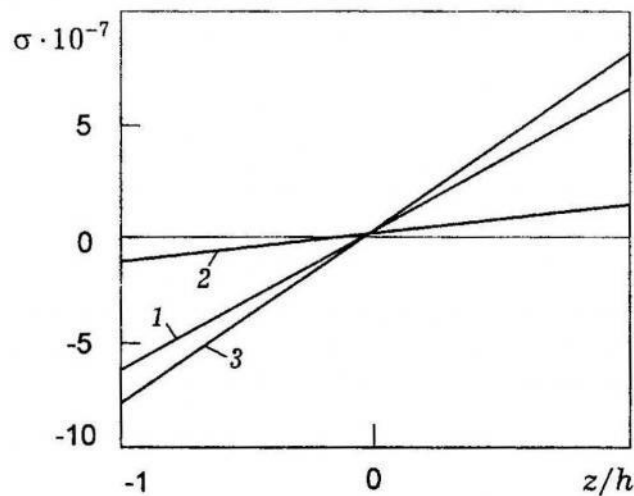
$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)M}{4E} \left[\frac{2(1-\beta)\rho^{(1)}E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} - A \right] \frac{z}{h}; \quad (14)$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)M}{4E} \left[\frac{2\beta\rho^{(2)}E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} + A \right] \frac{z}{h}, \quad (15)$$

де A – параметр, відповідальний за перерозподіл напружень між складниками, E і ν – усереднені значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона. Усереднення виконують так само, як і для густини:

$$E = (1-\beta)E^{(1)} + \beta E^{(2)}, \quad \nu = (1-\beta)\nu^{(1)} + \beta\nu^{(2)}. \quad (15)$$

Повні напруження обчислюють з (2).



Розподіл напружень по товщині шару.

На рисунку показано розподіл напружень по товщині шару в бетоні (1) і волокнах (2), а також повних напружень (3) у безрозмірному вигляді. Прийнято $M = 50$ МНм, $\rho^{(1)} = 2410$ кг/м³, $\rho^{(2)} = 7870$ кг/м³, $E^{(1)} = 25$ ГПа, $E^{(2)} = 210$ ГПа, $\nu^{(1)} = 0,15$, $\nu^{(2)} = 0,3$, $A = 5$ ГПа. Параметр A оцінено з урахуванням експериментальних даних [2, 5].

1. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
2. Brandt A. M. Własności mechaniczne i struktura kompozytów betonowych. – Warszawa: PAN, Ossolineum, 1974. – 586 s.
3. Erdelyi A. The toughness of steel fibre reinforced concretes // Period. Politechn. Civ. Eng. – 1993. – Vol. 52, No. 1. – P. 329–336.
4. Kasperkiewicz J. Mechanika kompozytów betonopodobnych. – Wrocław: Ossolineum, 1983. – 625 s.
5. Song Yupu, Zhao Guofan, Peng Fang et al. Strength behavior and failure criterion of steel fibre concrete under triaxial stresses // China Civ. Eng. J. – 1994. – Vol. 27, No. 3. – P. 14–9.
6. Truesdell C. Rational thermodynamics. – McGraw Hill, 1969. – 422 p.

MODELLING OF PHYSICOMECHANICAL PROCESSES IN COMPOSITES REINFORCED WITH SHORT FIBRES

Oleksij Onyshko

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

A model for description of thermomechanical behavior of composites similar to fibroconcrete built by the methods of mechanics of solids and thermodynamics is proposed. This model permits to describe redistribution of stresses between matrix and fibres in the composite in dependence of time by introducing of corresponding interior parameters. Physical equations of the proceeding processes are written. The distribution of stresses over the thickness of bended fibroconcrete plate is calculated.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.1999

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ ПО ДУЗІ КОЛА

Віктор Опанасович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Формулювання задачі. Дослідимо стаціонарний термопружний стан ізотропної пластини з теплоізованими основами, яка містить тріщину по дузі кола радіусом R . Вважаємо, що пластина перебуває під дією однорідного поля напружень на нескінченності, крім того, відомий сталий тепловий потік q_∞ у нескінченно віддаленій точці. Береги тріщини теплоізовані і вступають у гладкий контакт по всій її довжині.

Виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі кола, напрямивши вісь Ox через середину тріщини. Область всередині кола позначимо через S^+ , а зовні – через S^- , частину кола, де розміщена тріщина – через L , центральний кут розхилу тріщини – через 2φ . Вважаємо, що тепловий потік q_∞ утворює кут α з віссю Ox .

Згідно з постановкою задачі матимемо такі граничні умови:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^\pm = 0 \quad \text{на } L, \quad (1)$$

$$rr^+ = rr^- = rr, \quad r\vartheta^+ = r\vartheta^- = 0, \quad v_r^+ - v_r^- = 0 \quad \text{на } L, \quad (2)$$

де T – температура пластини; rr , $r\vartheta$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат з початком у центрі кола радіуса R [1]; v_r – радіальна складова вектора переміщення; значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідних функцій при прямуванні точки пластини до лінії L відповідно з S^+ і S^- .

Задача теплопровідності. Введемо у розгляд температурний комплексний потенціал $\Psi_0(z)$ [2], тоді $T = 2 \operatorname{Re} \Psi_0(z)$, і, крім того, виконуються розвинення

$$\Psi_0(z) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots & z \in S^+, \\ \bar{a}_0 z + b_*/z + C + \dots & z \in S^-. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $z = x + iy$, x, y – декартові координати точки комплексної площини, $i = \sqrt{-1}$; α_i , $i = 0, \infty$, b_* , C – невідомі комплексні сталі; $a_0 = -(2k)^{-1} q_\infty e^{i\alpha}$, k – коефіцієнт теплопровідності.

Введемо нову функцію $V(z) = \frac{z}{R} \Psi_0'(z)$, тоді

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R}{r} (V(z) + \overline{V(z)}). \quad (4)$$

Задовольняючи крайову умову (1) та враховуючи (4), одержуємо такі задачі лінійного спряження:

$$(V(t) + \bar{V}(u))^+ + (V(t) + \bar{V}(u))^- = 0, \quad t \in L,$$

$$(V(t) - \bar{V}(u))^+ - (V(t) - \bar{V}(u))^- = 0, \quad t \in L, \quad u = R^2/t,$$

розв'язавши які та врахувавши (3), знайдемо

$$\Psi_0(z) = 0.5(\bar{a}_0 z + a_0 R^2 z^{-1}) + 0.5R(b_2 - d_0 R^{-2} z^{-1})X(z), \quad (5)$$

де $d_0 = -a_0 R^2$, $b_2 = \bar{a}_0/R$, $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, $a = e^{-i\varphi}R$, $b = \bar{a}$.

Беручи до уваги (5) та (3), можемо записати

$$C = 0.5R(a_0 - \bar{a}_0 \cos \varphi), \quad b_* = R^2 \sin^2 \varphi / 2(a_0 + \bar{a}_0 \cos^2 \varphi / 2), \quad \alpha_0 = -\bar{C}.$$

Задача термопружності. Введемо у розгляд комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини матимемо формули [2]

$$2\mu(v_r + iv_\theta) = e^{-i\vartheta} \left[\kappa \Phi(z) + \omega \left(\frac{R^2}{z} \right) - z \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \overline{\Phi(z)} + \beta \Psi_0(z) \right], \quad (6)$$

$$rr + ir\vartheta = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega \left(\frac{R^2}{z} \right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) [\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}], \quad (7)$$

де $\Omega(z) = -\bar{\Phi} \left(\frac{R^2}{z} \right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}' \left(\frac{R^2}{z} \right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi} \left(\frac{R^2}{z} \right)$, $\Psi'_0(z) = \Psi_0(z)$, $\Phi'(z) = \Phi(z)$,

$\omega'(z) = \Omega(z)$, $\bar{\Phi} \left(\frac{R^2}{z} \right) = \overline{\Phi \left(\frac{R^2}{z} \right)}$, μ – модуль зсуву; κ, β – відомі сталі [2], вирази для яких не наводимо.

Задовольняючи першу групу граничних умов (2) на підставі (7), отримуємо

$$(\Phi(t) + \Omega(t))^+ - (\Phi(t) + \Omega(t))^- = 0, \quad t \in L. \quad (8)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (8), матимемо

$$\Omega(z) = -\Phi(z) + \Gamma - \bar{A}_1 + \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} + \frac{\bar{b}_\infty}{z}, \quad (9)$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\gamma}$, $A_1 = \Phi(0)$, $\bar{b}_\infty = -2\beta_0 R^2 \times \sin^2 \frac{\varphi}{2} (a_0 + \bar{a}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2})$, $\beta_0 = \frac{\beta}{2(1+\kappa)}$, N_i – головні напруження на нескінченності, γ – кут, який головне напруження N_1 утворює з віссю Ox .

Беручи до уваги (7) та (9), з першої граничної умови (2) одержимо

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = rr + \Gamma - \bar{A}_1 + R^2 \bar{\Gamma}' t^{-2} + \bar{b}_\infty t^{-1}, \quad t \in L. \quad (10)$$

Введемо функцію

$$D(z) = \Phi(z) - \bar{\Phi}(R^2 z^{-1}) + 2\beta_0 (\Psi_0(z) - \bar{\Psi}_0(R^2 z^{-1})) - z\Phi'(z) + R^2 z^{-1} \bar{\Phi}'(R^2 z^{-1}), \quad (11)$$

яка, як видно з останньої граничної умови (2) та залежності (6), є розв'язком такої задачі лінійного спряження:

$$D^+(t) - D^-(t) = 0, t \in L. \quad (12)$$

Розв'язавши крайову задачу (12), отримаємо

$$D(z) = \Gamma - \bar{A}_1 + 2Q + 2\beta_0 \left(\bar{a}_0 z - \frac{a_0 R^2}{z} \right), Q = (a_0 - \bar{a}_0 \cos \varphi) \beta_0 R. \quad (13)$$

Якщо врахувати (10), то на підставі (13) можемо записати

$$rr'_\theta = \frac{3}{2} i \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} - \frac{\Gamma' t^2}{R^2} \right) + 2B_1 - 2i\beta_0 (\bar{a}_0 t - a_0 R^2 t^{-1}) + i \left(\bar{b}_\infty t^{-1} - \frac{b_\infty}{R^2} t \right),$$

$$\operatorname{Re} A_1 = \Gamma + 2 \operatorname{Re} Q, B_1 = \operatorname{Im} Q. \quad (14)$$

Розв'язуючи рівняння (13) стосовно невідомих контактних напружень rr , одержимо

$$rr = -\frac{3}{4} \left(\frac{\bar{\Gamma}'}{t^2} R^2 + \frac{\Gamma' t^2}{R^2} \right) + 2B_1 \theta - 2\beta_0 R \left(\frac{\bar{a}_0 t}{R} + \frac{a_0 R}{t} \right) - \left(\frac{\bar{b}_\infty}{t} + \frac{b_\infty}{R^2} t \right) + C_1, \quad (15)$$

де C_1 – невідома дійсна стала.

Підставивши (15) в (10) та розв'язуючи одержану задачу лінійного спряження, знайдемо

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \frac{1}{X(z)} & \left\{ C_2 z + C_3 + \frac{1}{2} \left[-C_5 (z + \gamma_5) - \frac{1}{4} \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} (\gamma_{05} + \gamma_{06} z) + \frac{3\Gamma'}{4R^2} (z^3 \right. \right. \\ & + \gamma_5 z^2 + \gamma_6 z + \gamma_7) + \left. \left(2\beta_0 \bar{a}_0 + \frac{b_\infty}{R^2} \right) (z^2 + \gamma_5 z + \gamma_6) + 2\beta_0 R^2 a_0 \left(\frac{\gamma_{05}}{z} + 1 \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left[C_5 + \frac{1}{4} \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} - \frac{3\Gamma' z^2}{R^2} \right) - \frac{b_\infty}{R^2} z - 2\beta_0 R \left(\frac{\bar{a}_0 z}{R} + \frac{a_0}{z} R \right) \right] + \frac{2B_1}{2\pi i X(z)} \times \\ & \times \int_L \frac{\theta X^+(t) dt}{t - z} = \Phi_0(z)/X(z) + f(z), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } C_2 = \Gamma, C_3 = -2\beta_0 R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(a_0 + \bar{a}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) - \Gamma R \cos \varphi, C_5 = \Gamma - \bar{A}_1 + C_1,$$

$$\gamma_5 = -R \cos \varphi, \gamma_6 = \frac{R^2}{2} \sin^2 \varphi, \gamma_7 = \frac{R^3}{2} \cos \varphi \sin^2 \varphi, \gamma_{05} = -R, \gamma_{06} = \cos \varphi.$$

Задовольняючи умову $\Phi(0) = A_1$ та враховуючи (16), отримаємо

$$\operatorname{Im} A_1 = -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 + 3 \cos \varphi) \operatorname{Im} \Gamma' + 2\beta_0 \operatorname{Im} a_0 \left(q - R \sin^6 \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$C_1 = 2\Gamma + \frac{1}{8} \cos^2 \frac{\varphi}{2} (3 \cos \varphi - 1) (\bar{\Gamma}' + \Gamma') + 2\beta_0 R \left(3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^6 \frac{\varphi}{2} + 1 \right) \operatorname{Re} a_0.$$

Розподіл напружень поблизу вершини тріщини наведено в багатьох монографіях, наприклад [3,4], коефіцієнти інтенсивності напружень визначимо за формулами

$$K_{2j} = -2\delta_j \operatorname{Re} \left[\Phi_0(z_j) e^{i\delta_j \varphi/2} \right] (R \sin \varphi)^{-1/2}, K_{1j} = 0, \delta_j = (-1)^j, z_j = e^{-i\delta_j \varphi} R.$$

Як частковий випадок з наведених результатів одержимо відомий розв'язок силової задачі [5].

Коли пластина перебуває під дією тільки теплового потоку, контактні напруження і коефіцієнти інтенсивності напружень знайдемо за формулами

$$\begin{aligned} r r k / (2 \beta_0 R q_\infty) = & -\theta \sin \alpha \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos (\theta - \alpha) - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi \cos (\theta + \alpha) - \\ & - \frac{1}{2} \cos \alpha \left(3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^6 \frac{\varphi}{2} + 1 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} K_{2j} k / (\beta_0 R^{3/2} q_\infty) = & \cos \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\sin \varphi} \left[\operatorname{tg} \alpha \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \theta \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin \frac{\varphi + \theta}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2}} d\theta \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) - \delta_j \left(2 \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi \right) \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи вираз для контактних напружень (17), можна зробити такі висновки: 1) область контакту не залежить від радіуса кола, де розміщена тріщина; 2) якщо контакт відбувається для даних φ, α і $q_\infty > 0$, то контакт відбуватиметься і для $\varphi, -\alpha$, $q_\infty > 0$, розподіл контактних напружень у цьому випадку буде дзеркальним відображенням стосовно осі Ox контактних напружень при додатному α ; 3) якщо контакт відбувається при заданих φ і α та заданому напрямі теплового потоку, то, змінивши його напрям на протилежний, контакту не матимемо; 4) контакт берегів тріщини достатньо досліджувати при $0 \leq \alpha < \pi/2$; 5) при $\alpha = 0$ контакт по всій довжині тріщини можливий при будь-якому куті розхилу тріщини φ .

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 198 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
5. Опанасович В. К. Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола // Праці Наук. т-ва ім. Шевченка, – 1997. – Т. 1. – С. 483–491.

THERMOELASTIC CONTACT PROBLEM ABOUT PLATE WITH CRACK LYING ON THE ARC OF CIRCLE

Victor Opanasovych

Ivan Franko National University of L'viv

In the paper stress state of thermoinsulated plate containing the crack lying on the circle arc is considered. Banks of the crack have unfigured contact with each other under the influence of known homogenous stress field and determined thermal flood on the infinity. The analytical expressions for temperature complex potential and complex potentials of Kolocov and Muskhelishvili are shown. In particular case known results from the literature are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.2000

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛИТИ З ДВОМА ПРЯМОЛІНІЙНИМИ КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА ТЕОРІЄЮ РЕЙССНЕРА

Віктор Опанасович, Роман Селіверстов

Львівський національний університет імені Івана Франка

Дослідимо згин ізотропної пластини постійної товщини h , яка містить дві колінеарні прямолінійні тріщини різної довжини. Вважаємо, що до берегів тріщин прикладені самозрівноважені згинальні моменти, під дією яких береги тріщин не контактують. Згин пластини описується рівняннями за теорією Рейсснера. Треба визначити напружено-деформований стан пластини.

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат з початком посередині перемички між тріщинами, направивши вісь Ox по прямій, на якій вони розміщені. Довжину тріщин позначимо через $2l_j$, тут і надалі індекс j набуває значення 1 або 2. Відстань між їхніми внутрішніми вершинами дорівнює $2c$. Частину дійсної осі, де розміщена j тріщина, позначимо через L_j , крім того, $L = L_1 + L_2$.

Крайові умови задачі матимуть вигляд:

$$M_y^{\pm} = \frac{1}{2}q(x), \quad Q_y^{\pm} = 0, \quad H_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L. \quad (1)$$

Значками «+» і «-» позначено граничне значення функцій при $y \rightarrow \pm 0$; M_y – згинальний момент, H_{xy} – крутильний момент, Q_y – поперечна сила, $q(x)$ – відома функція.

Крайові умови (1) запишемо так

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \quad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$M_y^+ + M_y^- = q(x), \quad Q_y^+ + Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = 0, \quad x \in L. \quad (3)$$

Введемо в розгляд комплексні потенціали $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ та функцію $\Omega(z, \bar{z})$ [1, 6], тоді згинальні і крутні моменти, а також поперечні сили виразимо за формулами

$$M_x + M_y = 2m[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}],$$

$$M_y + iH_{xy} = m[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + n[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi'(z)}] + \rho\left[2\overline{\Phi''(z)} + i\frac{\partial^2\Omega(z, \bar{z})}{\partial z^2}\right], \quad (4)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D\left(2\Phi'(z) - i\frac{\partial\Omega(z, \bar{z})}{\partial z}\right), \quad (5)$$

де $m = -D(1 + \nu)$, $n = D(1 - \nu)$, $\rho = 4D/k^2$, $k = \sqrt{10}/h$, $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$,
 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $i = \sqrt{-1}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, E, ν - відповідно модуль
Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Функції $\Omega(z, \bar{z})$ і $\Phi(z)$ виберемо у вигляді

$$\Omega(z, \bar{z}) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_L f(t) \frac{w K_1(w)}{t - z} dt \right], \quad (6)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z}, \quad (7)$$

де $w = k\sqrt{(t - x)^2 + y^2}$, $f(t)$ - невідома дійсна функція; тут і надалі $K_i(x)$ - функція Макдональда першого порядку.

Беручи до уваги (6) і (7), формулу (5) перепишемо так:

$$Q_x - iQ_y = -\frac{2D}{\pi} \int_L \left[\frac{w^2 \tilde{K}_1(w)}{(t - z)^2} + \frac{k^4(t - \bar{z})K_0(w)}{w^2} (t - x) \right] f(t) dt. \quad (8)$$

Введемо в розгляд функцію

$$V(z) = q\bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z), \quad (9)$$

де $q = -(1 + \nu)/(1 - \nu)$, $\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$.

Враховуючи (6) і (9), формулу (4) подамо у вигляді

$$M_y + iH_{xy} = n \left[q\Phi(z) + V(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z) + i\rho_1 \overline{\Omega_9(z, \bar{z})} \right], \quad (10)$$

де $\Omega_9(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{w [2\tilde{K}_1(w) + wK_0(w)] f(t)}{(t - z)^3} dt + \frac{k^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[i \int_L \frac{w K_1(w) f(t)}{t - z} dt \right] + \frac{k^6}{\pi} \times$
 $\times \int_L \frac{(x - t)y}{w^3} K_1(w) (\bar{z} - t) f(t) dt, \quad K_1(w) = \frac{1}{w} + \tilde{K}_1(w), \quad \rho_1 = \frac{2h^2}{5(1 - \nu)}.$

Функцію $V(z)$ запишемо

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{t - z}. \quad (11)$$

Тут $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, $g_j(t)$ - дійсні функції.

На підставі крайових умов (2) та (8)-(11) отримаємо, що $g_1(t) = 0$,
 $g_2(t) = -\rho_2 f(t)$, $\rho_2 = (5 + \nu)/(1 - \nu)$.

Задовольняючи крайові умови (3), одержимо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження невідомої функції $f(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{\rho_3}{t - x} + \frac{2\rho_1 w^2 \tilde{K}_2(w)}{(t - x)^3} \right] f(t) dt = -\frac{1}{n} q(x), \quad x \in L, \quad (12)$$

де $\tilde{K}_2(w) = K_2(w) - 2/w^2$, $w = k(t - x)$, $\rho_3 = 2(3 + \nu)/(1 - \nu)$.

Рівняння (12) доповнимо додатковими умовами

$$\int_{L_j} f_j(t) dt = 0, \quad f_j(t) = f(t), \quad t \in L_j, \quad (13)$$

які виражають собою однозначність кутів повороту [5], обходячи j -ої тріщини.

Зауважимо таке, коли в (12), (13) зробити граничний перехід, тобто $c \rightarrow \infty$, то отримаємо відповідну систему рівнянь [3].

Систему рівнянь (12), (13) подамо у вигляді

$$\int_{-1}^1 \frac{\rho_3 + \rho_4 \tilde{K}_2(\kappa_j |t - x|)}{t - x} \tilde{f}_j(t) dt + \int_{-1}^1 \frac{\rho_3 + \rho_4 \tilde{K}_2(\tilde{w}_{3-j})}{v_{3-j}} \tilde{f}_{3-j}(t) dt = -\frac{\pi}{n} \tilde{q}_j(x), \quad (14)$$

$$|x| < 1, \quad \int_{-1}^1 \tilde{f}_j(t) dt = 0,$$

де $\gamma_1 = 2c/l_1$, $\delta_1 = l_2/l_1$, $\kappa_1 = \lambda^{-1}$, $\kappa_2 = \gamma_2/\lambda$, $\lambda = h/(l_1 \sqrt{10})$, $\rho_4 = 8/(1 - \nu)$,
 $\delta_2 = \delta_1^{-1}$, $\gamma_2 = \gamma_1/\delta_1$, $\tilde{w}_j = \kappa_j |v_j|$, $v_j = t - \delta_j x + (-1)^{j+1}(1 + \gamma_j + \delta_j)$,
 $(\tilde{q}_j, \tilde{f}_j)(t) = (q_j, f_j)((-1)^{j+1}(c + l_j) + l_j t)$.

Рівняння (14) розв'язуватимемо числово за допомогою методу механічних квадратур [4]. Коефіцієнти інтенсивності напружень [2] можна знайти через вузлові значення шуканих функцій у нулях полінома Чебишова першого роду, але у зв'язку з обмеженістю об'єму статті відповідних числових залежностей для них не наводимо, тільки зауважимо, що в часткових випадках вони збігаються з відомими в літературі [3, 1].

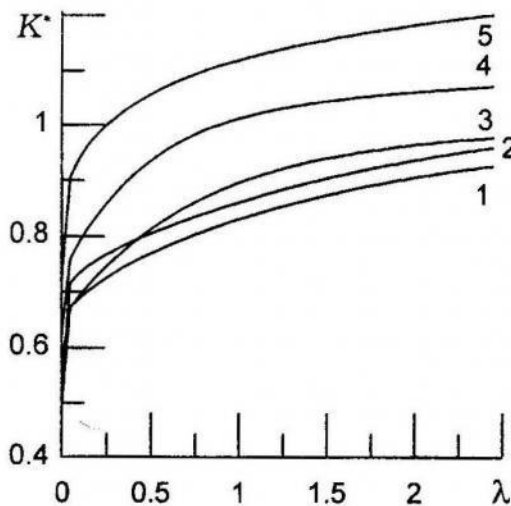


Рис. 1.

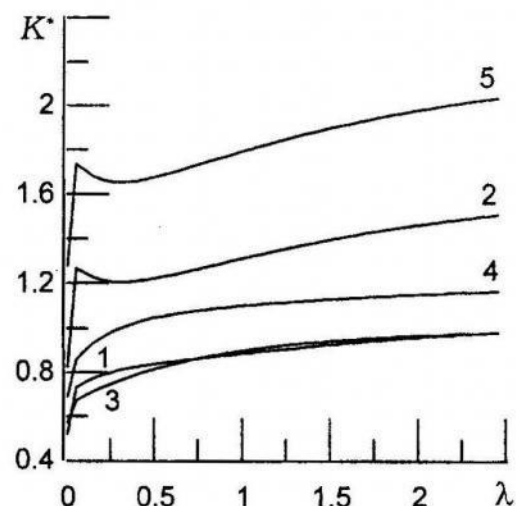


Рис. 2.

Обчислення проводили за допомогою програми мовою Паскаль для СЛАР із 100 рівнянь при $\nu = 0.3$, $\delta_1 = 0.5$. На рис. 1 і рис. 2 залежність на-

веденого коефіцієнта інтенсивності напружень $K^* = K^P / K^K$ від параметра λ відповідно у зовнішніх і внутрішніх вершинах тріщин. Тут K^P – коефіцієнт інтенсивності напружень за Рейснером, K^K – за Кірхгофом для однієї тріщини завдовжки $2l_1$ при постійному згинальному моменті на її берегах. Крива 1 відповідає 2-й тріщині при $\gamma_1 = 1$, крива 2 – 2-й при $\gamma_1 = 0.1$, крива 3 – 1-й при $\gamma_1 = 10$, крива 4 – 1-й при $\gamma_1 = 1$, крива 5 – 1-й при $\gamma_1 = 0.1$.

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1990. – 256 с.
3. Опанасович В. К., Делявський М. В., Подхорецькі А. Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейснера / Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: У 3 т. / За заг. ред. В. В. Панасюка. Т. 2. Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – Львів: Каменяр, 1999. – С. 186-189.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
5. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
6. Угодчиков А. Г., Соболев В. А. Концентрация напряжений около отверстий в плитах по теории Рейснера // Прикл. механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 58-66.
7. Knowles J. K., Wang N. M. On the bending of an elastic plate a crack // J. Math. and Phys. – 1970. – Vol. 39, No. 3. – P. 223-236.

STRESS STATE IN THE PLATE CONTAINING TWO STRAIGHT COLINEAR CRACKS BY REISSNER THEORY

Victor Opanasovych, Roman Seliverstov

Ivan Franko National University of L'viv

In the paper the problem about bending of constant thickness isotropic plate with two different length straight cracks lying on the same line is considered. It is assumed that the selfequilibrium load and bending moments are applied to the banks of the cracks. Using the methods of the theory of functions of complex variable the solution of this problem is reduced to system of two singular integral equations. This system is numerically solved by mechanical quadratures method. Numeric analysis of stress intensity factors is realized. In particular cases results from the scientific literature are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 06.12.1999

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТІЛА ТИПУ ЗЧЕПЛЕННЯ-КОВЗАННЯ З
УРАХУВАННЯМ ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ТА ЗНОСУ

Юрій Пир'єв

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянуто математичну модель фрикційного термопружного контакту тіла з рухомим навколишнім середовищем, що є продовженням дослідження впливу фрикційного тепловиділення, теплового розширення та зносу [1–3] на рух тіла типу зчеплення-ковзання.

Формулювання задачі. Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту прямокутного паралелепіпеда ($L \times a \times b$) масою M з ідеально провідними тілами, що рухаються зі сталими швидкостями V (рис. 1). Ця модель узагальнює попередні дослідження [1] в напрямі врахування зносу. Відстань між рухомими тілами має довжину товщини паралелепіпеда L і в початковий момент зменшується на ε . Паралелепіпед утримує у вертикальному положенні пружина з жорсткістю C , і він може рухатися уздовж осі Z декартової системи координат XYZ . Унаслідок дії сил тертя F_{fr} на поверхнях контакту $X = 0$, $X = L$ відбувається теплоутворення та знос. Між поверхнями контакту прямокутного паралелепіпеда і рухомих тіл діє тепловіддача за законом Ньютона. Бічні поверхні паралелепіпеда, які не контактують, теплоізовані і для їхніх розмірів справджується $L/a \ll 1$, $L/b \ll 1$, що виправдовує використання одновимірної моделі теплопровідності. Приймаємо, що згідно із законом Амонтона $F_{fr} = f(V_{rel})N(t)$, де $f(V_{rel})$ – коефіцієнт тертя (рис. 2), який залежить від відносної швидкості $V_{rel} = V - \dot{Z}(t)$ [4], причому $f(-V_{rel}) = -f(V_{rel})$, $N(t)$ – нормальна сила.

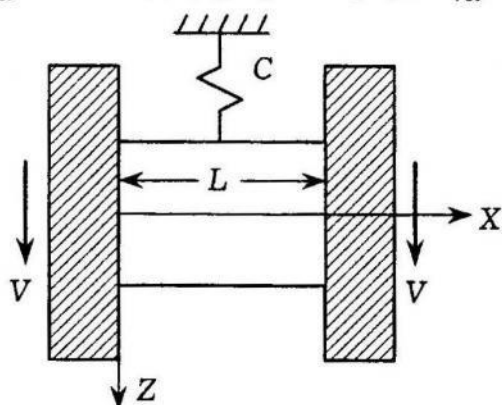


Рис. 1.

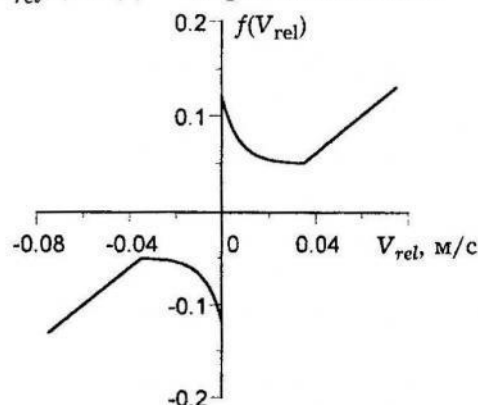


Рис. 2.

Приймаємо, що в початковий момент прямокутний паралелепіпед розташований на відстані Z_0 від положення статичної рівноваги паралелепіпеда, де для зручності розмістимо початок системи координат. Початкова

швидкість плити дорівнює нулю. Треба визначити температуру $T(X, t)$ паралелепіпеда, переміщення $U(X, t)$, знос $U^w(t)$, нормальні напруження $\sigma_{xx}(X, t)$, зміщення паралелепіпеда $Z(t)$ стосовно положення статичної рівноваги та його швидкість.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial}{\partial X} U(X, t) - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X, t) \right] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} T(X, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} T(X, t) \quad (2)$$

та рівняння руху паралелепіпеда як абсолютно твердого тіла:

$$m \frac{d^2}{dt^2} Z(t) + cZ(t) = 2f(V_{rel})P(t) \quad (3)$$

за таких умов:

механічних крайових

$$U(0, t) = \frac{\varepsilon}{2} - U^w(t), \quad U(L, t) = -\frac{\varepsilon}{2} + U^w(t), \quad (4)$$

теплових крайових

$$\begin{aligned} K \frac{\partial T(0, t)}{\partial X} - \frac{1}{R} T(0, t) &= -f(V_{rel})V_{rel}P(t), \\ K \frac{\partial T(L, t)}{\partial X} + \frac{1}{R} T(L, t) &= f(V_{rel})V_{rel}P(t) \end{aligned} \quad (5)$$

початкових

$$T(X, 0) = 0, \quad Z(0) = Z_0, \quad \frac{d}{dt} Z(0) = 0. \quad (6)$$

Закон абразивного зносу має вигляд

$$U^w(t) = K^w \int_0^t |V_{rel}(\eta)| P(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Нормальні напруження в паралелепіпеді обчислюємо за формулою

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial U}{\partial X} - \alpha T \right]. \quad (8)$$

У формулах (1)–(8) E – модуль Юнга; ν , K^w , K , k , α , R – коефіцієнти Пуассона, зносу, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення, термічного опору тепловіддачі від прямокутного паралелепіпеда до рухомих тіл, відповідно: $m = M/ab$, $c = C/ab$, $P(t) = N(t)/ab = -\sigma_{xx}(0, t)$ – контактний тиск.

Побудова розв'язання задачі. Розв'язок крайової задачі (1)–(8) отримуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Для пе-

реходу в область оригіналів використовуємо теореми розкладу і добутку зображень. У результаті отримуємо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{z}(\tau) + z(\tau) = \Omega f(V(1 - \dot{z}(\tau)))p(\tau), \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad (9)$$

де безрозмірний контактний тиск $p(\tau)$ є розв'язком нелінійного інтегрального рівняння

$$p(\tau) = 1 + 2\gamma\tilde{\omega}Bi \int_0^\tau G(\tau - \eta)f(V(1 - \dot{z}(\eta)))(1 - \dot{z}(\eta))p(\eta)d\eta - \\ - 2\xi \int_0^t |1 - \dot{z}(\eta)|p(\eta)d\eta. \quad (10)$$

Безрозмірну контактну температуру $\theta(\tau) = \theta(0, \tau) = \theta(L/L_*, \tau)$ та абразивний знос $u^w(\tau)$ знаходимо за формулами

$$\theta(\tau) = \tilde{\omega} \int_0^\tau g(\tau - \eta)f(V(1 - \dot{z}(\eta)))(1 - \dot{z}(\eta))p(\eta)d\eta; \quad (11)$$

$$u^w(\tau) = \xi \int_0^\tau |1 - \dot{z}(\eta)|p(\eta)d\eta. \quad (12)$$

У (10), (11) входять вирази

$$g(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(\mu_m)}{\Delta'_m(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau), \quad G(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_m)}{\Delta'_m(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau),$$

$$\Delta'_m(\mu_m) = 0.5(2BiS_m + C_m - Bi^2(C_m - S_m)/\mu_m^2),$$

$$\Delta(\mu_m) = 2BiC_m + S_m(Bi^2 - \mu_m^2),$$

$$\Delta_2(\mu_m) = S_m - BiC_m^0, \quad \Delta_3(\mu_m) = 1 + C_m + BiS_m,$$

$$C_m = \cos(\mu_m), \quad S_m = \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m}, \quad C_m^0 = \frac{C_m - 1}{\mu_m^2},$$

де $s_m = -\mu_m^2$ – корені характеристичного рівняння $\Delta(s) = 0$. У розв'язку (9)–(12) введені такі безрозмірні величини:

$$x = \frac{X}{L_*}, \quad z = \frac{Z}{L_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad v = \frac{\dot{Z}(t)}{V}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{L_*}, \quad u = \frac{U}{L_*},$$

$$u^w = \frac{U^w}{\epsilon}, \quad p = \frac{P}{P_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{k}{L^2 \omega}, \quad Bi = \frac{R_0}{R},$$

$$R_0 = \frac{L}{K}, \quad \Omega = \frac{2P_0}{m\omega V}, \quad \gamma = \tilde{E}\tilde{\alpha}\tilde{\omega}VR_0, \quad \xi = K^w \tilde{E} \frac{V}{L\omega}$$

і характерні параметри

$$t_* = \frac{1}{\omega}, \quad L_* = \frac{V}{\omega}, \quad T_* = P_0 R_0 V, \quad P_0 = \tilde{E} \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Числові результати. Співвідношення (9)–(12) є системою нелінійних інтегрального і диференціального рівнянь. Розв'язок шукаємо методом Рунге-Кутта та ітерацій із використанням квадратурної формули трапецій.

Числовий аналіз виконаний для сталевого шару ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K = 21 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0.3$, $E = 19 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) при $Bi = 4.76$, $\Omega = 12.8$, $\tilde{\omega} = 0.26 \cdot 10^{-2}$ для різних значень коефіцієнта зносу. Штрихові криві відповідають випадкові знехтування значення теплового розширення $\gamma = 0$, $\xi = 0.017$, суцільні криві – $\gamma = 10$. Фазова картина руху плити (швидкість тіла у кожному його положенні) показана на рис. 3. Поведінка у часі безрозмірної величини зносу u^w , контактного тиску p та контактної температури θ відображена відповідно на рис. 4–6. Крива 1 відповідає випадкові $\xi = 0$, крива 2 – $\xi = 0.017$, крива 3 – $\xi = 0.17$.

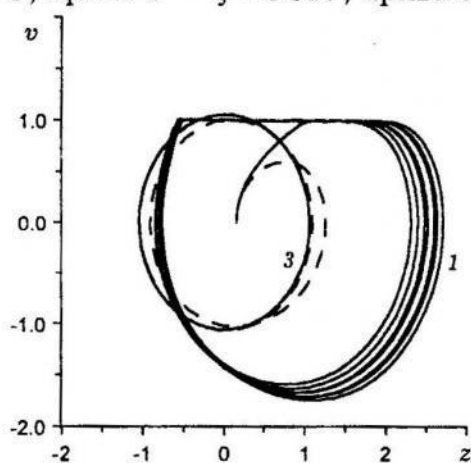


Рис. 3.

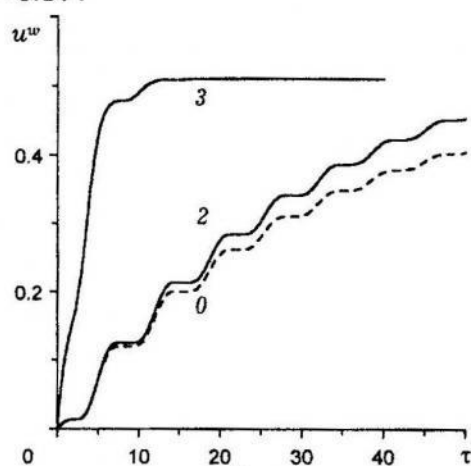


Рис. 4.

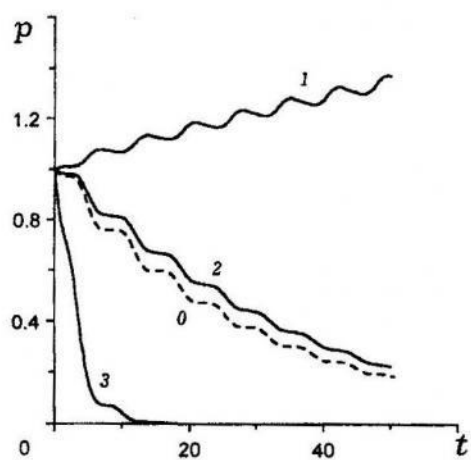


Рис. 5.

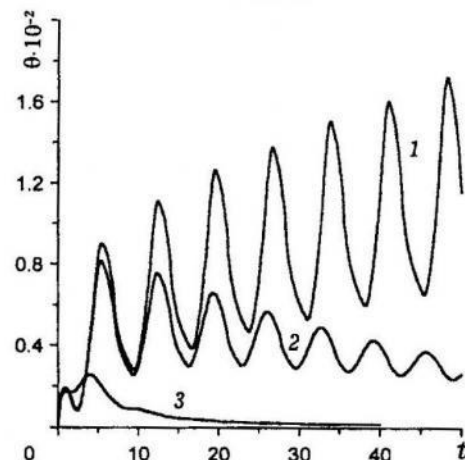


Рис. 6.

Отже, числові результати засвідчили, що коефіцієнт зносу суттєво впливає на характер поведінки характеристик контакту. Якщо зносу нема, то рух тіла має весь час характер типу зчеплення-ковзання (крива 1 на рис. 3), а контактна температура та тиск зростають маючи коливний характер (криві 1 на рис. 5, 6). Врахування зношування призводить до зниження в часі контактної температури і тиску та амплітуди їхніх коливань. У разі збільшення коефіцієнта зносу рух тіла типу зчеплення-ковзання спостерігається для малих часів, знос збільшується.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

1. Пир'єв Ю., Олесьяк З. Фрикційне теплоутворення при русі пружного тіла типу «зчеплення-ковзання» // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Вип. 55. – С. 123–126.
2. Пыр'єв Ю. А. Динамическая модель термоупругого контакта в условиях фрикционного нагрева и ограниченности теплового расширения // Трение и износ. – 1994. – Т. 15, № 6. – С. 941–948.
3. Olesiak Z. S., Pyryev, Y. On dynamical thermoelastic contact of two solids with heat of friction generation and wear // Third International Congress on Thermal Stresses. June 13-17, 1999. – Cracow, – 1999. – P. 599–602.
4. Grudziński K., Wedman S. Symulacyjne badania ruchu stick-slip przy kinematycznych wymuszeniach zewnętrznych // Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Sileskiej. XXXVII Sympozjon Modelowanie w mechanice. – 1998, – N. 6–7. – P. 135–142.

GENERATION OF FRICTIONAL HEAT IN A STICK-SLIP MOTION OF ELASTIC SOLIDS

Yuriy Pyryev

Ivan Franko National University of L'viv

The one-dimensional thermoelastic frictional contact problem for a plate is considered. The massive plate is kept in a vertical position by a spring and can oscillate in this direction along half-spaces, which are moving with a constant speed. The thermal heat generation takes place on contact surfaces of half-spaces. It is considered, that the coefficient of friction depends on a relative speed. The algorithm of a solution is offered. The contact characteristics are investigated.

Стаття надійшла до редколегії 17.11.1999

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЗРІЗАНОГО КРУГОВОГО ПОРОЖНИСТОГО КОНУСА

Геннадій Попов, Наталія Вайсфельд

Одеський державний університет ім. І. І. Мечникова

Побудований розв'язок динамічної нестационарної вісесиметричної задачі про пружний стан порожнистого конуса, що зрізаний двома сферичними поверхнями (торці конуса). Конус навантажений по торцях нестационарним нормальним стискувальним навантаженням, на бічних конічних поверхнях конуса виконані умови проковзування. Метод розв'язування задачі ґрунтується на застосуванні нового інтегрального перетворення, виведення якого наведено у [2].

Пружний (модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона μ) круговий порожнистий конус: $a_1 < r < a_2$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$, $-\pi < \varphi < \pi$, що зрізаний двома сферичними поверхнями $r = a_1$ і $r = a_2$, піддається впливу по поверхні $r = a_2$ нормального ударного стискувального навантаження $f(\theta)H(t)$, інший торець конуса ($r = a_1$) вважають незавантаженим. На бічних конічних поверхнях $\theta = \omega_0$ і $\theta = \omega_1$ виконуються умови проковзування. Введемо такі позначення:

$$u_r(r, \theta, t) \equiv u, \quad u_\theta(r, \theta, t) \equiv v, \quad u_\varphi(r, \theta, t) \equiv w,$$

$$\sigma_r(r, \theta, t) \equiv \sigma, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta, t) \equiv \tau_\theta, \quad \tau_{r\varphi}(r, \theta, t) \equiv \tau_\varphi.$$

Тоді у просторі трансформант Лапласа крайові умови задачі запишемо так:

$$\sigma_p(a_1, \theta) = 0, \quad \sigma_p(a_2, \theta) = -f_p(\theta)p^{-1}, \quad \tau_{\theta p}(a_i, \theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$v_p(r, \omega_0) = 0, \quad v_p(r, \omega_1) = 0, \quad \tau_{\theta p}(r, \omega_0) = 0, \quad \tau_{\theta p}(r, \omega_1) = 0, \quad a_1 < r < a_2, \quad (2)$$

де p – параметр перетворення Лапласа.

Застосування формул зв'язку зміщень пружного ізотропного середовища з хвильовими функціями Φ_p , Ω_p [2], що задовольняють хвильове рівняння

$$r^{-2}[(r^2[\Phi'_p, \Omega'_p])' - \nabla[\Phi_p, \Omega_p] - [p^2 c_1^{-2} \Phi_p, p^2 c_2^{-2} \Omega_p]] = 0, \quad (3)$$

приводить у просторі трансформант Лапласа до співвідношень

$$u_p = \Phi'_p + r^{-1} \nabla \Omega_p(r, \theta), \quad v_p = r^{-1} \Phi_p^\bullet + r^{-1} \Omega_p^\bullet(r, \theta) + \Omega_p^{\bullet\bullet}(r, \theta),$$

$$\nabla f_p = -\sin^{-1} \theta [\sin \theta f_p^\bullet(r, \theta)]^\bullet, \quad (4)$$

тут і нижче штрих означає похідну за r , а крапка – за змінною θ . Застосовуючи закон Гука і співвідношення Коші, за трансформантами зміщень знайдемо трансформанти напружень:

$$(2\mu)^{-1}\sigma_p = \Phi_p'' + 2\mu\lambda p^2 c_1^{-2}\Phi_p - p^2 c_2^{-2}\Omega_p - p^2 c_2^{-2}r\Omega_p' + 3\Omega_p'' + r\Omega_p''', \quad (5)$$

$$(2\mu)^{-1}\tau_{\theta p} = L_p^*(r, \theta),$$

$$L_p(r, \theta) = r^{-1}\Phi_p' - r^{-2}\Phi_p + \Omega_p'' - r^{-1}\Omega_p' - r^{-2}\Omega_p - p(2c_2^2)^{-1}\Omega_p.$$

Щоб задовольнити умови (2), достатньо, відповідно до формул (4), (5), щоб

$$\Phi_p^*(r, \omega_j) = \Omega_p^*(r, \omega_j) = 0, \quad j = 0, 1. \quad (6)$$

Отже, поставлену задачу зведено до проблеми розшукування хвильових потенціалів з крайових умов (6). Щоб задовольнити ці крайові умови, використаємо інтегральне перетворення

$$g_{pk}^0(r) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta \varphi_c^0(\theta, v_k) g_p(r, \theta) d\theta, \quad g_p(r, \theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{pk}^0(r) \varphi_c^0(\theta, v_k)}{\sigma_{0,k}^c(\omega_0, \omega_1)}. \quad (7)$$

Ядром цього інтегрального перетворення є власна функція задачі Штурма – Ліувілья, розв'язана у [2], яка має вигляд

$$\varphi_c^0(\theta, v_k) = P_{v_k}^0(\cos \theta) dQ_{v_k}^0(\cos \omega_1) / d\omega_1 - Q_{v_k}^0(\cos \theta) dP_{v_k}^0(\cos \omega_0) / d\omega_0, \quad (8)$$

v_k розшукують з рівняння

$$\Delta_v^0 \equiv P_v^0(\cos \omega_1) Q_v^0(\cos \omega_0) - P_v^0(\cos \omega_0) Q_v^0(\cos \omega_1) \Big|_{v=v_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{\sigma_{0,k}^c(\omega_0, \omega_1)} = (2v_k + 1) \frac{dQ_{v_k}^0(\cos \omega_0)}{d\omega_0} \left[\frac{dQ_{v_k}^0(\cos \omega_1)}{d\omega_1} \frac{\partial}{\partial v} \Omega_{v,0}^0 \Big|_{v=v_k} \right]^{-1}, \quad (9)$$

а функція (8) задовольняє умову

$$\varphi_c^0(\omega_j, v_k) = 0, \quad j = 0, 1. \quad (10)$$

Як результат, отримаємо диференціальні рівняння

$$\left[r^2 \begin{bmatrix} \Phi_{pk}'(r) \\ \Omega_{pk}'(r) \end{bmatrix} \right]' - v_k(v_k + 1) \begin{bmatrix} \Phi_{pk}(r) \\ \Omega_{pk}(r) \end{bmatrix} - r^2 \begin{bmatrix} p^2 c_1^{-2} \Phi_{pk}(r) \\ p^2 c_2^{-2} \Omega_{pk}(r) \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Загальний розв'язок цих рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \Phi_{pk}(r) \\ \Omega_{pk}(r) \end{bmatrix} = r^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} X_1 I_{v+\frac{1}{2}}(r p c_1^{-1}) \\ X_3 I_{v+\frac{1}{2}}(r p c_2^{-1}) \end{bmatrix} + r^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} X_2 K_{v+\frac{1}{2}}(r p c_1^{-1}) \\ X_4 K_{v+\frac{1}{2}}(r p c_2^{-1}) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Невідомі сталі X_j , $j = \overline{1, 4}$ можна обчислити, виконавши крайові умови (1). Спочатку задовольнимо умови $\tau_{p\theta}(a_i, \theta) = 0$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$, $i = 1, 2$. Для цього треба, щоб

$$L_p(a_i, \theta) = 0. \quad (13)$$

До (13) застосуємо інтегральне перетворення (7) і підставимо до отриманих співвідношень (12). Це приведе до двох рівнянь відносно невідомих сталих X_j , $j = \overline{1, 4}$:

$$\sum_{j=1}^4 X_j A_v^j(p, k) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

де ${}_i A_v^1 = -3(2a_i^{5/2})^{-1} I_{v+\frac{1}{2}}(a_i p c_1^{-1}) + a_i^{-3/2} I'_{v+\frac{1}{2}}(a_i p c_1^{-1})$,

$${}_i A_v^3 = -3(4a_i^{5/2})^{-1} I_{v+\frac{1}{2}}(a_i p c_2^{-1}) + a_i^{-1/2} I''_{v+\frac{1}{2}}(a_i p c_2^{-1}) - (2c_2^2 a_i^{1/2})^{-1} I_{v+\frac{1}{2}}(a_i p c_2^{-1}).$$

У коефіцієнтах ${}_i A_v^j(p, k)$, $j = 2, 4$ замість $I_{v+\frac{1}{2}}$ потрібно брати $K_{v+\frac{1}{2}}$. Задовольняючи аналогічно умови, з (1), отримаємо ще два рівняння, в останньому з яких, у правій частині замість нуля буде трансформанта ударного стискувального навантаження. Розв'язуючи систему лінійних алгебричних рівнянь вигляду (14), отримаємо явні вирази для невідомих сталих X_j , $j = \overline{1, 4}$. Наприклад, для X_1 маємо $X_1 = I / \Lambda_{pk}$, де

$$\begin{aligned} I &= f_k \left[-\frac{3}{4} I_v(a_1 p c_1^{-1}) + (2a_1^2)^{-1} I'_v(a_1 p c_1^{-1}) \right] [a_1^{-3/2} K'_v(a_1 p c_1^{-1}) - 3(2a_1^{5/2})^{-1} \times \\ &\quad \times K_v(a_1 p c_1^{-1})] - [I_v(a_2 p c_1^{-1}) K_v(a_2 p c_1^{-1}) + I_v(a_2 p c_2^{-1}) K_v(a_1 p c_2^{-1})], \\ \Lambda_{pk} &= [-3(2a_2^{5/2})^{-1} I_v(a_2 p c_2^{-1}) + a_2^{-3/2} I'_v(a_2 p c_2^{-1})] [(3c_1 + 8a_2^2)(4c_1 a_2^{5/2})^{-1} \times \\ &\quad \times K_v(a_2 p c_2^{-1}) - a_2^{-3/2} K'_v(a_2 p c_2^{-1}) + a_2^{-1/2} K''_v(a_2 p c_2^{-1})]. \end{aligned}$$

Отже, отримано точний розв'язок задачі. Розрахунки за цими формулами непрості, тому розглянемо асимптотичний розв'язок для малих значень часу. З цією метою треба розкласти трансформанти Лапласа за оберненими степенями параметра перетворення Лапласа p (що відповідає у разі обернення перетворення малим значенням t). Використовуючи розклад модифікованих функцій Бесселя для великих значень аргумента [1] та підставляючи ці співвідношення у знайдені вирази X_j , $j = \overline{1, 4}$, отримаємо

$$X_{pk}^1 \sim \frac{B_1}{2A_1 a_1 a_2 p} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{S_i^1}{(2p)^i} + O(p^{-5}) \right\}, \quad (15)$$

$A_1 = \left(\frac{3c_1 + 8a_2^2}{4c_1a_1^4} + \frac{9c_1 + 24a_2^2}{8c_1a_1^5} \right)^{-1}$, $B_1 = \left(\frac{3 - 3a_2^3 + a_2^2}{2a_1^4} \right)^{-1}$, коефіцієнти S_i^1 визначено коефіцієнтами у розкладах модифікованих функцій Бесселя. Такого ж вигляду розклади отримані й для інших коефіцієнтів X_j , $j = 2, 4$. Знайдені розклади вигляду (15) підставимо у (12) та використаємо обернене перетворення Лапласа, використовуючи теорему про згортку для перетворення Лапласа:

$$\Phi_k(t) = r^{-1/2} \int_0^t [X_k^1(\tau)F_1(t-\tau) + X_k^2(\tau)F_2(t-\tau)]d\tau, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} X_k^1(t) &= B_1(2A_1a_1a_2)^{-1} \left\{ t^{v+\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^4 S_i^1 \Gamma^{-1} \left(i + \frac{1}{2} \right) (rc_1^{-1} - t)^{v+i-1} \right\}, \\ X_k^2(t) &= B_2(2A_2a_1a_2)^{-1} + \sum_{i=1}^4 S_i^2 \Gamma^{-1}(i)t^i, \quad F_1(t) = (2rc_1^{-1}t - t^2)^{v-\frac{1}{2}} \pi^{-1/2} \Gamma^{-1} \left(v + \frac{1}{2} \right), \\ F_2(t) &= (r^2c_1^{-2} - t^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \left[\left(v + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arcch}(tc_1r^{-1}) \right]. \end{aligned}$$

Аналогічно визначимо функцію $\Omega_k(r, t)$ та підставимо отримані вирази у співвідношення (5).

Отже, отримані формули дають змогу визначити пружний стан конуса при малих значеннях часу.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1966. — Т. 2 — 295 с.
2. Попов Г. Я. Задача о напряженном состоянии упругого конуса, ослабленного трещинами // Приклад. математика и механика. — 1999. — Т. 27, № 6. — С. 89–114.

DYNAMIC NONSTATIONARY MIXED PROBLEM FOR THE CUTTED CIRCULAR HOLLOW CONE

Gennadiy Popov, Natalia Whitefield

Mechnikova State University Odessa

The problem on stress state of the circular hollow cone cutted with two spherical surfaces and loaded on the one of the ends by nonstationary normal load is considered. The method of exact solution construction is based on the application of the new integral transformation, which is proposed in [2].

Стаття надійшла до редколегії 04.01.2000

УДК 536.2

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ МЕТОДОМ ПОЕТАПНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ****Василь Попович, Галина Гарматій***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Донедавна процеси передавання тепла досліджували на основі лінійних математичних моделей. Безумовно, повніше описують реальні процеси поширення тепла, особливо в умовах високотемпературного нагрівання, нелінійні моделі, отримані з урахуванням залежності теплофізичних характеристик матеріалу конструкції від температури. Знаходження аналітичних розв'язків таких нелінійних задач теплопровідності пов'язане зі значними математичними труднощами і тому для їхнього розв'язування застосовують переважно числові методи.

Водночас безперечну цінність становлять аналітичні чи аналітично-числові розв'язки таких задач. Вони дають змогу виконувати якісний аналіз знайдених температурних полів, а також можуть слугувати еталонами для побудови різних числових методів.

Нижче пропонуємо метод побудови аналітично-числових розв'язків нестационарних нелінійних задач теплопровідності для основних елементів конструкцій (пластина, циліндр, труба, порожниста чи суцільна сфера) за наявності конвективного теплообміну на їхніх поверхнях.

Розглянемо задачу про визначення температурного поля $t(x, \tau)$ в тілі, виготовленому з матеріалу з простою нелінійністю (коефіцієнт теплопровідності $\lambda_t(t)$ і об'ємна теплоємність $c_v(t)$ залежать від температури, а їхнє відношення – коефіцієнт температуропровідності $a = \lambda_t(t) / c_v(t)$ прийнято сталим). Нехай на поверхні тіла $x = c$ задана температура або тепловий потік, а на поверхні $x = b$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем сталої температури t_b . У початковий момент часу температура тіла стала і дорівнює t_p .

Математична модель задачі має такий вигляд [6]:

$$\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^k \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} - w_t, \quad (1)$$

$$t|_{x=c} = t_c \quad \text{або} \quad \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=c} = q, \quad (2)$$

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=b} - \alpha(t - t_b) \Big|_{x=b} = 0, \quad (3)$$

$$t|_{\tau=0} = t_p, \quad (4)$$

де $k = 0; 1; 2$ відповідає декартовій, циліндричній і сферичній системам ко-

ординат; α – коефіцієнт теплообміну з поверхні $x = b$; w_t – густина джерел тепла.

В основі запропонованої тут методики є поетапна лінеаризація крайової задачі (1)–(4), яка включає введення інтегральної змінної Кірхгофа з подальшою лінеаризацією крайової умови конвективного теплообміну за допомогою сплайн-апроксимації температури на поверхні $x = b$. Унаслідок цього отримуємо лінійну крайову задачу на змінну Кірхгофа, розв’язок якої можна знайти за допомогою відомих класичних методів [1–3,7]. Після конкретизації залежності $\lambda_t(t)$ невідомі коефіцієнти сплайн-апроксимації визначаємо з системи рівнянь, яку отримуємо з умови рівності значень сплайну у вузлах апроксимації відповідним значенням температури тіла на поверхні $x = b$.

Якщо $\lambda_t(t)$ і $c_v(t)$ зобразити у вигляді $\lambda_t(t) = \lambda_{t0} \bar{\lambda}_t(T)$, $c_v(t) = c_{v0} \bar{c}_v(T)$, де λ_{t0} , c_{v0} – так звані опорні коефіцієнти, які мають відповідну розмірність, а $\bar{\lambda}_t(T)$, $\bar{c}_v(T)$ – функції безрозмірної температури $T = t/t_0$, де t_0 – деяка характерна для цього процесу температура; а також переписати задачу (1)–(4) у безрозмірних величинах $\bar{x} = x/l$, $Fo = \alpha t/l^2$, $Bi = \alpha l/\lambda_{t0}$, де l – деякий характерний розмір тіла та застосувати до неї інтегральне перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^T \bar{\lambda}_t(T) dT, \quad (5)$$

то з нелінійного рівняння теплопровідності (1) отримаємо таке лінійне рівняння на змінну Кірхгофа:

$$\frac{1}{\bar{x}^k} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{x}^k \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial Fo} - W_t, \quad (6)$$

де $W_t = \frac{w_t l^2}{t_0 \lambda_{t0}}$.

Крайові умови (2) та початкова умова (4) трансформуються у такі лінійні умови на змінну θ :

$$\theta|_{\bar{x}=\bar{c}} = \theta_1 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{c}} = Q, \quad \theta|_{Fo=0} = 0, \quad (7)$$

де $\theta_1 = \int_{T_p}^{T_c} \bar{\lambda}_t(T) dT$, $T_p = \frac{t_p}{t_0}$, $T_c = \frac{t_c}{t_0}$, $Q = \frac{l q}{\lambda_{t0}}$.

Крайова умова конвективного теплообміну на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ лінеаризується частково і набуває вигляду

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{b}} - \text{Bi} [T(\theta)|_{\bar{x}=\bar{b}} - T_b] = 0, \quad (8)$$

де $T(\theta)$ – залежність температури від змінної Кірхгофа, знайдена для конкретного коефіцієнта теплопровідності зі співвідношення (5); $T_b = t_b / t_0$.

Наприклад, у випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури $\lambda_t(t) = \lambda_{t0}(1 - kT)$ ця залежність має вигляд

$$T(\theta) = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - 2k(\theta + T_p - \frac{k}{2} T_p^2)} \right). \quad (9)$$

Отже, введення змінної Кірхгофа дало змогу повністю лінеаризувати рівняння теплопровідності, задану нелінійну умову другого роду на поверхні $\bar{x} = \bar{c}$ і лише частково умову конвективного теплообміну на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$.

У працях [4, 5] нелінійний вираз $T(\theta)$ в умові конвективного теплообміну (8) замінено змінною Кірхгофа θ . Така лінеаризація крайової умови (8) може призвести не тільки до числових, а й фізично неправильних результатів [6].

Тут же пропонуємо лінеаризувати крайову умову (8) шляхом зображення $T(\theta)|_{\bar{x}=\bar{b}}$ за допомогою спеціально побудованих сплайнів нульового або першого порядку.

Оскільки для задачі (6)–(8) температурне поле в тілі описує функція координати і часу $T(\bar{x}, \text{Fo})$, то шукана температура на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ є функцією лише змінної $\text{Fo} : T(\bar{b}, \text{Fo})$. Виберемо з області неперервної зміни аргументу Fo шуканої функції на границі $\bar{x} = \bar{b}$ деяку кінцеву множину точок Fo_i ($i = \overline{1, n}$), причому $0 = \text{Fo}_0 < \text{Fo}_1 < \text{Fo}_2 < \dots < \text{Fo}_n$, яка розділить область зміни часу на $n+1$ проміжок. Позначимо таке розбиття через Δ і побудуємо на ньому сплайн нульового порядку $S_{\Delta}^0(T, \text{Fo})$, значення якого в моменти часу Fo_i збігаються зі значеннями функції $T(\bar{b}, \text{Fo})$, а на кожному з проміжків інтерполює її сталою величиною. Використовуючи одиничну функцію $S_+(\text{Fo} - \text{Fo}_i) = \begin{cases} 1, & \text{Fo} > \text{Fo}_i \\ 0, & \text{Fo} \leq \text{Fo}_i \end{cases}$, цей сплайн запишемо у вигляді

$$S_{\Delta}^0(T, \text{Fo}) = T_1 S_+(\text{Fo}) + \sum_{i=1}^{n-1} [T_{i+1} - T_i] S_+(\text{Fo} - \text{Fo}_i), \quad (10)$$

де T_i – значення шуканої температури на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ у момент часу Fo_i .

Після зображення температури на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ сплайном (10) крайова умова (8) повністю лінеаризується і набуває вигляду

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{b}} - \text{Bi} [S_{\Delta}^0(T, \text{Fo}) - T_b] = 0. \quad (11)$$

Аналогічно, на наведеному вище розбитті Δ можна побудувати сплайн першого порядку $S_{\Delta}^1(T, \text{Fo})$, який збігається з функцією $T(\bar{b}, \text{Fo})$ в точках Fo_i , а на кожному з проміжків розбиття наближає $T(\bar{b}, \text{Fo})$ багаточленом першого степеня $P_i(\text{Fo}) = a_{i,0} + a_{i,1} \text{Fo}$. Такий сплайн можна записати за допомогою одиничної функції у такому вигляді:

$$S_{\Delta}^1(T, \text{Fo}) = P_1(\text{Fo})S_+(\text{Fo}) + \sum_{i=1}^{n-1} [P_{i+1}(\text{Fo}) - P_i(\text{Fo})] S_+(\text{Fo} - \text{Fo}_i), \quad (12)$$

де коефіцієнти $a_{i,0}$, $a_{i,1}$ багаточленів $P_i(\text{Fo})$ виражені формулами

$$a_{i,1} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\text{Fo}_i - \text{Fo}_{i-1}}, \quad a_{i,0} = T_{i-1} - a_{i,1} \text{Fo}_{i-1}.$$

Після зображення $T(\bar{b}, \text{Fo})$ сплайном $S_{\Delta}^1(T, \text{Fo})$ гранична умова (8) повністю лінеаризується і набуває вигляду

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{b}} - \text{Bi} [S_{\Delta}^1(T, \text{Fo}) - T_b] = 0. \quad (13)$$

Унаслідок розв'язування лінеаризованої задачі (6), (7), (11) або (6), (7), (13) отримаємо змінну Кірхгофа як функцію координати $\bar{x}$, часу Fo , моментів часу Fo_i і невідомих значень T_i , тобто

$$\theta = \theta(\bar{x}, \text{Fo}, \text{Fo}_i, T_i) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (14)$$

Підставивши θ у вираз $T(\theta)$ (наприклад, (9)), визначимо остаточну формулу для обчислення температури в будь-якій точці $\bar{x}$ цього тіла в довільний момент часу Fo :

$$T = T(\bar{x}, \text{Fo}, \text{Fo}_i, T_i) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (15)$$

Приймаючи в (15) по черзі $\text{Fo} = \text{Fo}_i$ ($i = \overline{1, n}$) і враховуючи умову збіжності значень побудованих вище сплайнів зі значеннями температури на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$ в моменти часу Fo_i , отримуємо таку систему рівнянь для знаходження невідомих T_i :

$$\begin{cases} T_1 = f(\bar{b}, \text{Fo}_1, T_1), \\ T_2 = f(\bar{b}, \text{Fo}_1, \text{Fo}_2, T_1, T_2), \\ \vdots \\ T_n = f(\bar{b}, \text{Fo}_1, \text{Fo}_2, \dots, \text{Fo}_n, T_1, T_2, \dots, T_n). \end{cases} \quad (16)$$

Завдяки специфіці побудованих вище сплайнів $S_{\Delta}^0(T, \text{Fo})$, $S_{\Delta}^1(T, \text{Fo})$ перше рівняння системи містить одну невідому T_1 , друге – дві невідомі T_1 ,

T_2 і т.д. Розв'язавши перше рівняння, знайдемо значення T_1 . Підставивши T_1 в друге рівняння, обчислимо значення T_2 . Так послідовно визначимо з відповідних нелінійних рівнянь (16) усі невідомі T_i . Остаточний розв'язок задачі (1)–(4) отримаємо після підстановки значень T_i у формулу (15). Зауважимо, що у випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури розв'язок системи рівнянь (15) відшукують в аналітичному вигляді.

Розумно моменти часу Fo_i можна вибрати, виходячи з апріорного оцінювання поведінки шуканої температури на поверхні $\bar{x} = \bar{b}$. Близький до оптимального вибір значень Fo_i можна виконати, якщо скористатися відомими розв'язками відповідних крайових задач для аналогічних нетермочутливих тіл.

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк. 1967. – 599 с.
4. Недосека А. Я. Основы расчета сварных конструкций. – К.: Выща шк., 1988. – 263 с.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
6. Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні. – Львів, 1993. – 66 с. – (Препринт / АН України, Ін-т прик. проблем мех.).
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во. иностр. лит. 1955 – 668 с.

SOLUTION OF THE NONLINEAR HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE BODIES BY THE STAGE-BY-STAGE LINEARIZATION METHOD

Vasyl Popovych, Galyna Harmatij

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

The method to construct the solutions of nonstationary heat conduction problems for bodies (with dependent on the temperature characteristics) under convective heat exchange on their surfaces is proposed. The stage-by-stage linearization by introducing the Kirchhoff integral variable with subsequent linearization of boundary condition of convective heat exchange with the help of spline approximations makes the basis of the method.

Стаття надійшла до редколегії 13.12.1999

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БІЛЯ ГОСТРОЇ ВЕРШИНИ ЖОРСТКО ПІДКРІПЛЕНОГО М'ЯКОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Василь Пороховський*, Ярослав Кунець*, Віктор Міщенко*,
Ірина Желавська**

* Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

** Хмельницький політехнічний коледж

Як відомо, розподіл напружень поблизу гострої вершини пружного включення, що має форму кута нульового розхилу та перебуває в матриці в умовах ідеального контакту, такий же, як і в разі відсутності неоднорідності [2, 4]. Водночас у випадку прямування відношень модулів Юнга включення та матриці до нуля або безмежності характер розв'язку задачі різко змінюється: з'являється коренева особливість у напруженнях. Ми на прикладі задачі антиплаского зсуву вивчали подібне явище у випадку, коли тонке пружне включення жорстко закріплене з одного боку.

Нехай в однорідному пружному середовищі з модулем зсуву μ перебуває тонкостінне пружне включення з модулем зсуву μ_0 , що займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2): -a \leq x_1 \leq a, -\varepsilon f(x_1) \leq x_2 \leq \varepsilon f(x_1) = h(x_1)/2\}$, обмежену ∂W_ε . Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; $h(x_1)$ – товщина включення, a – довжина включення; $f(x_1)$ – достатньо гладка додатно визначена функція; ε – малий безрозмірний параметр.

За умов антипласкої динамічної стаціонарної задачі відмінна від нуля компонента вектора зміщень задовольняє у відповідних областях рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u^s(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\varepsilon, \quad (\Delta + k_0^2)u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \quad (1)$$

і такі умови спряження на межі ∂W_ε :

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n^0} = \gamma \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial n^0}, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon \setminus W_1, \quad \gamma = \mu_0 / \mu,$$

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_1, \quad W_1 = \{|x_1| \leq a, x_2 = -\varepsilon f(x_1)\},$$

$$u(\mathbf{x}) = u^s(\mathbf{x}) + u^*(\mathbf{x}). \quad (2)$$

У співвідношеннях (1), (2) $u^s(\mathbf{x})$ – розсіяне неоднорідністю поле, що задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда, $u^0(\mathbf{x})$ – зміщення у включенні; $u^*(\mathbf{x})$ – відомі зміщення в середовищі у разі відсутності неоднорідності; k та k_0 – хвильові числа в матриці та у включенні, відповідно; n^0 – зовнішня нормаль до ∂W_ε . В умовах спряження (2) враховано, що нижня межа включення з'єднана з матрицею через нерухомий абсолютно жорсткий прошарок нульової товщини.

Нехай $\mathbf{t} = (\tau_1, \tau_2)$ – локальна система координат з початком в одній із точок $(x_1 = \pm a, x_2 = 0)$, уведена так, що осі τ_1 та τ_2 відповідно напрямлені по дотичній та граничній нормалі до серединної лінії включення. Надалі припускаємо, що включення гострокінцеве. Тоді в системі координат $\mathbf{t}$ асимпто-

тика функції $f(x_1)$ при $x_1 \rightarrow \pm a$ має вигляд

$$f(\tau_1) = f_0 |\tau_1|^\delta + \dots, \quad \tau_1 \rightarrow 0, \quad f_0 = \text{const} \neq 0, \quad \delta > 1. \quad (3)$$

У праці [7] зазначено, що при $\gamma \ll 1$ умови спряження (2) можна замінити спрощеними умовами контакту матриці та включення, заданими на серединній лінії неоднорідності:

$$\begin{aligned} \gamma_1 [u^s(x_1, +0) + u^*(x_1, 0)] &= f(x_1) \left[\frac{\partial u^s(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{\partial u^*(x_1, 0)}{\partial x_2} \right], \quad \gamma_1 = \gamma / \varepsilon, \\ u^s(x_1, -0) + u^*(x_1, 0) &= 0, \quad |x_1| < a; \\ u^0(\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2x_2}{h(x_1)} \right] [u^s(x_1, +0) + u^*(x_1, 0)], \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Коли $f(x_1)$ функція має асимптотику (3), співвідношення (4) асимптотично точно описують напружено-деформований стан у всьому композиті [2, 7].

У випадку, коли $\gamma_1 \neq 0$, розв'язок задачі $u^s(\mathbf{x})$ має асимптотику [3, 7] (r, ϕ – полярні координати)

$$u^s(r, \phi) = a_0 + a_1 \sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2} + O(r), \quad r \rightarrow 0, \quad \tau_1 = r \cos \phi, \quad \tau_2 = r \sin \phi, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi. \quad (5)$$

Водночас при $\gamma_1 = 0$ для $u^s(\mathbf{x})$ матимемо [1, 3]

$$\begin{aligned} u^s(r, \phi) &= b_0 + b_1 r^{v_1} (\cos v_1 \phi + \sin v_1 \phi) + b_2 r^{v_2} (\cos v_2 \phi - \sin v_2 \phi) + O(r), \quad r \rightarrow 0, \\ v_1 &= 1/4, \quad v_2 = 3/4. \end{aligned} \quad (6)$$

За допомогою методу зрощування асимптотичних розкладів обґрунтуємо різку зміну поведінки напружено-деформованого стану композита при $\gamma_1 \rightarrow 0$, а, отже, з'ясуємо зв'язок між коефіцієнтами a_i ($i = 0, 1$) та b_i ($i = 0, 1, 2$) в розкладах (5) та (6).

Запишемо розв'язок задачі (1), (4) у вигляді асимптотичного розкладу за малим параметром γ_1 :

$$u^s(\mathbf{x}) = u_0^s(\mathbf{x}) + \gamma_1 u_1^s(\mathbf{x}) + \dots, \quad \gamma_1 \rightarrow 0. \quad (7)$$

Підставляючи розклад (7) у співвідношення (1), (4) та прирівнюючи вирази при однакових степенях γ_1 , отримаємо рівняння та крайові умови для визначення членів розкладу $u_i^s(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) u_i^s(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial u_0^s(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{\partial u^i(x_1, 0)}{\partial x_2} &= 0, \quad u_0^s(x_1, -0) + u^i(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| < a, \\ \frac{\partial u_1^s(x_1, +0)}{\partial x_2} &= f^{-1}(x_1) [u_0^s(x_1, +0) + u^i(x_1, 0)], \quad u_1^s(x_1, -0) = 0, \quad |x_1| < a. \end{aligned} \quad (8)$$

Дослідження задач (8) поблизу кінців включення ґрунтується на так званій процедурі розщеплення, запропонованій та обґрунтованій для іншої ситуації в працях [4, 6]. Тому, використовуючи згадану процедуру, для функцій $u_i^s(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2$) при $x_1 \rightarrow \pm a$ маємо асимптотику

$$u_0^s(r, \phi) = a_0^0 + a_1^0 r^{v_1} (\cos v_1 \phi + \sin v_1 \phi) + b_1^0 r^{v_2} (\cos v_2 \phi - \sin v_2 \phi) + O(r), \quad r \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned}
u_1^s(r, \phi) &= Ca_0^1 + a_1^1 r^{v_{11}} \sin[v_{11}(\phi + \pi)] + b_1^1 r^{v_{12}} \sin[v_{12}(\phi + \pi)] + O(r), \quad r \rightarrow 0, \\
v_{11} &= v_1 + 1 - \delta, \quad v_{12} = v_2 + 1 - \delta, \quad a_0^0 = -a_0^*, \quad a_1^1 = -\sqrt{2}a_1^0 (f_0 \cos 2\pi v_{11})^{-1}, \\
b_1^1 &= \sqrt{2}b_1^0 (f_0 \cos 2\pi v_{12})^{-1}, \quad C = 1 \text{ при } v_{12} \geq 0, \quad C = 0 \text{ при } v_{12} < 0.
\end{aligned} \quad (9)$$

Тут коефіцієнти a_1^0, b_1^0 визначені в процесі розв'язування задачі (8); a_0^*, a_1^*, b_1^* – відомі коефіцієнти розкладу функції $u^*(x)$ при $x_1 \rightarrow \pm a$:

$$u^*(r, \phi) = a_0^* + a_1^* r \cos \phi + b_1^* r \sin \phi + \dots, \quad r \rightarrow 0.$$

Зазначимо, що розклади (9) отримані у випадку, коли показники v_{11}, v_{12} не є власними числами спектральної задачі

$$\frac{d^2 v(\phi)}{d\phi^2} + v_{1i}^2 v(\phi) = 0, \quad \frac{dv(\phi)}{d\phi} = 0 \quad \text{при } \phi = \pi, \quad v(-\pi) = 0, \quad i = 1, 2,$$

тобто коли $v_{1i} \neq \pm 1/4 + n$, $i = 1, 2$ (n – ціле число). В іншому випадку для функції $u_1^s(x)$ маємо

$$\begin{aligned}
u_1^s(r, \phi) &= Ca_0^1 + 2v_{11}^{-1} a_1^1 r^{v_{11}} \ln(r) \cos[v_{11}(\phi + \pi)] + 2v_{12}^{-1} b_1^1 r^{v_{12}} \ln r \cos[v_{12}(\phi + \pi)] - \\
&- a_1^1 r^{v_{11}} \phi \sin[v_{11}(\phi + \pi)] - b_1^1 r^{v_{12}} \phi \sin[v_{12}(\phi + \pi)] + Ca_2^1 r^{v_{11}} (\cos v_{11} \phi + \sin v_{11} \phi) + \\
&+ C b_2^1 r^{v_{12}} (\cos v_{12} \phi + \sin v_{12} \phi) + \dots, \quad r \rightarrow 0, \\
a_1^1 &= -\sqrt{2} a_1^0 (f_0 \sin 2\pi v_{11})^{-1}, \quad b_1^1 = \sqrt{2} b_1^0 (f_0 \sin 2\pi v_{12})^{-1}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Асимптотичний розклад (7) з точністю до величин порядку γ_1 дає розв'язок розглядуваної задачі всюди, за винятком деяких околів кінців включення, умову визначення яких запишемо у вигляді

$$u_0^s(r, \phi) / u_1^s(r, \phi) = O(\gamma_1), \quad r \rightarrow 0, \quad \gamma_1 \rightarrow 0. \quad (11)$$

Зі співвідношень (9)–(11) знаходимо, що розклад (7) перестає бути асимптотичним в околі $r = O(\gamma_2)$, $\gamma_2 = \gamma_1^{1/(\delta-1)}$, тому для визначення розв'язку сформульованої задачі в цій області потрібно побудувати відповідні внутрішні асимптотичні розклади. Введемо внутрішню змінну

$$\bar{r} = r / \gamma_2 \quad (12)$$

Врахувавши асимптотику (9), (10) полів $u_0^s(x)$ і $u_1^s(x)$ при $r \rightarrow 0$ та використавши принцип зрощування [5], знаходимо, що внутрішній асимптотичний розв'язок задачі треба шукати у вигляді

$$\begin{aligned}
u^s(x) &= \omega_0(\bar{r}, \phi) + \gamma_{11} \omega_1(\bar{r}, \phi) + \gamma_{12} \omega_2(\bar{r}, \phi) + o(\gamma_{12}), \quad \bar{r} = \text{const}, \quad \gamma_1 \rightarrow 0, \\
(\bar{r}, \phi) &\in R^2, \quad \gamma_{1i} = \gamma_1^{\kappa_i}, \quad \kappa_i = v_{1i} / (\delta - 1), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \quad (13)$$

У цьому випадку члени розкладу (13) задовольняють умови

$$\begin{aligned}
\omega_0(\bar{r}, \phi) &\equiv -a_0^*, \quad \omega_1(\bar{r}, \phi) = a_1^0 \bar{r}^{v_1} (\cos v_1 \phi + \sin v_1 \phi) + o(1), \\
\omega_2(\bar{r}, \phi) &= b_1^0 \bar{r}^{v_2} (\cos v_2 \phi - \sin v_2 \phi) + o(1), \quad \bar{r} \rightarrow \infty
\end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи розклад (13) у рівняння (1) та умови спряження (4) (попередньо записавши їх у змінних $\bar{r}, \phi$) та зрівнявши значення при однакових степенях γ_1 , знайдемо

$$\Delta \omega_i(\bar{r}, \phi) = 0, \quad (\bar{r}, \phi) \in R^2, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \phi} = 0, \quad \phi = \pi, \quad \bar{r} > 0; \quad \omega_i = 0, \quad \phi = -\pi, \quad \bar{r} > 0. \quad (15)$$

Як бачимо, функції примежового шару ω_i ($i = 1, 2$) визначають як розв'язки рівняння Лапласа (15), що задовольняють на безмежності умови (14). Розв'язок таких задач існує та єдиний в енергетичних класах функцій [5]. Функції ω_i ($i = 1, 2$) при $\bar{r} \rightarrow 0$ мають асимптотику $\omega_i(\bar{r}, \phi) = c_i^0 + c_i^1 \sqrt{\bar{r}} \times \cos(\phi/2) + O(\bar{r})$, $\bar{r} \rightarrow 0$, тобто у зображенні (5) коефіцієнти a_i ($i = 0, 1$) визначені такими співвідношеннями

$$a_0 \approx -a_0^*, \quad a_1 \approx \gamma_1^{v_{21}} c_1^1 + \gamma_1^{v_{22}} c_2^1, \quad v_{2i} = (2v_1 - 2\delta + 1)/[2(\delta - 1)], \quad i = 1, 2.$$

Отже, маючи розв'язок задачі (1), (4) при $\gamma_1 = 0$ та розв'язок задачі (14), (15) (з урахуванням, що в (14) $a_1^0 = b_1$, $b_1^0 = b_2$) можна знайти напружено-деформований стан композита, коли $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_1 \ll 0$. Інші числово-аналітичні алгоритми дослідження задачі (1), (4) при $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_1 \ll 0$, як звичайно, нестійкі внаслідок наявності швидкозмінного примежового шару в околі кінців включення.

1. Гриліцький Д. В., Піддубняк О. П. Мішана задача кручення пружного тіла з щілиною // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 85–90.
2. Кіт Г. С., Ємець В. Ф., Кунець Я. І. Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41, № 1. – С. 54–61.
3. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
4. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряженно-деформированное состояние в вершине острого включения // Механика твердого тела. – 1986. – № 3. – С. 155–163.
5. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. – Л., 1983. – 117 с.
6. Назаров С. А. Асимптотика на бесконечности решения задачи Неймана с условиями сопряжения в угле // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 1. – С. 18–25.
7. Emets V. F., Kunets Ya. I. Effective boundary conditions for a thin curved layer with tips // DIPED-98. Proceedings of IV International Seminar. – Lviv, 1999. – P. 152–157.

THE STRESSED-STRAINED STATE NEAR A SHARP TIP OF RIGID REINFORCED SOFT INCLUSION

Vasyl Porochovs'ky*, Yaroslav Kunets*, Victor Mishchenko*, Iryna Zhelavs'ka**

* *Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

** *Khmelnyskiy polytechnical college*

The phenomenon of sudden change in the behaviour of stressed-strained state in the vicinity of a rigid reinforced soft inclusion, when its shear modulus tends to zero, is explained. To validate this phenomenon (the construction of corresponding boundary layers) the method of joining the asymptotic expansion is used.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.2000

УДК 539.3

ФУНКЦІЇ ПЕРЕМІЩЕНЬ ГРІНА ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПІВПРОСТОРУ

Борис Процюк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного простору, що складається з двох ідеально контактуючих півпросторів, побудовані в [5, 2].

Ми побудуємо функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору.

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z пружне кусково-однорідне тіло, складові частини якого – півпростір ($z \leq 0$) і шар ($0 \leq z \leq h$), жорстко з'єднані між собою. До тіла прикладена в напрямі, паралельному до осі r або z , одинична сила, яка зосереджена на колі радіусом ρ , що розміщене на відстані ς від межі поділу. Зовнішня поверхня шару вільна від навантажень. Для визначення переміщень $G_r^{(k)}$ і $G_z^{(k)}$, де індекс « k » вказує напрям дії сили, використовуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mu(z) \left[\nabla^2 + (\delta_{zi} - 1) r^{-2} \right] G_i^{(k)} + [\lambda(z) + \mu(z)] \varepsilon_{,i}^{(k)} + \delta_{ik} \rho^{-1} \delta(r - \rho) \delta(z - \varsigma) + \\ + \left[(\mu_2 - \mu_1) (G_{i,z}^{(k)} + G_{z,i}^{(k)}) + \delta_{zi} (\lambda_2 - \lambda_1) \varepsilon^{(k)} \right] \Big|_{z=0} \delta(z) = 0, \quad i, k = r, z, \end{aligned} \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} G_r^{(k)}, G_{r,r}^{(k)}, G_z^{(k)}, G_{z,r}^{(k)} \neq \infty \text{ при } r = 0; \quad G_r^{(k)}, G_{r,r}^{(k)}, G_z^{(k)}, G_{z,r}^{(k)} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty; \\ G_r^{(k)}, G_z^{(k)} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty; \quad \tau_{rz}^{(k)} = \tau_{zz}^{(k)} = 0 \text{ при } z = h. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут і далі фізико-механічні характеристики та їхні комбінації мають вигляд $p(z) = p_1 + (p_2 - p_1) S(z)$; λ_j, μ_j – коефіцієнти Ляме півпростору ($j = 1$) та шару ($j = 2$); $S(x)$ – функція Гевісайда; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; δ_{ik} – символ Кронекера;

$$\nabla^2 = \partial_{,rr} + r^{-1} \partial_{,r} + \partial_{,zz}, \quad \varepsilon^{(k)} = G_{r,r}^{(k)} + r^{-1} G_r^{(k)} + G_{z,z}^{(k)}.$$

Рівняння (1) отримані шляхом підстановки $\tau_{ij}^{(k)} = \mu(z) (G_{i,j}^{(k)} + G_{j,i}^{(k)}) + \lambda(z) \varepsilon_{ij}^{(k)}$, $i, j = r, z$; $\tau_{\varphi\varphi}^{(k)} = 2\mu(z) r^{-1} G_r^{(k)} + \lambda(z) \varepsilon^{(k)}$ в рівняння рівноваги в напруженнях і використання правила Лейбніца диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій

$$[\varphi(x) \psi(x)]' = \varphi(x) \psi'(x) + \varphi'(x) \psi(x) \quad (3)$$

та операції некомутативного, однак асоціативного множення

$$\varphi(x)\delta(x-a) = \varphi(a+0)\delta(x-a), \quad \delta(x-a)\varphi(x) = \varphi(a-0)\delta(x-a). \quad (4)$$

Застосуємо до задачі (1), (2) інтегральне перетворення Ханкеля. З урахуванням (4) відповідно одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{G}_r^{(k)}}{dz^2} - \frac{2(1-v(z))}{1-2v(z)} \xi^2 \bar{G}_r^{(k)} - \frac{\xi}{1-2v(z)} \frac{d\bar{G}_r^{(k)}}{dz} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \left(\frac{d\bar{G}_r^{(k)}}{dz} - \xi \bar{G}_z^{(k)} \right) \Big|_{z=0} \delta(z) = \\ = -\frac{X_{kr}}{\mu(\varsigma)} \delta(z-\varsigma), \\ \frac{d^2 \bar{G}_z^{(k)}}{dz^2} - \frac{1-2v(z)}{2(1-v(z))} \xi^2 \bar{G}_z^{(k)} + \frac{\xi}{2(1-v(z))} \frac{d\bar{G}_r^{(k)}}{dz} + \frac{1-2v_2}{2\mu_2(1-v_2)} \left[2(\mu_2 - \mu_1) \frac{d\bar{G}_z^{(k)}}{dz} + \right. \\ \left. + (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\epsilon}^{(k)} \right] \Big|_{z=-0} \delta(z) = \frac{1-2v(z)}{2\mu(z)(1-v(z))} X_{kz} \delta(z-\varsigma), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{G}_r^{(k)}, \bar{G}_z^{(k)} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \quad \bar{\tau}_{rz}^{(k)} = \bar{\tau}_{zz}^{(k)} = 0 \text{ при } z = h, \quad (6)$$

$$\text{де } \bar{G}_r^{(k)} = \int_0^\infty r G_r^{(k)} J_1(\xi r) dr, \quad \bar{G}_z^{(k)} = \int_0^\infty r G_z^{(k)} J_0(\xi r) dr;$$

$$\begin{aligned} X_{kr} = \delta_{kr} J_1(\xi \rho), \quad X_{kz} = \delta_{kz} J_0(\xi \rho); \quad \bar{\epsilon}^{(k)} = \frac{d\bar{G}_z^{(k)}}{dz} + \xi \bar{G}_r^{(k)}, \\ \bar{\tau}_{rz}^{(k)} = \mu(z) \left(\frac{d\bar{G}_r^{(k)}}{dz} - \xi \bar{G}_z^{(k)} \right), \quad \bar{\tau}_{zz}^{(k)} = \frac{2\mu(z)}{1-2v(z)} \left[(1-v(z)) \frac{d\bar{G}_z^{(k)}}{dz} + \xi v(z) \bar{G}_r^{(k)} \right]. \end{aligned}$$

Розв'язання системи рівнянь (5) з використанням правил (3), (4) зводимо до інтегрування рівняння четвертого порядку

$$\begin{aligned} l(G_r^{(k)}) \equiv \bar{G}_r^{(k)IV} - 2\xi^2 \bar{G}_r^{(k)''} + \xi^4 \bar{G}_r^{(k)} - A_0^{(k)} \delta(z) - \xi A_1^{(k)} \delta'(z) + A_2^{(k)} \delta''(z) = \\ = X_{kr} \left[\frac{1-2v(\varsigma)}{2\mu(\varsigma)(1-v(\varsigma))} \xi^2 \delta(z-\varsigma) - \frac{1}{\mu(\varsigma)} \delta''(z-\varsigma) \right] - \frac{\xi X_{kz}}{2\mu(\varsigma)(1-v(\varsigma))} \delta'(z-\varsigma) \end{aligned} \quad (7)$$

та визначення $\bar{G}_z^{(k)}$ і $\bar{G}_z^{(k)'}$ за формулами

$$\begin{aligned} \bar{G}_z^{(k)} = \frac{2(1-v(z))}{\xi^3} \left[\bar{G}_r^{(k)'''} + \frac{2v(z)-3}{2(1-v(z))} \xi^2 \bar{G}_r^{(k)'} - \xi A_1^{(k)} \delta(z) + A_2^{(k)} \delta'(z) + \right. \\ \left. + \frac{\xi X_{kz}}{2\mu(\varsigma)(1-v(\varsigma))} \delta(z-\varsigma) + \frac{X_{kr}}{\mu(\varsigma)} \delta'(z-\varsigma) \right], \\ \bar{G}_z^{(k)'} = \frac{1-2v(z)}{\xi} \bar{G}_r^{(k)''} - 2(1-v(z)) \xi \bar{G}_r^{(k)} + \frac{k_{12}}{\xi} A_2^{(k)} \delta(z) + X_{kr} \frac{1-2v(\varsigma)}{\xi \mu(\varsigma)} \delta(z-\varsigma), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{де } A_0^{(k)} = \frac{v_2 - v_1}{k_{01} k_{02}} \xi^3 \bar{G}_z^{(k)}(-0) + \left(\frac{k_{11}}{k_{01}} - \frac{k_{12}}{k_{02}} m \right) \frac{\xi^2 \bar{\tau}_{rz}^{(k)}(-0)}{2\mu_1},$$

$$A_1^{(k)} = \left(\frac{m}{k_{02}} - k_{01}^{-1} \right) \frac{\bar{\tau}_{zz}^{(k)}(-0)}{2\mu_1} + \frac{v_2 - v_1}{k_{01}k_{02}} \xi \bar{G}_r^{(k)}(-0), \quad A_2^{(k)} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(k)}(-0)}{\mu_1},$$

$$k_{0i} = 1 - v_i, \quad k_{1i} = 1 - 2v_i, \quad i = 1, 2; \quad m = \mu_1 / \mu_2.$$

Розв'язок рівняння (7), який задовольняє видозміненим з використанням (8) граничним умовам (6), відшукуємо за допомогою функції Гріна диференціального оператора, породженого диференціальним виразом $l(\Gamma)$ і граничними умовами

$$\Gamma|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad k_{02}\xi^{-2}\Gamma''' + (v_2 - 2)\Gamma' = k_{02}\xi^{-1}\Gamma'' + (v_2 - 2)\Gamma = 0 \quad \text{при } z = h. \quad (9)$$

Для побудови функції Гріна використовуємо фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $l(\Gamma) = 0$ і метод варіації сталої. Фундаментальну систему розв'язків будуюмо згідно з [1, 3].

Узявши до уваги симетричність функцій переміщень Гріна, для їхніх трансформант після низки перетворень одержимо

$$\bar{G}_{ij}^{(kl)}(z, \varsigma) = X_{kk} \bar{\bar{G}}_{ij}^{(kl)}(z, \varsigma), \quad i, k = r, z; \quad l, j = 1, 2,$$

$$\bar{\bar{G}}_{i1}^{(r1)}(z, \varsigma) = M_{01}\xi^{-1}(k_{41}q_{11}^+ - \delta_i\xi y q_{11}^-) + M_{11}(P_1^*\xi)^{-1} \{ (\gamma_{11}z\varsigma\xi^2 + \delta_i\gamma_{12}x\xi - d_{11})q_{12} + \\ + 4(2m_0^2h^2z\varsigma\xi^4 + \delta_i\gamma_{13}h^2x\xi^3 + \varphi_{11}\xi^2 + \delta_i\varphi_{12}\xi + d_{15})\exp[-\xi(2h - x)] \},$$

$$\bar{\bar{G}}_{i2}^{(r2)}(z, \varsigma) = M_{02}k_{42}\xi^{-1}q_{11}^+ + M_{31}(P_1^*\xi)^{-1} \{ \delta_i\xi y (d_0q_{11}^- + d_{31}q_{31}^-) - 2d_{31}k_{42}e^{-4\xi h} \times \\ \times \operatorname{ch} \xi y + 2m_1^{-1} [(\delta_i\varphi_{31}\xi^3 + k_{42}m_0h^2\xi^2 + \delta_i(\varphi_{32} - k_{42}^2m_0h)\xi - d_{33}) \operatorname{ch} \xi y - \\ - k_{42}m_0hy\xi^2 \operatorname{sh} \xi y] \exp(-2\xi h) + (2m_1)^{-1} (2m_0z\varsigma q_{32}^-\xi^2 - \delta_i k_{42}m_0xq_{32}^+\xi + \\ + d_{34}q_{32}^-) - 2(\varsigma - h)(z - h)q_{33}^+\xi^2 - \delta_i k_{42}(x - 2h)q_{33}^-\xi - v_2^*q_{33}^+ \},$$

$$i = r, z, \quad \delta_r = 1, \quad \delta_z = -1,$$

$$\bar{\bar{G}}_{z1}^{(r1)}(z, \varsigma) = M_{01}yq_{11}^+ + M_{11}(P_1^*\xi)^{-1} \{ (-\gamma_{11}z\varsigma\xi^2 + \gamma_{12}y\xi - \gamma_{15})q_{12} + \\ + 4(\gamma_{13}h^2y\xi^3 + \varphi_{13}\xi^2 + \gamma_{14}y\xi + \gamma_{16})\exp[-\xi(2h - x)] \},$$

$$\bar{\bar{G}}_{r1}^{(r2)}(z, \varsigma) = \bar{\bar{G}}_1^*(z, \varsigma)|_{\varsigma=-1}, \quad \bar{\bar{G}}_{z2}^{(z1)}(z, \varsigma) = \bar{\bar{G}}_1^*(\varsigma, z)|_{\varsigma=1},$$

$$\bar{\bar{G}}_1^*(z, \varsigma) = M_{21}(P_1^*\xi)^{-1} \{ (c\varphi_{21}\xi + d_{21})\exp(-\xi y) + (\varphi_{22}\xi^2 + c\varphi_{23}\xi + d_{23}) \times \\ \times \exp[-\xi(2h - x)] + (c\varphi_{24}\xi^3 - \varphi_{25}^+\xi^2 + c\varphi_{26}\xi - d_{25})\exp[-\xi(2h + y)] + \\ + (-2m_0z\varsigma\xi^2 + c\varphi_{27}^+\xi - d_{22})\exp[-\xi(4h - x)] \},$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{G}}_{z1}^{(r2)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_2^*(z, \varsigma) \Big|_{\varsigma=1}, & \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r1)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_2^*(\varsigma, z) \Big|_{\varsigma=-1}, \\
 G_2^*(z, \varsigma) &= M_{21} (P_1^* \xi)^{-1} \{ (c\varphi_{21}\xi - d_{16}) \exp(-\xi y) + (-\varphi_{22}\xi^2 + c\varphi_{29}\xi + d_{26}) \times \\
 &\quad \times \exp[-\xi(2h-x)] + (c\varphi_{24}\xi^3 - \varphi_{25}\xi^2 - c\varphi_{28}\xi - d_{27}) \times \exp[-\xi(2h+y)] + \\
 &\quad + (2m_0 z \varsigma \xi^2 - c\varphi_{27}\xi - d_{16}) \exp[-\xi(4h-x)] \}, \\
 \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r2)}(z, \varsigma) &= M_{31} (P_1^* \xi)^{-1} \{ -\xi y (d_0 q_{11}^+ + d_{31} q_{31}^+) + 2m_1^{-1} \exp(-2\xi h) \times \\
 &\quad \times [(\varphi_{31}\xi^3 + \varphi_{32}\xi) \operatorname{sh} \xi y + k_{42} (m_0 h (x-h) \xi^2 + d_{35}) \operatorname{ch} \xi y] + (2m_1)^{-1} \times \\
 &\quad \times (2m_0 z \varsigma q_{32}^+ \xi^2 + k_{42} m_0 y q_{32}^- \xi - d_{32} q_{32}^+) + 2(\varsigma-h)(z-h) q_{33}^- \xi^2 - k_{42} y q_{33}^+ \xi - d_{36} q_{33}^- \}, \\
 \bar{\bar{G}}_{r1}^{(z1)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_{z1}^{(r1)}(\varsigma, z), & \bar{\bar{G}}_{r2}^{(z2)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r2)}(\varsigma, z), & \bar{\bar{G}}_{r2}^{(z1)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_{z1}^{(r2)}(\varsigma, z), \\
 \bar{\bar{G}}_{r1}^{(z2)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_{z2}^{(r1)}(\varsigma, z), & \bar{\bar{G}}_{z1}^{(z2)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_{z2}^{(z1)}(\varsigma, z), & \bar{\bar{G}}_{r2}^{(r1)}(z, \varsigma) &= \bar{\bar{G}}_{r1}^{(r2)}(\varsigma, z). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Тут другі нижні і верхні індекси біля трансформант функцій переміщень означають, у якій області є відповідно точки спостереження і прикладання зосередженої сили;

$$\begin{aligned}
 P_1^* &= (16k_{02}^2)^{-1} [-d_0 + d_{31} \exp(-4\xi h) - m_1^{-1} (2m_0 h^2 \xi^2 + m_0 v_2^* - d_{32}) \exp(-2\xi h)], \\
 q_{11}^\pm &= \exp(-\xi y) S(y) \pm \exp(\xi y) S(-y), & q_{12} &= \exp(\xi x) + \exp[-\xi(4h-x)], \\
 q_{31}^\pm &= \exp[-\xi(4h+y)] S(-y) \pm \exp[-\xi(4h-y)] S(y), & y &= \varsigma - z, \quad x = z + \varsigma, \\
 q_{32}^\pm &= \exp(-\xi x) \pm \exp[-\xi(4h-x)], \\
 q_{33}^\pm &= d_0 \exp[-\xi(2h-x)] \pm d_{31} \exp[-\xi(2h+x)], \\
 \varphi_{11} &= d_{12} h^2 + d_{13} z \varsigma - d_{14} h x, & \varphi_{12} &= \gamma_{14} x - k_{41} d_{14} h, \\
 \varphi_{13} &= -4m k_{01} d_{17} h^2 - d_{13} z \varsigma + d_{14} h x, & 2\varphi_{21} &= z m_2^{-1} + \varsigma m_1^{-1}, \quad \varphi_{22} = (z m_2^{-1} + h m_1^{-1})(h - \varsigma), \\
 \varphi_{23} &= (2m_2)^{-1} (k_{42} z + k_{41} \varsigma) + 2d_{21} h, & \varphi_{24} &= 4m_0 h z (h - \varsigma), \\
 \varphi_{25}^\pm &= 2m_0 h [k_{41} (h - \varsigma) \pm k_{42} z], & \varphi_{26} &= m_0 z + 2d_{22} h - d_{24} \varsigma, \\
 \varphi_{27}^\pm &= m_0 (k_{41} \varsigma \pm k_{42} z), & \varphi_{28} &= 2d_{16} h - m_0 z + d_{24} \varsigma, \\
 \varphi_{29} &= 2d_{16} h - (2m_2)^{-1} (k_{41} \varsigma - k_{42} z), & \varphi_{31} &= 2m_0 h (z \varsigma - h \varphi_0), \\
 \varphi_{32} &= d_{32} (h - x + \varphi_0) + \frac{1}{2} k_{42}^2 m_0 x - m_0 v_2^* \varphi_0, & \varphi_0 &= z S(y) + \varsigma S(-y);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 \gamma_{11} &= m_0, & 2\gamma_{12} &= k_{41} \gamma_{11}, & \gamma_{13} &= k_{41} m_0^2, & 2\gamma_{14} &= k_{41} d_{13}, \\
\gamma_{15} &= 4k_{01} m d_{16}, & \gamma_{16} &= m k_{01} d_{18}, & d_0 &= (4m_1 m_2)^{-1}, \\
d_{11} &= -4d_{21} m k_{01} - d_0 k_{41}, & d_{12} &= k_{51} + k_{41} m_0 (2m_1)^{-1}, & d_{13} &= k_{52} - m_0 (2m_2)^{-1}, \\
d_{14} &= 8m k_{01} k_{02}, & d_{15} &= k_{52} v_1^* + d_{11}, & d_{16} &= k_{41} k_{12} - m k_{42} k_{11}, \\
d_{17} &= k_{41} - m k_{11}, & d_{18} &= 2m k_{11} v_2^* + 2k_{41} k_{12}, & d_{21} &= d_0 (k_{42} m_2 - k_{41} m_1), \\
d_{22} &= 2(k_{41} k_{02} - m k_{42} k_{01}), & d_{23} &= v_2^* (2m_1)^{-1} - k_{42} d_{16}, & d_{24} &= k_{41} - m k_{42}, \\
d_{25} &= m_0 k_{41} v_2^* - k_{42} d_{16}, & d_{26} &= k_{42} d_{21} - v_2^* (2m_1)^{-1}, & d_{27} &= m(v_2^* - 2k_{01}) - k_{41} k_{12}, \\
d_{31} &= m_0 d_{24}, & d_{32} &= 8m_1 d_{16} k_{02}, & 2d_{33} &= k_{42} (d_{32} - v_2^* m_0), & d_{34} &= k_{42}^2 m_0 - d_{32}, \\
2d_{35} &= d_{34} - m_0 v_2^*, & d_{36} &= v_2^* - 1, & 2m_1 &= (m + k_{41})^{-1}, \\
2m_2 &= -(1 + m k_{42})^{-1}, & m_0 &= 1 - m, \\
k_{4i} &= 3 - 4v_i, & k_{5i} &= 8m^2 k_{0i}^2, & v_i^* &= 8v_i^2 - 12v_i + 5, & M_{0i} &= (8\mu_i k_{0i})^{-1}, \quad i = 1, 2, \\
M_{11} &= (128k_{01} k_{02}^2 \mu_1)^{-1}, & M_{21} &= (32k_{02}^2 \mu_2)^{-1}, & M_{31} &= (128k_{02}^3 \mu_2)^{-1}.
\end{aligned}$$

У разі переходу в (10) до оригіналів дріб $(P_1^*)^{-1}$, припустивши, що $\mu_1 > \mu_2$, розглядаємо як суму нескінченної геометричної прогресії

$$(P_1^*)^{-1} = m^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} k_{00}^{-2n} \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k b_{nksl} h^{2l} \xi^{2l} \exp[-2\xi h(2s+k)], \quad (11)$$

де $b_{nksl} = C_n^k C_{n-k}^s C_k^l (d_0 + k_{00}^2)^{n-k-s} (-d_{31})^s m_1^{-k} (2m_0)^l (m_0 v_2^* - d_{32})^{k-l},$

$$k_{00} = 4k_{02} m, \quad C_q^p = \frac{p!}{(p-q)! q!} \quad - \text{біноміальні коефіцієнти.}$$

Виділяючи доданки, які мають особливості, для функцій переміщень Гріна отримуємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
G_{i1}^{(i1)}(r, \rho, z, \varsigma) &= M_{01} [k_{41} A_{ii}^0(y) - \delta_i y A_{ii}^1(y) - d_0^{-1} B_{ii}^{(1,0)}(-x)] + \\
&+ M_{11} m^{-2} \left\{ \sum^{(1)} a_{nksl} h^{2l} B_{ii}^{(1,2l)}(p_1^-) + \sum^{(0)} b_{nksl} h^{2l} [B_{ii}^{(1,2l)}(p_2^-) + \right. \\
&+ 4(2m_0^2 h^2 z \varsigma A_{ii}^{4+2l} + \delta_i \gamma_{13} h^2 x A_{ii}^{3+2l} + \varphi_{11} A_{ii}^{2+2l} + \delta_i \varphi_{12} A_{ii}^{1+2l} + d_{15} A_{ii}^{2l}) \Big|_{p=p_3^-} \Big\}, \\
&i = r, z,
\end{aligned}$$

$$G_{z1}^{(r1)}(r, \rho, z, \varsigma) = M_{01} [yA_{01}^1(y) - d_0^{-1}B_{01}^{(2,0)}(-x)] + M_{11}m^{-2} \left\{ \sum^{(1)} a_{nksl} h^{2l} B_{01}^{(2,2l)}(p_1^-) + \right. \\ \left. + \sum^{(0)} b_{nksl} h^{2l} \left[B_{01}^{(2,2l)}(p_2^-) + 4(\gamma_{13} h^2 y A_{01}^{3+2l} + \varphi_{13} A_{01}^{2+2l} + \gamma_{14} y A_{01}^{1+2l} + \gamma_{16} A_{01}^{2l}) \right]_{p=p_3^-} \right\},$$

$$G_{r1}^{(r2)}(r, \rho, z, \varsigma) = G_1^*(r, \rho, z, \varsigma) \Big|_{c=-1}, \quad G_{z2}^{(z1)}(r, \rho, z, \varsigma) = G_1^*(r, \rho, \varsigma, z) \Big|_{c=1},$$

$$G_1^*(r, \rho, z, \varsigma) = -(2\mu_2 d_0)^{-1} [c\varphi_{21} H^1(c) + d_{21} H^0(c)]_{p=y} + \\ + M_{21} m^{-2} \left\{ \sum^{(1)} a_{nksl} h^{2l} (c\varphi_{21} H^{1+2l}(c) + d_{21} H^{2l}(c)) \Big|_{p=p_4^+} + \right. \\ + \sum^{(0)} b_{nksl} h^{2l} \left[(\varphi_{22} H^{2+2l}(c) + c\varphi_{23} H^{1+2l}(c) + d_{23} H^{2l}(c)) \Big|_{p=p_3^-} + \right. \\ + (c\varphi_{24} H^{3+2l}(c) - \varphi_{25}^+ H^{2+2l}(c) + c\varphi_{26} H^{1+2l}(c) - d_{25} H^{2l}(c)) \Big|_{p=p_5^+} + \\ \left. + (-2m_0 z \varsigma H^{2+2l}(c) + c\varphi_{27}^+ H^{1+2l}(c) - d_{22} H^{2l}(c)) \Big|_{p=p_2^-} \right] \Big\},$$

$$G_{z1}^{(r2)}(r, \rho, z, \varsigma) = G_2^*(r, \rho, z, \varsigma) \Big|_{c=1}, \quad G_{z2}^{(r1)}(r, \rho, z, \varsigma) = G_2^*(r, \rho, \varsigma, z) \Big|_{c=-1},$$

$$G_2^*(r, \rho, z, \varsigma) = -(2\mu_2 d_0)^{-1} (c\varphi_{21} A_{01}^1 - d_{16} A_{01}^0) \Big|_{p=y} + \\ + M_{21} m^{-2} \left\{ \sum^{(1)} a_{nksl} h^{2l} (c\varphi_{21} A_{01}^{1+2l} - d_{16} A_{01}^{2l}) \Big|_{p=p_4^+} + \right. \\ + \sum^{(0)} b_{nksl} h^{2l} \left[(-\varphi_{22} A_{01}^{2+2l} + c\varphi_{29} A_{01}^{1+2l} + d_{26} A_{01}^{2l}) \Big|_{p=p_3^-} + \right. \\ + (c\varphi_{24} A_{01}^{3+2l} - \varphi_{25}^- A_{01}^{2+2l} - c\varphi_{28} A_{01}^{1+2l} - d_{27} A_{01}^{2l}) \Big|_{p=p_5^+} + \\ \left. + (2m_0 z \varsigma A_{01}^{2+2l} - c\varphi_{27}^- A_{01}^{1+2l} - d_{16} A_{01}^{2l}) \Big|_{p=p_2^-} \right] \Big\},$$

$$G_{i2}^{(i2)}(r, \rho, z, \varsigma) = M_{02} [k_{42} A_{ii}^0(y) - \delta_i y A_{ii}^1(y) - 2m_2 B_{ii}^{(3,0)}(x) + B_{ii}^{(4,0)}(2h - x)] + \\ + M_{31} m^{-2} \left(\sum^{(1)} a_{nksl} h^{2l} \{ \delta_i y d_0 [A_{ii}^{1+2l}(p_4^+) S(y) - A_{ii}^{1+2l}(p_4^-) S(-y)] + \right. \\ + (2m_1)^{-1} B_{ii}^{(3,2l)}(p_1^+) - d_0 B_{ii}^{(4,2l)}(p_3^-) \} + \\ + \sum^{(0)} b_{nksl} h^{2l} \{ \delta_i y d_{31} [A_{ii}^{1+2l}(p_6^+) S(-y) - A_{ii}^{1+2l}(p_6^-) S(y)] - \\ - k_{42} d_{31} [A_{ii}^{2l}(p_6^+) + A_{ii}^{2l}(p_6^-)] + m_1^{-1} [\delta_i \varphi_{31} A_{ii}^{3+2l} - k_{42} m_0 h (y - h) A_{ii}^{2+2l} +$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_i (\varphi_{32} - k_{42}^2 m_0 h) A_{ii}^{1+2l} - d_{33} A_{ii}^{2l} \Big|_{p=p_5^-} + m_1^{-1} [\delta_i \varphi_{31} A_{ii}^{3+2l} + \\
& + k_{42} m_0 h (y + h) A_{ii}^{2+2l} + \delta_i (\varphi_{32} - k_{42}^2 m_0 h) A_{ii}^{1+2l} - d_{33} A_{ii}^{2l} \Big|_{p=p_5^+} - \\
& - (2m_1)^{-1} (2m_0 z \zeta A_{ii}^{2+2l} + \delta_i k_{42} m_0 x A_{ii}^{1+2l} + d_{34} A_{ii}^{2l}) \Big|_{p=p_2^-} - \\
& - d_{31} [2(\zeta - h)(z - h) A_{ii}^{2+2l} - \delta_i k_{42} (x - 2h) A_{ii}^{1+2l} + v_2^* A_{ii}^{2l} \Big|_{p=p_3^+} \Big] \Big\}, \quad i = r, z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{z2}^{(r2)}(r, \rho, z, \zeta) = & M_{02} [y A_{01}^1(y) - 2m_2 B_{01}^{(5,0)}(x) - B_{ii}^{(6,0)}(2h - x)] - \\
& - M_{31} m^{-2} \left(\sum^{(1)} a_{nksl} h^{2l} \{ y d_0 [A_{01}^{1+2l}(p_4^+) S(y) + A_{01}^{1+2l}(p_4^-) S(-y)] - \right. \\
& - (2m_1)^{-1} B_{01}^{(5,2l)}(p_1^+) - d_0 B_{01}^{(6,2l)}(p_3^-) \} + \\
& + \sum^{(0)} b_{nksl} h^{2l} \{ y d_{31} [A_{01}^{1+2l}(p_6^+) S(-y) + A_{01}^{1+2l}(p_6^-) S(y)] - \\
& - m_1^{-1} [\varphi_{31} A_{01}^{3+2l} + k_{42} m_0 h (x - h) A_{01}^{2+2l} + \varphi_{32} A_{01}^{1+2l} + k_{42} d_{35} A_{01}^{2l}] \Big|_{p=p_5^-} + \\
& + m_1^{-1} [\varphi_{31} A_{01}^{3+2l} - k_{42} m_0 h (x - h) A_{01}^{2+2l} + \varphi_{32} A_{01}^{1+2l} - k_{42} d_{35} A_{01}^{2l}] \Big|_{p=p_5^+} - \\
& - 2m_1^{-1} (2m_0 z \zeta A_{01}^{2+2l} - k_{42} m_0 y A_{01}^{1+2l} - d_{32} A_{01}^{2l}) \Big|_{p=p_2^-} + \\
& \left. + d_{31} [2(\zeta - h)(z - h) A_{01}^{2+2l} + k_{42} y A_{01}^{1+2l} - d_{36} A_{01}^{2l}] \Big|_{p=p_3^+} \right\}, \\
G_{r1}^{(z1)}(r, \rho, z, \zeta) = & G_{z1}^{(r1)}(\rho, r, \zeta, z), \quad G_{r2}^{(z2)}(r, \rho, z, \zeta) = G_{z2}^{(r2)}(\rho, r, \zeta, z), \\
G_{r2}^{(z1)}(r, \rho, z, \zeta) = & G_{z1}^{(r2)}(\rho, r, \zeta, z), \quad G_{r1}^{(z2)}(r, \rho, z, \zeta) = G_{z2}^{(r1)}(\rho, r, \zeta, z), \\
G_{z1}^{(z2)}(r, \rho, z, \zeta) = & G_{z2}^{(z1)}(r, \rho, \zeta, z), \quad G_{r2}^{(r1)}(r, \rho, z, \zeta) = G_{r1}^{(r2)}(\rho, r, \zeta, z). \quad (12)
\end{aligned}$$

Тут уведені такі позначення:

$$\sum^{(j)} = \sum_{n=j}^{\infty} k_{00}^{-2n} \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k, \quad a_{n000} = 0, \quad a_{nksl} = b_{nksl} \text{ при } k + s + l \neq 0,$$

$$B_{ii}^{(1,\alpha)}(p) = \gamma_{11} z \zeta A_{ii}^{2+\alpha}(p) + \delta_i \gamma_{12} x A_{ii}^{1+\alpha}(p) - d_{11} A_{ii}^{\alpha}(p),$$

$$B_{ii}^{(3,\alpha)}(p) = 2m_0 z \zeta A_{ii}^{2+\alpha}(p) - \delta_i k_{42} m_0 x A_{ii}^{1+\alpha}(p) + d_{34} A_{ii}^{\alpha}(p),$$

$$B_{ii}^{(4,\alpha)}(p) = 2(\zeta - h)(z - h) A_{ii}^{2+\alpha}(p) + \delta_i k_{42} (x - 2h) A_{ii}^{1+\alpha}(p) + v_2^* A_{ii}^{\alpha}(p), \quad i = r, z,$$

$$A_{rr}^{\alpha}(p) = A_{11}^{\alpha}(p), \quad A_{zz}^{\alpha}(p) = A_{00}^{\alpha}(p), \quad H^{\alpha}(-1) = A_{11}^{\alpha}, \quad H^{\alpha}(1) = A_{00}^{\alpha},$$

$$B_{01}^{(2,\alpha)}(p) = -\gamma_{11} z \zeta A_{01}^{2+\alpha}(p) + \gamma_{12} y A_{01}^{1+\alpha}(p) - \gamma_{15} A_{01}^{\alpha}(p),$$

$$B_{01}^{(5,\alpha)}(p) = 2m_0 z \zeta A_{01}^{2+\alpha}(p) + k_{42} m_0 y A_{01}^{1+\alpha}(p) - d_{32} A_{01}^{\alpha}(p),$$

$$B_{01}^{(6,\alpha)}(p) = 2(\zeta - h)(z - h) A_{01}^{2+\alpha}(p) - k_{42} y A_{01}^{1+\alpha}(p) - d_{36} A_{01}^{\alpha}(p),$$

$$p_1^{\pm} = p_0 \pm x, \quad p_2^{\pm} = p_0 + 4h \pm x, \quad p_3^{\pm} = p_0 + 2h \pm x, \quad p_4^{\pm} = p_0 \pm y,$$

$$p_5^{\pm} = p_0 + 2h \pm y, \quad p_6^{\pm} = p_0 + 4h \pm y, \quad p_0 = 2h(s + k).$$

Інтеграли $A_{\mu\nu}^{\alpha}(p) = \int_0^{\infty} \xi^{\alpha} e^{-p\xi} J_{\mu}(\xi r) J_{\nu}(\xi \rho) d\xi$ виражені через спеціальні

функції [4].

Зауважимо, що ряди в формулах (12) – рівномірно збіжні.

Отже, залежно від області прикладання і напрямку дії зосередженої сили наведено розв'язки чотирьох осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору, вільного від зовнішнього поверхневого навантаження. Це дає змогу розв'язувати методом граничних інтегральних рівнянь широкий клас осесиметричних просторових задач пружності та термопружності для однорідних тіл складної форми, що контактують з шаром товщиною $h > 0$, обминаючи процедуру задоволення, зокрема, умов контакту на ділянці ідеального з'єднання.

1. Процюк Б. В. О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 11. – С. 1019–1021.
2. Процюк Б. В. Функції переміщень Гріна кусково-однорідного простору // Тези доп. IV міжнар. конф. з механіки неоднорідних структур. – 1995. – С. 118.
3. Процюк Б. В. Фундаментальна система розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності. – Київ: Ін-т математики НАНУ, 1996. – Ч. 2. – С. 89–94.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
5. Hasegawa H., Lee V.-G. Mura T. Green's Functions for Axisymmetric Problems of Dissimilar Elastic Solids // Trans. of the ASME. J. of Appl. Mech. – 1992. – Vol. 59. – P. 312–320.

GREEN'S DISPLACEMENT FUNCTIONS OF ELASTICITY AXISYMMETRIC PROBLEM FOR A PIECEWISE-HOMOGENEOUS HALF-SPACE

Boris Protsiuk

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

Green's displacement functions for axisymmetric elasticity problem are constructed for half space-layer rigid fixing. The regular components are presented in terms of uniformly convergent series.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.1999

УДК 669.539

МЕХАНІКА РУЙНУВАННЯ У ПОШУКОВОМУ КОНСТРУЮВАННІ МОБІЛЬНИХ МАШИН

Тимофій Рибак, Василь Олексюк, Володимир Перчишин

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

Вагомість механіки втомного руйнування у пошуковому конструюванні, зокрема мобільних сільськогосподарських машин, полягає у виробленні критеріїв оцінки напружено-деформівного стану, а також прогнозування ресурсу роботи конструктивних структур типу базових континуальних систем у разі дії на них реальних динамічних навантажень. Критеріальна оцінка з позиції механіки крихкого руйнування на сучасному рівні конструювання є основною відправною базою і входить у комплекс вирішуваних проблем.

Практика засвідчила, що у повномасштабному пошуковому конструюванні певного ефекту можна досягти, забезпечуючи розв'язання таких аналітично-пошукових і експериментально-дослідницьких задач:

- розробка алгоритму напружено-деформівного стану конструкцій у динамічному формулюванні задачі з відповідним програмним забезпеченням і отримання на цій основі вірогідних числових значень шуканих параметрів;
- визначення реальної динаміки навантаженості розглядуваного об'єкта, шляхом проведення ґрунтовних експериментальних досліджень у натурних умовах експлуатації машин на найхарактерніших рельєфах і кліматичних зонах. Наступна процедура – статистичне опрацювання одержаного цифрового фактажу за максимальними, середньомаксимальними і середньомінімальними випадковими значеннями навантажень;
- вироблення критеріїв оцінки міцності з позиції тріщинотривкості при мало і багатоцикловому втомному руйнуванні, особливо зварних з'єднань елементів цих конструкцій;
- видача оптимізованих параметрів конструкцій, за геометрією поперечних перетинів і побудовою принципових схем з прогнозованим ресурсом роботи в цілому, на графопобудову або верстат з числовим програмним керуванням.

Теоретична частина досліджень. У процесі розробки теоретичних засад усунення «зайвих» в'язей основних несучих конструктивних структур, особливо мобільних сільськогосподарських машин, досить ефективним виявився метод, який ґрунтується на принципі мінімуму потенціальної енергії деформації [4]. Особливий ефект отримано унаслідок модифікації цього методу з урахуванням лише енергії деформації від депланації елементів відкритого профілю і розробка на цій основі комбінованого методу, що поєднує в собі варіаційний принцип Лагранжа, узагальнений принцип додаткової енергії Холінгена – Рейснера, метод скінченних елементів, теорему Кастиліано, теорему про найменшу роботу, правило Лейбніца з диференціювання підінтегральних функцій – для статичного та динамічного розрахунку.

Відповідно до цієї теорії розроблено програмне забезпечення «DEPLAN» і «DEPLAN-DYNAMIK».

Розглянутий варіаційний принцип поширюється на динамічні задачі шляхом врахування сил інерції:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i} = m_i \frac{d^2 q_i}{dt^2}, \quad (1)$$

де Π^* – додаткова потенціальна енергія, яка включає Π – повну енергію; $\partial^2/\partial t^2$ – друга похідна за часом; m_i – інерційний коефіцієнт i -го вузла; Q_i , q_i – символічне позначення невідомих зусиль і зміщень.

Експериментальні дослідження динамічних навантажень. Для визначення динамічних навантажень, що виникають у реальних умовах експлуатації машин, розроблені і виготовлені спеціальні вимірювальні пристрої [3], стандартні і натуральні зразки, а також пристрої для їхніх випробувань на універсальному обладнанні. Це дає змогу скласти програму випробувань для визначення динамічних показників у найхарактерніших умовах експлуатації. Крім того, забезпечує проведення випробувань на циклічну тріщинотривкість конструкційних матеріалів і натурних зразків виготовлених відповідно до реальної конструкції.

Трикомпонентні динамічні характеристики, наприклад, в опорах бака штанги, вентиляторної установки, насоса, редуктора визначають за схемою (рис. 1).

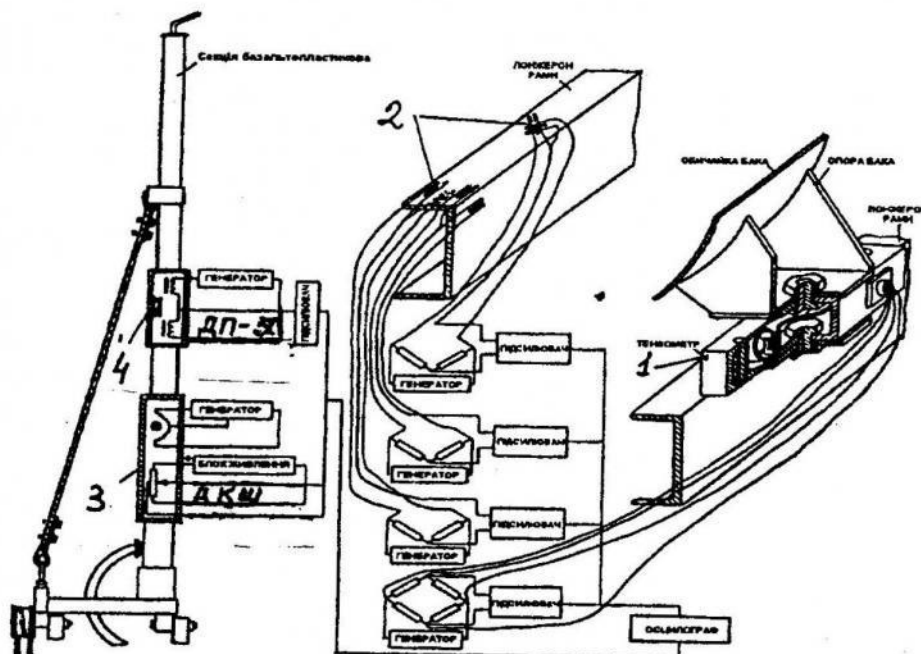


Рис. 1. Схема проведення комплексних досліджень динамічних характеристик:

- 1 – реакцій опір; 2 – нормальних і дотичних напружень; 3 – кутових швидкостей; 4 – трикомпонентних прискорень (ДП-5С).

Аналіз і статистична обробка отриманих результатів для визначення номінальних значень досліджуваних динамічних факторів, проводиться за методикою викладеною в [2].

Вироблення критеріїв оцінки напружено-деформівного стану конструкцій. Критеріальна оцінка міцності і прогнозування ресурсу роботи металлоконструкцій сільськогосподарських машин складається з теоретичної та експериментальної частин [1]. Складність вироблення критеріїв оцінки міцності та прогнозування ресурсу роботи полягає, перш за все, у різнопрофільному наборі складових елементів цих конструкцій та специфіці їхніх з'єднань між собою. Оптимізувати такі конструкції складно, оскільки нема фактичних характеристик циклічної тріщинотривкості їхнього матеріалу зі структурною зміною у навіколошовній зоні відповідно до конкретної технології виготовлення, особливо складних зварних стиків, а також геометрії поперечних перетинів тонкостінних елементів, відкритого та замкнутого профілю. Методику вироблення критеріїв оцінки міцності і прогнозування ресурсу роботи конструкцій умовно реалізують у такій послідовності.

1. Дослідження кінетики розвитку тріщин натурних елементів конструкцій, наприклад, лонжеронів рам.

2. Одержання аналітичних залежностей для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (2), у цьому випадку відкритих тонкостінних профілів [4].

3. Побудова емпіричної автомоделі подібності характеристик тріщинотривкості матеріалу профілів, наприклад, швелера і стандартних взірців Ст. 5Гпс (рис. 2).

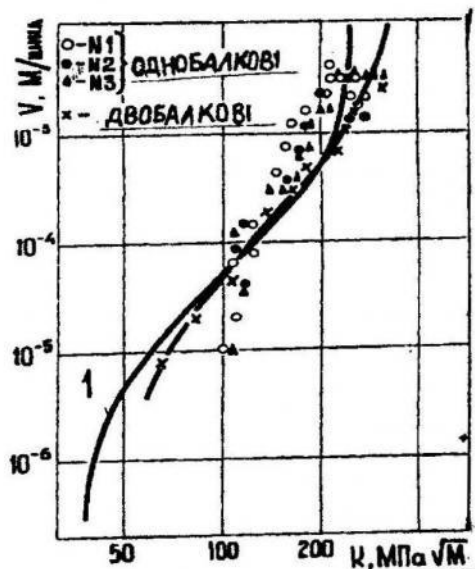


Рис. 2. Емпірична автомодель подібності:
1 – діаграма циклічної тріщинотривкості Ст. 5Гпс: № 1, № 2, № 3 – руйнування натурних однобалкових профілів (швелер №10); X – двобалкові профілі.

4. Побудова діаграми руйнування натурних профілів, наприклад, лонжеронів рам з концентраторами і гладких.

5. Визначення ресурсу роботи конструкції (рис. 3) за залежностями

$$t = \frac{N}{\omega}, \quad N = \int_{l_0}^{l^*} \Phi(l) dl, \quad (2)$$

де $\Phi(l) = [(K_{fc} - K_{th}) / (K_{i(l)} - K_{th})]^n - 1$ – характеристична функція втомного руйнування; ω – середня частота навантажень у процесі експлуатації; l^*

– критичний розмір тріщини; $K_i = M I^{-1} (H + 2b)^{3/2} \cdot F(\varepsilon)$.

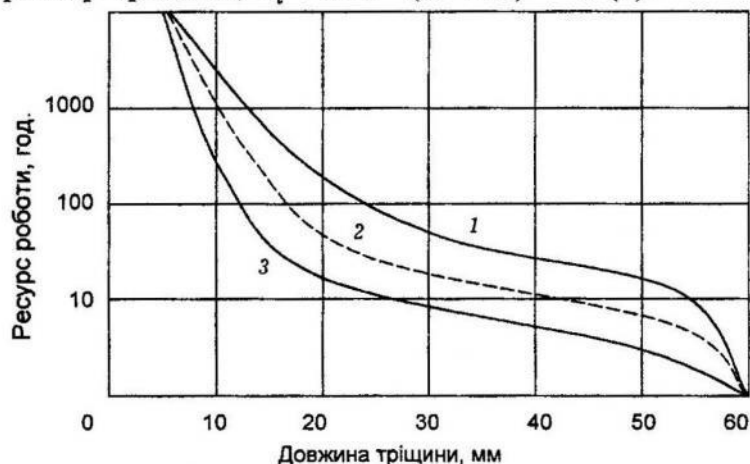


Рис. 3. Залежність ресурсу роботи конструкції від розміру початкового дефекту і частоти навантаження: 1 – $W = 2$ Гц; 2 – $W = 2,5$ Гц; 3 – $W = 8$ Гц.

Механізація виконання креслярських процедур за проблемою.

Відповідно до отриманих параметрів треба розробити машинну графіку конструювання, включаючи такі особливості: наявність взаємозв'язків між процедурами формування та читання креслень; єдиний параметричний підхід до описання геометричних об'єктів і їхніх зображень; наявність процесів алгоритмічного розв'язання основних класів геометричних та графічних задач.

1. Рибак Т. І., Дарчук О. І. Андрейків О. Є. Застосування механіки втомного руйнування до розрахунку мобільних сільськогосподарських машин // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій // Матер. II міжнар. конф. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 3, вип. 2. – С. 181–184.
2. Рибак Т. І. та інші. Випадкові величини (явища) та їх систематизація в аналітичних та експериментальних досліджень. Метод. посібн. – Тернопіль, Львів, 1998. – 52 с.
3. Рибак Т. І. та інші. Динамометр. АС № 887950. – М., 1980.
4. Рибак Т. І. Підвищення надійності машин для хімічного захисту у рослинництві. – К.: Урожай, 1986. – 104 с.

THE MECHANICS FRACTURE OF THE DESIGNING OF MOBILE MACHINES

Tymophiy Rybak, Vasyl Oleksyuk, Volodymyr Perchyshyn

Ivan Pulyuy Ternopil' State Engineering University

This article is dealing with the problem of mechanics fracture of steady constructions of mobile agricultural machines. The theoretical and practical researches are showed in the publication.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.1999

УДК 539.3

ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА З ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ЖОРСТКИХ ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Мирон Стадник, Ігор Горбачевський

Український державний лісотехнічний університет

Розглянемо безмежне ізотропне пружне тіло, що містить одне або систему абсолютно жорстких тунельних включень, ідеально зчеплених з основним матеріалом (матрицею). Початок прямокутної системи координат $Oxyz$ збігається з геометричним центром поперечного перерізу одного з включень, а вісь Oy – з його циліндричною віссю. Поперечні перерізи включення, перпендикулярні до осі Oy , мають форму еліпсів, що описуються так: $z = \pm h(x) = \pm \sqrt{a^2 - x^2}/\beta$ ($\beta = a/c \gg 1$). На нескінченності до тіла прикладені рівномірно розподілені зусилля розтягу p , що діють вздовж осі Oz і викликають в однорідному тілі тензор напружень $\hat{\sigma}^0$ і вектор переміщень $\bar{u}^0$. У тілі реалізується плоска деформація. Необхідно визначити концентрацію напружень у матриці поблизу дефектів, а також напруження у включеннях.

Випадок ізольованого включення. Введемо поняття суми $(A)_*$ і стрибка $[A]_*$ величини A на поверхнях $z = \pm h(x)$, $-\infty < y < \infty$ включення $(A)_* = A^+ + A^-$, $[A]_* = A^+ - A^-$, де $A^\pm = A|_{z=\pm h(x)}$. Поставлена задача зводиться [3] до крайової задачі теорії пружності для безмежного тіла з включенням, на поверхнях якого виконуються умови

$$[u_z^e]_* = 0; \quad [u_x^e]_* = 0, \quad (x, y) \in S, \quad (1)$$

де S – серединна область включення, для якої $-a \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$, $z = 0$; u_z^e – компонента вектора переміщення у вибраній системі координат.

Для розв'язування задачі використаємо відомий [3] підхід, за яким концентрацію напружень поблизу дефекта можна обчислювати через стрибки напружень і переміщень відповідної сингулярної задачі для тіла з математичним розрізом S , на поверхнях якого діють невідомі напруження

$$\tilde{\sigma}_{zx}^\pm = -\sigma_{zx}^{0\pm} + \sigma_{zx}^{e\pm}; \quad \tilde{\sigma}_{zz}^\pm = -\sigma_{zz}^{0\pm} + \sigma_{zz}^{e\pm}, \quad (x, y) \in S, \quad (2)$$

що спонукають переміщенню $\tilde{u}_z = u_z^e - u_z^0$. Зв'язок між ними в S є відомим [3].

Розв'язок задачі для однорідного (бездефектного) тіла при заданому навантаженні задається формулами $[u_z^0]_* = p(1 - \mu)h(x)/G$; $(\sigma_{zz}^0)_* = 2p$, де G і μ – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Для побудови сингулярного інтегрального рівняння (СІР) задачі використаємо математичні залежності [3], які описують зв'язок між напруженнями та деформаціями на поверхнях включення

$$\partial(u_x^e)_*/\partial x = 0; \quad \partial(u_z^e)_*/\partial x = 0. \quad (3)$$

Підставляючи відповідні вирази у (3), зводимо задачу до знаходження стрибка невідомих напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$ з рівняння

$$\int_{-a}^a \frac{[\tilde{\sigma}_{zx}]_*}{t-x} dt = -\frac{4p\mu(1-\mu)}{3-4\mu} + \frac{2G(1-2\mu)}{3-4\mu} \int_{-a}^a \frac{[\tilde{u}_z]_*'}{t-x} dt, \quad [\tilde{u}_z]_*' = d[\tilde{u}_z]_*/dt. \quad (4)$$

Його розв'язок знаходимо, використовуючи відоме значення $[\tilde{u}_z]_* = -p(1-\mu)h(x)/G$. Він має такий вигляд:

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_*^{(is)} = 2p(1-\mu)(1-2\mu-2\mu\beta)(\beta(3-4\mu))^{-1} x/\sqrt{a^2-x^2}, \quad |x| \leq a. \quad (5)$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) K_I для сингулярної задачі (2) можна [2] обчислити за формулою

$$K_I = -\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a-x)} \left\{ \frac{G}{2(1-\mu)} [\tilde{u}_z]_*' + \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \right\}, \quad (6)$$

звідки знаходимо значення КІН для ізолюваного включення

$$K_I^{(is)} = p\sqrt{\pi a} (\mu\beta(1-2\mu) - 2(1-\mu)^2)/(\beta(3-4\mu)). \quad (7)$$

Спрямувавши $\beta \rightarrow \infty$, з формули (7) отримаємо (з точністю до позначень) значення K_I для абсолютно жорсткого лінійного включення [1]. Напруження σ_{zz}^e на поверхнях включення обчислюють на підставі виразів (2)

$$\sigma_{zz}^{e(is)} = p(1-\mu)[2(1-\mu) + \beta(3-2\mu)]/(\beta(3-4\mu)), \quad (8)$$

а торцеві напруження σ_{xx}^e – за формулою [2]

$$\sigma_{xx}^e(x) = \sigma_{xx}^0(x) - \frac{1}{2h(x)} \int_{-a}^x [\sigma_{zx}^e]_* dt, \quad (9)$$

$$\sigma_{xx}^{e(is)}(x) = p(1-\mu)(1-2\mu-2\mu\beta)/(3-4\mu). \quad (10)$$

Згідно з принципом мікроскопа [2, 4] напруження у матриці поблизу включення можуть визначатися через розв'язок крайової задачі (1)

$$\sigma_{zz}|_{x=\pm a} = 2\beta K_I/\sqrt{\pi a} + \tilde{\sigma}_{xx}(a) + p. \quad (11)$$

На підставі співвідношень (7) і (11) знайдемо, що

$$\sigma_{zz}^{(is)} = p\mu(1-2\mu-2\mu\beta)/(3-4\mu). \quad (12)$$

За умов плоского напруженого стану (ПНС) вираз (12) збігається з відомим [4].

Періодична система компланарних включень. Нехай у тілі розташована компланарно і періодично (період d) безмежна система однакових еліптичних тунельних включень. У цьому випадку з врахуванням періодичності та симетрії задача зводиться до такого СІР:

$$\int_{-a}^a [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = -\frac{4pd\mu(1-\mu)}{3-4\mu} + \frac{2G(1-2\mu)}{3-4\mu} \int_{-a}^a [\tilde{u}_z]_*' \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt \quad (13)$$

стосовно $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$. Використаємо подання ядра цього рівняння у вигляді ряду

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} \cong \frac{d}{\pi(t-x)} - \frac{\pi}{3d}(t-x) - \frac{\pi^3}{45d^3}(t-x)^3 - \frac{2\pi^5}{945d^5}(t-x)^5 - \dots;$$

$$\frac{|t-x|}{d} \leq \lambda = \frac{2a}{d} < 1.$$

Розв'язок шукатимемо в такому вигляді:

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = (A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4) x / \sqrt{a^2 - x^2},$$

де коефіцієнти A_0, A_2, A_4 підлягають визначенню. Прирівнюючи в рівнянні (13) ліворуч й праворуч коефіцієнти при однакових степенях x знайдемо, що

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{2p(1-\mu)}{\beta(3-4\mu)} \left[1 - 2\mu - 2\mu\beta \left(A_0^{(1)} + \frac{x^2}{d^2} A_2^{(1)} + \frac{x^4}{d^4} A_4^{(1)} \right) \right], \quad (15)$$

де $A_0^{(1)} = 1 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{3 \cdot 2^3} + \frac{7\pi^4 \lambda^4}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^7} + \frac{31\pi^6 \lambda^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^{10}} + o(\lambda^6),$

$$A_2^{(1)} = \frac{\pi^4 \lambda^2}{3 \cdot 5 \cdot 2^3} + \frac{41\pi^6 \lambda^4}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^6} + \frac{67\pi^8 \lambda^6}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^7} + o(\lambda^6),$$

$$A_4^{(1)} = \frac{\pi^6 \lambda^2}{3^3 \cdot 7 \cdot 2^2} + \frac{83\pi^8 \lambda^4}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{2173\pi^{10} \lambda^6}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^{10}} + o(\lambda^6).$$

За формулою (6) знаходимо значення КІН K_I для цього випадку

$$K_I = K_I^{(is)} \left[1 + \mu\beta(1-2\mu)F(\lambda) / (\mu\beta(1-2\mu) - 2(1-\mu)^2) \right], \quad (16)$$

причому $F(\lambda) = \frac{\pi^2 \lambda^2}{3 \cdot 2^3} + \frac{19\pi^4 \lambda^4}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^7} + \frac{55\pi^6 \lambda^6}{3^3 \cdot 7 \cdot 2^{10}} + o(\lambda^{10})$. Спрямувавши $\beta \rightarrow \infty$ та

за умов ПНС, з (16) отримаємо КІН [1] для пластини з жорсткими лініями.

Напруження у включеннях та в матриці визначають залежностями

$$\sigma_{zz}^a(x) = \sigma_{zz}^{a(is)} \left\{ 1 - \frac{2(1-\mu)}{2(1-\mu) + \beta(3-2\mu)} \left[\frac{\pi^2 \lambda^2}{3 \cdot 2^3} + \frac{\pi^4 \lambda^4}{15 \cdot 2^7} + \frac{\pi^6 \lambda^6}{3^3 \cdot 7 \cdot 2^9} + \frac{x^2}{d^2} \left(\frac{\pi^4 \lambda^2}{15 \cdot 2^3} + \frac{\pi^6 \lambda^4}{63 \cdot 2^5} + \frac{\pi^8 \lambda^6}{45 \cdot 2^{10}} \right) + \frac{x^4}{d^4} \left(\frac{\pi^6 \lambda^2}{3^3 \cdot 7 \cdot 2^2} + \frac{\pi^8 \lambda^4}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^7} + \frac{\pi^{10} \lambda^6}{3^3 \cdot 11 \cdot 2^8} \right) \right] \right\}, \quad |x| \leq a, \quad (17)$$

$$\sigma_{xx}^a(\pm a) = \sigma_{xx}^{a(is)} F_1(\lambda); \quad \sigma_{zz}|_{x=\pm a} = \sigma_{zz}^{(is)} F_1(\lambda), \quad (18)$$

де $F_1(\lambda) = 1 + 2\mu\beta / (2\mu\beta - (1-2\mu)) F(\lambda)$. Вирази $K_I^{(is)}$, $\sigma_{zz}^{a(is)}$, $\sigma_{xx}^{a(is)}$, $\sigma_{zz}^{(is)}$ даються відповідними формулами п.1.

Періодична система паралельних включень. У цьому разі у тілі періодично вздовж осі Oz розташована нескінченна система включень, серединні площини яких паралельні. Аналогічно, як і в попередньому пункті, задача зводиться до СІР

$$\int_{-a}^a [\tilde{\sigma}_{zx}]_* L(t, x) dt = -\frac{4pd\mu(1-\mu)}{3-4\mu} + \frac{2G(1-2\mu)}{3-4\mu} \int_{-a}^a [\tilde{u}_z]'_* L(t, x) dt, \quad |x| \leq a, \quad (19)$$

причому $L(t, x) = 2 \operatorname{cth} \frac{\pi(t-x)}{d} - \frac{\pi(t-x)}{d} \operatorname{cosech}^2 \frac{\pi(t-x)}{d}$. Провівши дії, схожі до дій у попередньому розділі, знайдемо, що напруженнями

$$[\bar{\sigma}_{zx}] = \frac{2p(1-\mu)}{\beta(3-4\mu)} \left[1 - 2\mu - 2\mu\beta \left(B_0^{(1)} + \frac{x^2}{d^2} B_2^{(1)} + \frac{x^4}{d^4} B_4^{(1)} \right) \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{де } B_0^{(1)} &= 1 - \frac{\pi^2 \lambda^2}{2^3} + \frac{5\pi^4 \lambda^4}{3 \cdot 2^7} - \frac{17\pi^6 \lambda^6}{3^2 \cdot 2^{10}} + o(\lambda^6); & B_2^{(1)} &= \frac{\pi^4 \lambda^2}{3 \cdot 2^3} - \frac{13\pi^6 \lambda^4}{3^3 \cdot 2^6} + \\ &+ \frac{\pi^8 \lambda^6}{3^3 \cdot 2^5} + o(\lambda^6); & B_4^{(1)} &= -\frac{\pi^6 \lambda^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{47\pi^8 \lambda^4}{3^3 \cdot 5 \cdot 2^7} - \frac{221\pi^{10} \lambda^6}{3^4 \cdot 5 \cdot 2^{10}} + o(\lambda^6). \end{aligned} \quad (21)$$

КІН K_I у цьому випадку дорівнює

$$K_I = K_I^{(is)} \left[1 - \mu\beta(1-2\mu) \Phi(\lambda) / (\mu\beta(1-2\mu) - 2(1-\mu)^2) \right], \quad (22)$$

$$\text{де } \Phi(\lambda) = \frac{\pi^2 \lambda^2}{2^3} - \frac{3\pi^4 \lambda^4}{2^7} + \frac{247\pi^6 \lambda^6}{3^3 2^{10}} + o(\lambda^{10}).$$

Розв'язок поставленої задачі задається формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^s(x) &= \sigma_{zz}^{s(is)} \left\{ 1 + \frac{2(1-\mu)}{2(1-\mu) + \beta(3-2\mu)} \left[\frac{\pi^2 \lambda^2}{2^3} - \frac{\pi^4 \lambda^4}{3 \cdot 2^7} + \frac{\pi^6 \lambda^6}{3^3 \cdot 2^8} - \frac{x^2}{d^2} \left(\frac{\pi^4 \lambda^2}{3 \cdot 2^3} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\pi^6 \lambda^4}{3^2 \cdot 2^5} + \frac{\pi^8 \lambda^6}{5 \cdot 2^{10}} \right) + \frac{x^4}{d^4} \left(\frac{\pi^6 \lambda^2}{3^3 \cdot 2^2} - \frac{\pi^8 \lambda^4}{5 \cdot 2^7} + \frac{\pi^{10} \lambda^6}{3^3 \cdot 2^8} \right) \right] \right\}, \quad |x| \leq a; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\sigma_{xx}^s(\pm a) = \sigma_{xx}^{s(is)} \Phi_1(\lambda); \quad \sigma_{zz}|_{x=\pm a} = \sigma_{zz}^{(is)} \Phi_1(\lambda), \quad (24)$$

де $\Phi_1(\lambda) = 1 - 2\mu\beta/(2\mu\beta - (1-2\mu)) \Phi(\lambda)$.

1. Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стащук М. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. - К.: Наук. думка, 1983. - 288 с.
2. Стадник М. М. Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 1994. - Т. 30, № 6. - С. 30-40.
3. Стадник М. М., Горбачевський І. Я. Пружна задача для тіла з тонким тунельним включенням овальноподібної конфігурації // Доп. НАН України. Сер. А. - 1997. - № 8. - С. 82-87.
4. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. - М.: Наука, 1983. - 296 с.

PLANE DEFORMATION OF A BODY WITH THE PERIODICAL ARRAYS OF RIGID ELLIPTICAL INCLUSIONS

Myron Stadnyk, Ihor Horbachevskyj

Ukrainian state forestry engineering university

The infinite elastic body under normal tension containing the complanar and parallel systems of thin rigid cylindrical inclusions of the elliptical cross-section has been considered. The solutions of these problems by the method of small parameter were obtained.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.1999

УДК 539.3

УЗАГАЛЬНЕНИЙ СИНГУЛЯРНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБОЛОНКИ ТИМОШЕНКА

Михайло Сухорольський

Національний університет «Львівська політехніка»

Розглянемо вільно оперту пологоу трансверсально-ізотропну оболонку, план якої прямокутник. Зовнішні сили, що діють на оболонку, локалізовані в малій області і змінюються за гармонійним законом від часової координати.

Модифіковані рівняння теорії оболонок Тимошенка. Математичну модель пологої трансверсально-ізотропної оболонки Тимошенка, що враховує нормальну до серединної поверхні компоненту інерційної сили, зображають:

рівняннями рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -q_i, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i (i = 1, 2), \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3; \end{aligned} \quad (1)$$

фізичними рівняннями

$$\begin{aligned} N_{11} = B \left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu k_2) w \right], \quad N_{22} = B \left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu k_2) w \right], \\ M_{11} = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} \right), \quad M_{22} = \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} \right), \quad Q_i = \Lambda \left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) (i = 1, 2), \\ N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right), \quad M_{12} = M_{21} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де $B = \frac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \frac{h^2}{3} B$; $\Lambda = \frac{5h}{3} G'$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – ортогональні криволінійні координати; t – часова координата; $2h$ – товщина оболонки; δ – густина матеріалу; u_1, u_2, w – переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі до серединної поверхні; k_1, k_2 – головні кривини; ν, E, G' – пружні сталі; N_{ij}, Q_i, M_{ij} – внутрішні сили і моменти; q_i, q_3, m_i – зовнішні навантаження.

Переміщення довільної точки оболонки визначають за формулами $U_i = u_i + \alpha_3 \gamma_i$ ($i = 1, 2$), $U_3 = w$.

Модифіковані рівняння одержимо, знехтувавши жорсткими поворотами стосовно нормалі до серединної поверхні

$$2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} \right).$$

Вводячи за аналогією з [1] у вирази для зусиль $N_{12}, N_{21}, M_{12}, M_{21}$ допоміжні функції T, H (реакції на повороти) і малі параметри $\beta_1 = 2/B(1 - \nu)$, $\beta_2 = 2/D(1 - \nu)$ запишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} N_{12} &= B(1 - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + T, \quad N_{21} = B(1 - \nu) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - T, \quad M_{12} = D(1 - \nu) \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + H, \\ M_{21} &= D(1 - \nu) \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - H, \quad \beta_1 N = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \quad \beta_2 H = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вироджена система рівнянь, що відповідає (1), (2) з урахуванням (3) при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, зображає модифіковану математичну модель оболонки Тимошенка. Останні два рівняння (3) при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ мають вигляд $\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = 0$, $\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} = 0$. Їх можна задовольнити, ввівши потенціали поля переміщень і поля кутів повороту нормалі $u_i = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}$, $\gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}$ ($i = 1, 2$).

Нормальні компоненти переміщень і зусиль вздовж деякої гладкої кривої з одиничним нормальним вектором $\{n_1(\alpha); n_2(\alpha)\}$ визначають за формулами

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \gamma_n = -\frac{\partial \gamma}{\partial n}, \quad N_n = -B \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) - k_n w \right], \\ M_n &= -D \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2} \right), \quad Q_n = -\Lambda \frac{\partial}{\partial n} (\gamma - w), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{де} \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} n_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} n_2; \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} n_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} n_1;$$

$$k_n = (k_1 + \nu k_2) n_1^2 + (k_2 + \nu k_1) n_2^2.$$

Постановка задачі про вимушені коливання оболонки. Розглянемо динамічну задачу без початкових умов для модифікованої системи рівнянь. Позначимо через Π прямокутник зі сторонами l_1 , l_2 . На $\partial\Pi$ правильні умови

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad u_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad N_{11} = 0, \quad M_{11} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 = l_1; \\ w &= 0, \quad u_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad N_{22} = 0, \quad M_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 = l_2. \end{aligned} \quad (5)$$

У квадраті $\Pi^r = \{\alpha(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_i - \alpha_i^r| \leq \varepsilon\}$ ($i = 1, 2$), $\Pi^r \subset \Pi$ оболонка навантажена симетрично розподіленими стосовно його осей симетрії моментами і силами з рівнодійними $T_i^r \sin \theta_0 t$ ($i = \overline{1, 3}$). Сила в серединній поверхні і момент зорієнтовані в напрямі одиничного вектора $\{n_1^r; n_2^r\}$,

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin \theta_0 t, \quad (i = 1, 2),$$

$$q_3 = T_2^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin \theta_0 t \quad (7)$$

де

$$\delta_{\varepsilon i}(\alpha_i, \alpha_i^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\alpha_i - \alpha_i^r|}{\varepsilon}\right), & |\alpha_i - \alpha_i^r| \leq \varepsilon \\ 0, & |\alpha_i - \alpha_i^r| > \varepsilon \end{cases}$$

– дельта-видна функція [2]; $g(t)$ – спадна гладка функція ($0 \leq t \leq 1$);

$$g(1) = 0; \quad \int_0^1 g(t) dt = 1.$$

Задача полягає у відшуванні амплітуди усталених коливань оболонки.

Узагальнений сингулярний розв'язок. Розв'язок задачі, що справджує умови (5), шукаємо у вигляді суми рядів

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}^r \\ w_{km}^r \\ \gamma_{km}^r \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha) \sin \theta_0 t, \quad \begin{Bmatrix} T \\ H \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_{km}^r \\ H_{km}^r \end{Bmatrix} \Phi_{km}^*(\alpha) \sin \theta_0 t, \quad (8)$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin \lambda_{1k} \alpha_1 \sin \lambda_{2m} \alpha_2$; $\Phi_{km}^* = \cos \lambda_{1k} \alpha_1 \cos \lambda_{2m} \alpha_2$; $\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}$.

Зобразивши відповідно до (8) дельта-видні функції у вигляді сум рядів, і підставивши їх разом з (8) у вихідну систему рівнянь, одержимо систему алгебраїчних рівнянь. Вирішуючи її, знайдемо

$$\begin{Bmatrix} u_{km}^r \\ w_{km}^r \\ \gamma_{km}^r \end{Bmatrix} = \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B} \begin{bmatrix} u_{1km} & u_{2km} & u_{3km} \\ w_{1km} & w_{2km} & w_{3km} \\ \gamma_{1km} & \gamma_{2km} & \gamma_{3km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_{km}^r}{\partial n} T_1^r \\ \Phi_{km}^r T_2^r \\ \frac{\partial \Phi_{km}^r}{\partial n} T_3^r \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$$\text{де } \Phi_{km}^r = \Phi_{km}(\alpha^r); \quad u_{1km} = \frac{-1}{\omega_{km}(\theta)} \left[(\Delta_{km})^2 + \left(\frac{Bk_0^2}{D} - \theta_0^2 \right) \Delta_{km}^1 \right];$$

$$u_{2km} = -w_{1km} = \frac{-B}{D\omega_{km}(\theta)} \Delta_{km}^1 \Delta_{km}^v; \quad u_{3km} = \gamma_{1km} = \frac{B}{D\omega_{km}(\theta)} \Delta_{km}^v;$$

$$w_{2km} = \frac{B}{D\omega_{km}(\theta)} \Delta_{km}^1 (\Delta_{km})^2; \quad w_{3km} = -\gamma_{2km} = \frac{-B}{D\omega(\theta)} (\Delta_{km})^2;$$

$$\gamma_{3km} = \frac{-B}{D\Delta_{km}^1} \left[\frac{(\Delta_{km})^2}{\omega_{km}(\theta)} + \frac{D}{\Lambda \Delta_{km}} \right]; \quad \Delta_{km} = \lambda_{1k}^2 + \lambda_{2m}^2; \quad \Delta_{km}^1 = 1 + \frac{D}{\Lambda} \Delta_{km};$$

$$\Delta_{km}^v = (k_1 + vk_2)\lambda_{1k}^2 + (k_2 + vk_1)\lambda_{2m}^2; \quad k_0^2 = k_1^2 + 2vk_1k_2 + k_2^2; \quad \theta_0^2 = \frac{2h\rho\theta_0}{D};$$

$$\omega_{km}(\theta) = (\Delta_{km})^4 + \frac{B}{D}[k_0^2(\Delta_{km})^2 - (\Delta_{km}^v)^2]\Delta_{km}^1 - \theta_0^2(\Delta_{km})^2\Delta_{km}^1;$$

$$c_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{1k}\varepsilon) \varphi(\lambda_{2m}\varepsilon); \quad \varphi(\lambda) = \int_0^1 g(t) \cos \lambda t dt.$$

Зокрема, якщо $g(t) = 2(1-t)$, то $\varphi(\lambda_k\varepsilon) = [\sin(\lambda_k\varepsilon/2)/(\lambda_k\varepsilon/2)]^2$.

Формули для нормальних компонент векторів переміщень і зусиль одержимо з (4) з урахуванням (9).

Подвійні ряди в (9) при $\varepsilon \neq 0$ рівномірно збігаються [3]. Переходячи в (9) до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, знайдемо узагальнений сингулярний розв'язок модифікованої системи рівнянь у прямокутнику. Відповідні узагальнені суми рядів є в усіх точках прямокутника Π , крім точки $\alpha = \alpha^r$. Числові значення узагальненого розв'язку знаходимо за формулами (9) при досить малому значенні $\varepsilon \neq 0$.

1. Сухорольский М. А. Метод искусственного введения малого параметра в теории анизотропных оболочек // Актуальные проблемы неоднородной механики. Мат. Всесоюз. научн. семинара (Ереван, 23-26 июня 1991г.). С. 320-325.
2. Сухорольський М. А. До проблеми наближення функції операторами усереднення. - Львів: Центр математ. моделювання ІППІММ АН України (Препринт № 1-95), 1995. - 48 с.
3. Сухорольський М. А. Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами - частинними сумами операторів усереднення // Укр. мат. журн. - 1997. - № 5. - С. 706-714.

GENERALIZED SINGULAR SOLUTION OF THE DYNAMIC PROBLEM FOR TIMOSHENKO'S SHELL

Mikhailo Sukhorolsky

National University «Lvivska Politechnika»

The investigation is based of the mathematical model is based on the Timoshenko's shell. To construct a generalized singular solution of the initial system of equations Fourier's method is used, as well as the sequential method of constructing generalized functions.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.1999

ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ДВОЗВ'ЯЗНИХ СИМЕТРИЧНИХ ГОСТРОКУТНИХ ШТАМПІВ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Андрій Сяський, Володимир Сяський

Рівненський державний гуманітарний університет

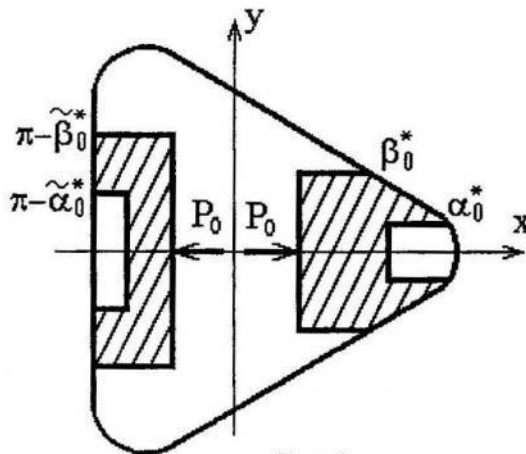


Рис. 1.

Нехай у криволінійний отвір безмежної ізотропної пластинки, який має форму правильного N -кутника з закругленими кутами, без зазору і натягу вставлені два жорсткі симетричні штампи з кутовими точками. Контакт між пластинкою і штампами забезпечують дві сили P_0 , які діють вздовж осі симетрії отвору і штампів (рис. 1). Внаслідок цього на контурі отвору L виникають зона контакту L_1 і зона вільна від напружень. Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль T_p під штампами та кільцевих зусиль T_λ на L .

Розглянемо функцію

$$Z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right), \quad (1)$$

яка реалізує конформне відображення зовнішності одиничного кола в площині $\xi = re^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка [2]. Не порушуючи загальності, вважаємо, що $R_0 = 1$.

Позначимо через $\pm\alpha_0^*$, $\pm\beta_0^*$, $\pi \pm \tilde{\alpha}_0^*$, $\pi \pm \tilde{\beta}_0^*$ значення полярного кута, які визначають зони контакту в полярній системі координат (r, δ) з полюсом у центрі отвору. Тоді

$$L_1 \equiv [-\beta_0^*, -\alpha_0^*] \cup [\alpha_0^*, \beta_0^*] \cup [\pi - \tilde{\beta}_0^*, \pi - \tilde{\alpha}_0^*] \cup [\pi + \tilde{\alpha}_0^*, \pi + \tilde{\beta}_0^*]. \quad (2)$$

У разі відображення (1) зоні контакту L_1 буде відповідати зона

$$\gamma_1 \equiv [-\beta_0, -\alpha_0] \cup [\alpha_0, \beta_0] \cup [\pi - \tilde{\beta}_0, \pi - \tilde{\alpha}_0] \cup [\pi + \tilde{\alpha}_0, \pi + \tilde{\beta}_0] \quad (3)$$

на одиничному колі γ в площині ξ .

Формули для визначення компонентів вектора зміщення контурних точок при заданому навантаженні мають вигляд [3]

$$U = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)f_1(\lambda) + I_2(\lambda) + C]; \quad V = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)f_2(\lambda) - I_1(\lambda)], \quad (4)$$

де E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; $2h$ – товщина пластинки;

$$f_1 + if_2 = - \int_0^\lambda (T_p^* + iS_{p\lambda}^*) e^{it} dt; \quad C - \text{ стала; } T_p^* + iS_{p\lambda}^* = (T_p + iS_{p\lambda}) \omega'(\sigma);$$

$$\sigma = e^{i\lambda}; \quad I_j(\lambda) = \frac{1}{\pi} \oint_\gamma f_i(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt, \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

Граничні умови задачі при відсутності тертя в зоні контакту згідно з [3] запишемо так:

$$U + a(\lambda)V = U_0; \quad f_1'(\lambda) + a(\lambda)f_2'(\lambda) = 0; \quad \lambda \in \gamma_1; \quad a(\lambda) = \operatorname{tg} \delta. \quad (6)$$

Враховуючи властивості функцій $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ [3], знаходимо після інтегрування останнього співвідношення (5) за частинами

$$I_1(\lambda) = \left[\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2(\lambda + t)/2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\pi - \tilde{\alpha}_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2(\lambda + t)/2} \right| dt \right] \sin \lambda;$$

$$I_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\pi - \tilde{\alpha}_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt. \quad (7)$$

Введенням в (7) заміни

$$f_j(t) = f_j(t), \quad t \in [\alpha_0, \beta_0]; \quad f_j(\pi + \tilde{t}) = \tilde{f}_j(\tilde{t}), \quad t \in [\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0] \quad (8)$$

рівності (4) можна подати у вигляді

$$U = \frac{1}{2Eh} \left[(1 - \nu)f_1(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln |\cos \tilde{t} + \cos \lambda| d\tilde{t} + C \right];$$

$$V = \frac{1}{2Eh} \left[(1 - \nu)f_2(\lambda) - \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2 \frac{\lambda + t}{2}} \right| dt + \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \frac{\cos \tilde{t} + \cos \lambda}{2 \cos^2 \frac{\lambda - \tilde{t}}{2}} \right| d\tilde{t} \right] \right],$$

$$\lambda \in \gamma. \quad (9)$$

Функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ в зоні контакту через їхні похідні виражають співвідношеннями

$$f_1(\lambda) = \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + C_0; \quad f_2(\lambda) = -\frac{P_0}{2} + \int_{\beta_0}^{\lambda} f_2'(t) dt; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$f_1(\lambda) = \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \tilde{C}_0; \quad f_2(\lambda) = -\frac{P_0}{2} + \int_{\pi - \tilde{\beta}_0}^{\lambda} f_2'(t) dt; \quad \lambda \in [\pi - \tilde{\beta}_0; \pi - \tilde{\alpha}_0]. \quad (10)$$

Підставляючи (9), (10) в граничні умови (6), одержимо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_j'(\lambda)$, $\tilde{f}_j'(\tilde{\lambda})$, $(j = 1, 2)$

$$\begin{aligned}
& (1 - \nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln |\cos \tilde{t} + \cos \lambda| d\tilde{t} + \\
& + C_j + a(\lambda) \times \left\{ (1 - \nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{P_0}{2} - \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \frac{\cos t - \cos \lambda}{2 \sin^2(\lambda + t)/2} \right| dt + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{\tilde{\alpha}_0}^{\tilde{\beta}_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \frac{\cos \tilde{t} + \cos \lambda}{2 \cos^2(\lambda + \tilde{t})/2} \right| d\tilde{t} \right] \right\} = 0; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$f_1'(\lambda) + a(\lambda)f_2'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad \lambda \in [\pi - \tilde{\beta}_0, \pi - \tilde{\alpha}_0].$$

Крім системи (11), повинні виконуватися умови рівноваги кожного штампa

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt = -\frac{P_0}{2}; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} = -\frac{P_0}{2}, \quad (12)$$

які служать для визначення сталих C_1, C_2 .

Знаходження точного розв'язку системи (11)–(12) пов'язане із значними математичними труднощами. Оскільки при відсутності тертя контактні напруження, а відповідно і функції $f_j'(\lambda)$, $\tilde{f}_j'(\tilde{\lambda})$, на кінцях зон контакту мають кореневу особливість, то наближений розв'язок цієї системи можна знайти методом колокації [2, 4].

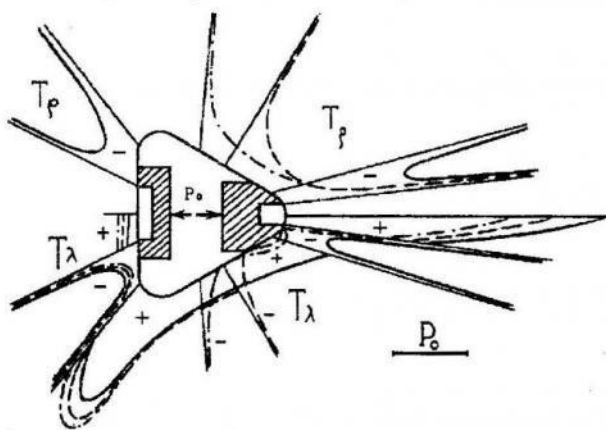


Рис. 2.

Результати обчислень нормальних T_p і кільцевих T_λ зусиль на контурі трикутного ($N = 3$; $\epsilon = 0.25$) отвору при $\alpha_0 = \frac{\pi}{12}$,

$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\pi}{12}$, $\tilde{\beta}_0 = \frac{\pi}{4}$ зображені на рис. 2. Суцільні лінії побудовані для випадку $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$, штрихові –

для випадку $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$, штрихпунк-

тирні – для випадку $\beta_0 = \frac{5\pi}{12}$.

Величини T_p і T_λ на торцях зони контакту необмежені. Кільцеві зусилля T_λ зовні зон контакту залишаються обмеженими.

Зміною параметрів N, ϵ (форма отвору) і $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \alpha_0, \beta_0$ (розміри зон контакту) з системи (11) можна одержати розв'язки окремих задач про двосторонній контакт двох симетричних штампів з криволінійним отвором ізотропної пластинки.

При $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0$ система (11) визначає розв'язок задачі для двох однозв'язних штампів з кутовими точками.

Якщо в системі (11) прийняти, що $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = \beta_0 = \tilde{\beta}_0 = 0$, то однозв'язні штампи вироджуються в клиноподібні. В цьому випадку система визначає розв'язок задачі про тиск двох зрівноважених сил на контур отвору вздовж осі його симетрії. Задачі такого класу для кругового й еліптичного отворів розглянуто в [1, 5].

Приймаючи в (11) $\alpha_0 = \beta_0 \neq 0$, $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\beta}_0 \neq 0$, приходимо до задачі про тиск на криволінійний отвір двох пар зв'язаних паралельних сил, відстань між якими незмінна.

Збільшуючи кути β_0 і $\tilde{\beta}_0$, можна домогтися того, що контактні зусилля в точках $\lambda = \pm\beta_0$, $\lambda = \pi \pm \beta_0$ дорівнюватимуть нулю. Якщо при цьому $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0$, то однозв'язні штампи з кутовими точками працюватимуть так само як гладкі штампи при їх посадці з нульовим зазором [4].

Якщо в системі (11) параметри $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\beta}_0$, α_0 , β_0 змінювати незалежно, то одержимо розв'язки цілого класу нових контактних задач. Для окремих з них відомі точні розв'язки, які можна використати для оцінки точності методу колокації.

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.
2. Сяський А. А. О контакте жесткого диска с криволинейным отверстием в бесконечной пластинке. — Ровно, 1988. — 10 с. — Деп в УкрНИИТИ 03.01.89. №128-Ук89.
3. Сяський А. О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір ортотропної пластинці // Волин. мат. вісн. — 1997. — Вип. 4. — С. 153–156.
4. Сяський В. А. Вдавлювання жорсткого диска в криволінійний отвір ізотропної пластинки // Волин. мат. вісн. — 1997 — Вип. 4. — С. 157–60.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.

THE TWO-SIDED CONTACT OF DOUBLY-CONNECTED SYMMETRIC ACUTE-ANGLED STAMPS WITH CURVELINEAR APERTURE IN ENDLESS PLATE

Andriy Syasky, Volodymyr Syasky

Rivno state humanitarian university

The problem about the contact interaction of curvelinear aperture in endless plate and system of doubly-connected symmetric stamps with angular points is reduced to a system of integral equations with logarithmic nuclei. Approximate solution of the problem is realized by the method of Multhopp-Calandia collocation.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.1999

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ТОНКОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Любомир Тисовський

Український державний лісотехнічний університет

Загальна схема розв'язування задач про визначення напружено-деформованого стану в тілах з сторонніми включеннями полягає в сумісному розв'язку рівнянь рівноваги для області, зайнятої основним матеріалом (матриці), і області, зайнятої включенням. Потім отримані розв'язки спрягаються по лінії розділу матеріалів шляхом задоволення граничних умов. Однак згаданий підхід досить трудомісткий особливо тоді, коли геометричні розміри включення не є співмірними. В цьому випадку виникають сильно неоднорідні поля шуканих характеристик. Якщо врахувати тонкостінність прошарку і його механічні та теплофізичні характеристики, то можна ввести різні спрощення в постановку і розв'язування задачі. Один з таких підходів пропонуємо нижче.

Розглянемо безмежну матрицю, яка містить криволінійне тонкостінне пружне включення постійної ширини $2h$. Серединну лінію включення позначимо через L з додатним напрямом обходу на ній проти ходу годинникової стрілки. Композит перебуває в заданому зовнішньому температурному і силовому полі, а на лінії розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного і теплового контакту, які можна зобразити так:

теплові

$$\begin{aligned} (T_* + i\eta)_0|_{\delta=\pm h} &= (T_* + i\eta)|_{\delta=\pm h}, \\ \kappa_0 \frac{\partial}{\partial n} (T_* + i\eta)_0|_{\delta=\pm h} &= \kappa \frac{\partial}{\partial n} (T_* + i\eta)|_{\delta=\pm h}; \end{aligned} \quad (1)$$

механічні

$$\begin{aligned} (N + iT)_0|_{\delta=\pm h} &= (N + iT)|_{\delta=\pm h}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (u + iv)_0|_{\delta=\pm h} + i\gamma &= \frac{\partial}{\partial t} (u + iv)|_{\delta=\pm h}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $N \equiv N(t)$; $T \equiv T(t)$; $u \equiv u(t)$; $v \equiv v(t)$; $T_* \equiv T_*(t)$ – відповідно нормальна і дотична компоненти зовнішніх зусиль; компоненти вектора переміщень і температура, обчислені в точці t ліній розділу матеріалів; $\eta = \eta(t)$ – допоміжна гармонійна функція; κ – коефіцієнт теплопровідності; γ – поворот тонкого включення як жорсткого цілого; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; δ – відрізок перпендикуляра, проведеного до лінії L в точці t . Тут і далі всі характеристики тонкого включення позначають індексом «0», а характеристики матриці вживають без індексів.

Припустимо, що композит перебуває в умовах плоскої задачі термопружності, тобто напружено-деформований стан і температурне поле в тілі можна зобразити комплексними потенціалами Колосова – Мусхелішвілі $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ і комплексні потенціали температурного поля $F_1(z)$, $Q_1(z)$

$$N + iT = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}],$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial t}(u + iv) = \chi\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} -$$

$$- \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] + H[F_1(z) + \overline{Q_1(z)}], \quad (3)$$

$$T_* + i\eta = F_1(z) + Q_1(\bar{z}). \quad (4)$$

Тут σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; $H = \alpha_t E$, $\chi = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації і $H = \alpha_t E/(1 + \nu)$, $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для плоского деформованого стану; α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення; ν – коефіцієнт Пуассона; $\mu = E/(2(1 + \nu))$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; z – комплексна змінна.

Нехай тепер тонкостінне включення буде геометричним об'єктом, який утворюється так. З точки $u \in L$ відкладаємо по нормалі до L в одну і іншу сторону відрізок довжиною h . Тоді біжуча координата сторін включення визначається співвідношенням

$$t^\pm = u \pm he^{i\alpha}, \quad \alpha = \alpha(u),$$

де t^+ , t^- – відповідно точки лівого і правого берегів включення по відношенню до вибраного додатного напрямку; α – кут, який становить нормаль до контура з віссю Ox .

Скориставшись поняттям похідної за напрямом, зі співвідношення (4) можна отримати

$$\frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta) = e^{i\alpha}F(z) + e^{-i\alpha}Q(\bar{z}),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta) = -i(e^{i\alpha}F(z) - e^{-i\alpha}Q(\bar{z})),$$

де $F(z) = F_1'(z)$, $Q(z) = Q_1'(z)$.

Запишемо співвідношення (3), (5) для області, зайнятої тонким включенням і, враховуючи тонкостінність прошарку, розвинемо комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі і функції $F(z)$, $Q(z)$ в ряди Тейлора в околі точки $u \in L$. Залишаючи в одержаних розкладах лише члени першого порядку малості порівняно з h , після перетворень одержимо

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^- = 2h\rho'(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^- = 2hg'(u), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial s}(T_* + i\eta)_0^- &= -2i[e^{i\alpha}F_0(u) - e^{-i\alpha}Q_0(\bar{u})], \\ \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial n}(T_* + i\eta)_0^- &= 2[e^{i\alpha}F_0(u) + e^{-i\alpha}Q_0(\bar{u})],\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}(N + iT)_0^+ - (N + iT)_0^- &= 2hK'(u), \\ \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^+ - \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^- &= \frac{h}{\mu_0}M'(u),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}(N + iT)_0^+ + (N + iT)_0^- &= 2[\Phi_0(u) + \overline{\Phi_0(u)} - e^{-2i\alpha}R_0(u)], \\ \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^+ + \frac{\partial}{\partial t}(u + iv)_0^- &= \\ &= \frac{1}{\mu_0}[\chi_0\Phi_0(u) - \overline{\Phi_0(u)} + e^{-2i\alpha}R_0(u) + 2H_0f_0(u)].\end{aligned}\quad (9)$$

Функції стрибка потоків тепла $\rho'(u)$, $g'(u)$, контактних напружень $K'(u)$ і похідних від вектора переміщень $M'(u)$ у точці u кривої L пов'язані з комплексними потенціалами співвідношеннями

$$\begin{aligned}\rho'(u) &= -i[e^{2i\alpha}F'_0(u) - e^{-2i\alpha}Q'_0(\bar{u})], \\ g'(u) &= e^{2i\alpha}F'_0(u) + e^{-2i\alpha}Q'_0(\bar{u}), \\ K'(u) &= e^{i\alpha}\Phi'_0(u) - e^{-i\alpha}\overline{\Phi'_0(u)} + e^{-i\alpha}R'_0(u), \\ M'(u) &= \chi_0e^{i\alpha}\Phi'_0(u) + e^{-i\alpha}\overline{\Phi'_0(u)} - e^{-i\alpha}R'_0(u) + H_0e^{i\alpha}f'_0(u), \\ R_0(u) &= u\overline{\Phi'_0(u)} + \overline{\Psi_0(u)}.\end{aligned}\quad (10)$$

Отже, співвідношеннями (6)–(10) повністю описуються умови взаємодії криволінійного тонкого термопружного включення з навколишнім середовищем. Співвідношення (6), (8) треба вважати визначальними для функцій стрибка відповідних теплових і пружних компонент, а співвідношення (7), (9) і є власне моделлю тонкого включення.

Накінець, зауважимо, що:

а) функція f_0 , дійсна частина якої має фізичний зміст температури, перебуває у процесі розв'язування задачі теплопровідності;

б) якщо в співвідношеннях (8)–(9) прийняти, що $f_0(u) \equiv 0$, то отримаємо модель тонкого криволінійного пружного включення [1];

в) одержані умови взаємодії тонкого включення з навколишнім середовищем є досить загальними і дають змогу отримати розв'язок у широкому діапазоні зміни як пружних, так і теплофізичних характеристик задачі: від тріщини до абсолютно жорсткого включення і від абсолютно теплопровідної тріщини (включення) до теплоізолюваної тріщини (включення). Приймаючи, що $\alpha = \pi/2$ одержимо модель прямолінійного тонкого термопружного включення [2].

1. Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О. Упругое равновесие изотропной пластины с криволинейным тонким упругим включением // Прикл. механика. – 1989. – Т. 26, № 12. – С. 86–93.
2. Грилицкий Д. В., Драган М. С., Опанасович В. К. Температурное поле и термоупругое состояние пластин с тонкостенным упругим включением // Прикл. математика и механика. – 1980. – Т. 44, Вып. 2. – С. 338–345.

A MODEL OF A THIN CURVELINEAR ELASTIC INCLUSION FOR THE PLANAR PROBLEM OF THERMOELASTICITY

Lubomir Tisowskij

Ukrainian state forestry engineering university

This paper is concerned with the problem, of a thin curvelinear elastic inclusion in an infinite isotropic medium under the action of a temperature field. Taking account of the thin – walled nature of an inclusion, let us expand the complex potentials in a Taylor series in the neighbourhood of a point a middle line of an inclusion.

Стаття надійшла до редколегії 02.12.1999

УДК 539.3

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В ДИНАМІЧНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ ОСЕСИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ігор Турчин, Ростислав Середюк

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо пружний суцільний циліндр радіуса R . Вважатимемо, що джерелом нестаціонарних процесів у такому пакеті є локальне збурення внутрішньої поверхні циліндра високоінтенсивним осесиметричним нормальним навантаженням по обмеженій області. На поверхні розділу циліндра і простору виконуються умови ідеального механічного контакту.

З математичного погляду задача полягає у відшуванні розв'язку чотирьох хвильових рівнянь

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\psi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

де $\phi(\rho, \gamma, \tau)$, $\psi(\rho, \gamma, \tau)$ – хвильові потенціали; $\rho = r/R$, $\gamma = z/R$ – безрозмірні змінні циліндричної системи координат; $\tau = c_1 t/R$ – динамічний (безрозмірний) час; c_1 , c_2 – відповідно швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль у матеріалі циліндра; $\kappa = c_1/c_2$.

Ненульові компоненти вектора переміщень і тензора напружень пов'язані з хвильовими потенціалами такими формулами:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\psi}{\rho}, \quad (3)$$

а компоненти тензора напружень одержані за законом Гука. Зокрема,

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}}{\mu} = (\kappa^2 - 2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \gamma} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}}{\mu} = -\kappa^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \gamma} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2}. \quad (5)$$

Згідно зі зробленими у формулюванні задачі припущеннями на граничній поверхні циліндра повинні виконуватись умови

$$\sigma_{\rho\rho} = -p(\gamma, \tau); \quad \sigma_{\rho\gamma} = 0, \quad \text{при } \rho = 1. \quad (6)$$

На осі симетрії циліндра компоненти вектора переміщень і тензора напружень повинні бути обмеженими:

$$\{u, w, \sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\gamma\gamma}\} < \infty, \text{ при } \rho \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Застосовуючи до рівнянь (1), (2) інтегральне перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегральне перетворення Фур'є за змінною γ і враховуючи нульові початкові умови, одержимо трикутну послідовність диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\Phi}_n}{\partial \rho} - (\xi^2 + \lambda^2) \bar{\Phi}_n^{(i)} = \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{\Phi}_m; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\Psi}_n}{\partial \rho} - \frac{\bar{\Psi}_n}{\rho^2} - (\xi^2 + \lambda^2 \kappa^2) \bar{\Psi}_n = \lambda^2 \kappa^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{\Psi}_m, \quad (9)$$

де $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_n(\rho, \xi) \\ \bar{\Psi}_n(\rho, \xi) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} \phi(\rho, \gamma, \tau) \cos(\xi\gamma) \\ \psi(\rho, \gamma, \tau) \sin(\xi\gamma) \end{array} \right\} d\gamma L_n(\lambda\tau) d\tau$ — зображення за Фур'є і Лагерром.

Розв'язок рівнянь (8), (9), як відомо [1], можна записати у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{\Phi}_n = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}(\xi) G_{0,j}(\rho, \xi, \lambda^2) + B_{n-j}(\xi) W_{0,j}(\rho, \xi, \lambda^2)]; \quad (10)$$

$$\bar{\Psi}_n = \sum_{j=0}^n [C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho, \xi, \lambda^2 \kappa^2) + D_{n-j}(\xi) W_{1,j}(\rho, \xi, \lambda^2 \kappa^2)], \quad (11)$$

де $G_{v,j}(\rho, \xi, x)$ і $W_{v,j}(\rho, \xi, x)$ є лінійно незалежними фундаментальними розв'язками такої трикутної послідовності диференціальних рівнянь:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{v^2}{\rho^2} \right) F_{v,j} - (\xi^2 + x) F_{v,j} = x \sum_{m=0}^{j-1} (n-m+1) F_{v,m}, \quad (12)$$

які з використанням методу невизначених коефіцієнтів можна навести у вигляді

$$G_{v,j}(\rho, \xi, x) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left(\frac{x\rho}{2\sqrt{\xi^2 + x}} \right)^k \frac{I_{k+v}(\rho\sqrt{\xi^2 + x})}{k!}; \quad (13)$$

$$W_{v,j}(\rho, \xi, x) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left(-\frac{x\rho}{2\sqrt{\xi^2 + x}} \right)^k \frac{K_{k+v}(\rho\sqrt{\xi^2 + x})}{k!}. \quad (14)$$

Тут $I_\eta(\cdot)$ і $K_\eta(\cdot)$ — відповідно, модифіковані функції Бесселя та функції Макдональда. Підставивши (13) і (14) у рівняння (12), одержимо рекурентні співвідношення для визначення невідомих коефіцієнтів $a_{j,k}$:

$$a_{n,k+1} = \sum_{m=k}^{n-1} (n-m+1) a_{m,k} \quad (15)$$

з довільними $a_{j,0}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ і $a_{j,k} \equiv 0$ при $k > j$.

Враховуючи умови на осі циліндра (7) і те, що функції Макдональда $K_\nu(x)$ необмежено зростають при $x \rightarrow 0$, одержимо, що

$$B_n = D_n \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Для визначення решти невідомих слугують умови (6). Після застосування до них інтегрального перетворення Лагерра – Фур'є в термінах хвильових функцій одержимо:

$$\kappa^2 \lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{\phi}_m + 2\xi^2 \bar{\phi}_n - \frac{2}{\rho} \frac{d\bar{\phi}_n}{d\rho} - 2\xi \frac{d\bar{\psi}_n}{d\rho} = -\bar{p}_n(\xi), \quad \rho = 1 \quad (17)$$

$$\kappa^2 \lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{\psi}_m + 2\xi^2 \bar{\psi}_n - 2\xi \frac{d\bar{\phi}_n}{d\rho} = 0, \quad \rho = 1 \quad (18)$$

Прийmemo $a_{0,0} = 1$; $a_{j,0} = 0$, $j = 1, 2, \dots$. З урахуванням формул (10), (11) після перетворень одержимо

$$A_n \left[(\omega_2^2 + \xi^2) I_0(\omega_1) - 2\omega_1 I_1(\omega_1) \right] - C_n \left[2\xi (\omega_2 I_0(\omega_2) - I_1(\omega_2)) \right] = f_n^{(1)}; \quad (19)$$

$$-A_n \left[2\xi \omega_1 I_1(\omega_1) \right] + C_n \left(\omega_2^2 + \xi^2 \right) I_1(\omega_{21}) = f_n^{(2)}, \quad (20)$$

де введено такі позначення:

$$\omega_1 = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2}; \quad \omega_2 = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2 \kappa^2};$$

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\bar{p}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n \left\langle A_{n-j} \left[(\omega_2^2 + \xi^2) G_{0,j}(1, \xi, \lambda^2) - 2G'_{0,j}(1, \xi, \lambda^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa^2 \lambda^2 \sum_{k=1}^j (j-k+1) G_{0,k}(1, \xi, \lambda^2) \right] + C_{n-j} \left[2\xi G'_{1,j}(1, \xi, \kappa^2 \lambda^2) \right] \right\rangle;$$

$$f_n^{(1)}(\xi) = \sum_{j=1}^n \left\langle A_{n-j} \left[2\xi G'_{0,j}(1, \xi, \lambda^2) - C_{n-j} \left[(\omega_2^2 + \xi^2) G_{1,j}(1, \xi, \kappa^2 \lambda^2) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \kappa^2 \lambda^2 \sum_{k=1}^j (j-k+1) G_{1,k}(1, \xi, \kappa^2 \lambda^2) \right] \right] \right\rangle;$$

$$G'_{\nu,j}(\rho, \xi, x) = \sum_{k=0}^j \frac{a_{j,k}}{k!} \left(\frac{x\rho}{2\sqrt{\xi^2 + x}} \right)^k \left[\sqrt{\xi^2 + x} I_{k+\nu-1}(\rho\sqrt{\xi^2 + x}) - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{\rho} I_{k+\nu}(\rho\sqrt{\xi^2 + x}) \right].$$

Розв'язок систем рівнянь (19), (20) відшукаємо у вигляді

$$A_n(\xi) = \frac{(\omega_2^2 + \xi^2) I_1(\omega_2) f_n^{(1)}(\xi) + [2\xi(\omega_2 I_0(\omega_2) - I_1(\omega_2))] f_n^{(2)}(\xi)}{(\omega_2^2 + \xi^2) I_0(\omega_1) I_1(\omega_2) - 2\omega_1 I_1(\omega_1) (\kappa^2 \lambda^2 I_1(\omega_2) + 2\xi^2 \omega_2 I_0(\omega_2))}; \quad (21)$$

$$C_n(\xi) = \frac{2\xi \omega_1 I_1(\omega_1) f_n^{(1)}(\xi) + [(\omega_2^2 + \xi^2) I_0(\omega_1) - 2\omega_1 I_1(\omega_1)] f_n^{(2)}(\xi)}{(\omega_2^2 + \xi^2) I_0(\omega_1) I_1(\omega_2) - 2\omega_1 I_1(\omega_1) (\kappa^2 \lambda^2 I_1(\omega_2) + 2\xi^2 \omega_2 I_0(\omega_2))}. \quad (22)$$

Формули (21), (22) дають змогу послідовно визначити всі $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$, а, отже, формально завершити побудову розв'язку вихідної задачі, який запишемо у вигляді ряду за поліномами Лагерра:

$$\phi(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \int_0^{\infty} A_{n-j}(\xi) G_{0,j}(\rho, \xi, \lambda^2) \cos(\xi \gamma) d\xi;$$

$$\psi(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \int_0^{\infty} C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho, \xi, \lambda^2 \kappa^2) \sin(\xi \gamma) d\xi;$$

$$u(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \int_0^{\infty} [A_{n-j}(\xi) G'_{0,j}(\rho, \xi, \lambda^2) - \xi C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho, \xi, \lambda^2 \kappa^2)] \cos(\xi \gamma) d\xi;$$

$$w(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \int_0^{\infty} [-\xi A_{n-j}(\xi) G_{0,j}(\rho, \xi, \lambda^2) + C_{n-j}(\xi) G'_{1,j}(\rho, \xi, \lambda^2 \kappa^2) + \rho^{-1} C_{n-j}(\xi) G_{1,j}(\rho, \xi, \lambda^2 \kappa^2)] \sin(\xi \gamma) d\xi.$$

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишова – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С 3–7.

LAGUERRE POLYNOMIALS METHOD IN DYNAMIC PROBLEM FOR LONG CYLINDER UNDER LOCAL AXISYMMETRIC LOADING

Igor Turchyn, Rostyslav Seredyuk

Ivan Franko National University of L'viv

The solution to the dynamic elasticity problem for long solid cylinder under the action of local axisymmetric loading is constructed using Laguerre polynomials method and integral Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.1999

**ВІДТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ ШВИДКОСТІ ВІТРУ В ПРИЗЕМНОМУ
ШАРІ АТМОСФЕРИ РЕГІОНУ****Богдан Гера***Львівський факультет Дніпропетровського державного
технічного університету залізничного транспорту*

Важливі науково-прикладні задачі (поширення забруднень в атмосфері, оцінка вітроенергетичного потенціалу території та ін.) для розв'язання потребують знання функції швидкості вітру в приземному шарі атмосфери. Головним джерелом отримання метеорологічних параметрів у цьому шарі є метеорологічні станції та пости. Поширення їхніх даних з точок вимірювань на решту території ускладнене тим, що у примежовому шарі атмосфери, особливо його приземній частині, великий вплив на рух повітря має його взаємодія з неоднорідною підстильною поверхнею. Швидкість і напрям вітру на сусідніх метеорологічних станціях можуть суттєво відрізнятися, особливо, якщо ці станції розміщені в різних ландшафтних зонах. Тому у разі відтворення функції швидкості вітру треба користуватися критеріями, які враховують фізичні властивості метеорологічних полів, зокрема залежність швидкості вітру від характеристик підстильної поверхні. Методика інтерполяції профілю середньої швидкості приземного вітру з урахуванням його залежності від шорсткості поверхні землі викладена в [1], а в праці [2] її поширено на модель температурно стратифікованого примежового шару. Ми розглянемо розвиток математичної моделі відновлення та методики обчислення функції швидкості приземного вітру в регіональному масштабі.

Проаналізуємо задачу відтворення територіального розподілу швидкості вітру в приземному шарі атмосфери, використовуючи дані з наявної мережі метеорологічних станцій та картографічної інформації про характеристики динамічно неоднорідної підстильної поверхні.

Уведемо в плані розглядуваного регіону, що займає двовимірну область D , систему координат xOy і позначимо точками (x_n, y_n) $n = \overline{1, N}$ місця розташування метеорологічних станцій. За вимірюваннями, які проводять на метеорологічних станціях, для кожної з них матимемо значення метеорологічних параметрів, у тому числі швидкості вітру та його напрямку на висоті флюгера. Наше завдання полягає у відтворенні (об'єктивному аналізі) векторної функції швидкості вітру в приземному шарі атмосфери області D залежно від горизонтальних координат x, y та висоти z , якщо відомі значення її компонент у точках нерегулярної сітки (x_n, y_n) .

Підстильна поверхня в області, над якою шукатимемо розподіл швидкості вітру, вважаємо неоднорідною. Це приводить до змін швидкості і напрямку вітру. Проте зі зростанням висоти вихори турбулентності, викликані взаємодією потоку, що набігає з поверхнею Землі, слабшають і на верхній межі примежового шару напруження турбулентного тертя, що суттєво впливають на рух приземного повітря, становлять близько 1% від їхніх

приземних значень. Це дає змогу під час розв'язування багатьох задач нехтувати впливом поверхні на рух вільної атмосфери і користуватися моделлю геострофічного вітру. Отже, якщо за значеннями компонент швидкості приземного вітру отримати складові геострофічного вітру на рівні межі приземного шару, тобто на висоті $z = H$, то швидкість вітру на цьому рівні може відновлюватись з узгодженням її компонент у рамках балансових співвідношень вільної атмосфери, що значно спрощує задачу.

Розрахункова схема задачі відновлення має такі кроки:

- а) отримання значень швидкості геострофічного вітру у точках вимірювань;
- б) інтерполяцію та узгодження з рівнянням нерозривності вектора швидкості вітру на рівні приземного шару в регіоні;
- в) перерахунок швидкості вітру у приземний шар з урахуванням шорсткості підстильної поверхні.

На першому кроці у разі обчислення зміни швидкості вітру з висотою враховують закономірності руху повітря у приземному шарі, що випливають з теорії подібності. Маючи картографічну інформацію, дані про швидкість вітру, тиск та температуру в околі метеостанцій, визначаємо для кожної з них внутрішні (динамічну швидкість u_* , та параметр, що визначає температурну стратифікацію атмосфери μ), а також зовнішні параметри приземного шару (шорсткість поверхні z_0 , числа Ro і S). Тоді в рамках наближення, що дає теорія подібності, отримуємо швидкість геострофічного вітру $|G_n|$ і кут α_{0n} – відхилення його напрямку від приземного.

Отримані компоненти швидкості на верхній межі приземного шару будемо ототожнювати з опосередкованими даними вимірювань швидкості в точках з координатами (x_n, y_n, H) . Їх використовуватимемо на другому кроці розрахункової схеми для відтворення функцій компонент швидкості $U(x, y)$, $V(x, y)$ в області D , які відповідають висоті $z = H$. Таку задачу можна ставити як задачу варіаційного числення в такому формулюванні: знайти компоненти швидкості $U(x, y)$, $V(x, y)$, що задовольняють рівняння нерозривності та мінімізують функціонал середньоквадратичного відхилення шуканих компонент функції швидкості геострофічного вітру від компонент, отриманих під час об'єктивного аналізу поля швидкості на основі спостережуваних значень G_{nx} , G_{ny} у точках (x_n, y_n) , $n = \overline{1, N}$.

Відтворену таким чином функцію швидкості вітру $\mathbf{V} = (U, V)$, відомості про покриття земної поверхні та рельєф місцевості далі використовують для знаходження параметрів приземного шару атмосфери та профілю швидкості вітру для довільної точки розглядуваної області D .

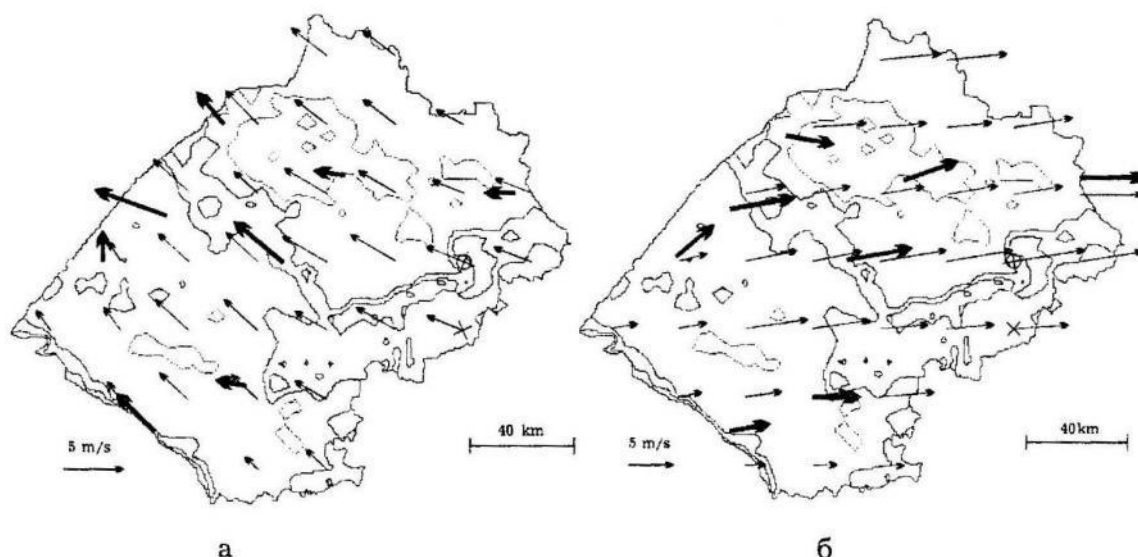
Зі збільшенням висоти z від поверхні землі зростає і площа ділянки, шорсткість з якої впливає на потік повітря. Позначимо для довільної точки (x, y) через D_H область, покриття поверхні якої впливає на швидкість вітру на висоті H . Нехай для довільної точки D_H складається з підобластей, що мають однорідну підстильну поверхню. Шорсткість поверхні j однорідної ділянки території D_H позначимо z_{0j} , а відповідну їй динамічну швидкість – u_{*j} . Тоді локальні турбулентні напруження визначимо за формулою

$\tau_{0j} = \rho u_{*j}^2$, а усереднене значення турбулентних напружень тертя запишемо у вигляді

$$\tau_0 = \sum_{j=1}^J \chi^{(j)} \tau_{0j} \equiv \rho \sum_{j=1}^J \chi^{(j)} u_{*j}^2.$$

Тут коефіцієнти $\chi^{(j)}$ ($\sum_{j=1}^J \chi^{(j)} = 1$) пропорційні до частини території з шорсткістю z_{0j} , що потрапила в D_H . Узагальнена динамічна швидкість, що відповідає напруженням τ_0

$$u_* = \left(\sum_{j=1}^J \chi^{(j)} u_{*j}^2 \right)^{1/2}.$$



Знаючи характер зміни функції швидкості вітру з висотою, знаходимо узагальнену шорсткість поверхні для області D_H . Зокрема, при стратифікації прилежого шару, близькій до нейтральної, коли має місце логарифмічний профіль швидкості вітру у приземному шарі, отримаємо

$$z_0 = h \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^J \chi^{(j)} \ln^{-2} \left(\frac{h}{z_{0j}} \right) \right)^{1/2} \right].$$

Рельєф місцевості враховуємо шляхом введення макрошорсткості z_{0H} , значення якої залежить від перепадів висот. Шорсткість мікронеоднорідностей z_0 і макрошорсткість z_{0H} використовуємо для розрахунків турбулентних напружень, за якими отримуємо динамічну швидкість, ефективну шорсткість Z_0 , значення і напрям швидкості вітру.

Для числових розрахунків та досліджень використовували синоптичні та картографічні дані Львівської та сусідніх областей. Досліджували вплив

урахування вимірювань кожної метеостанції на відновлення значень швидкості вітру в області. Обчислено вітроенергетичний потенціал у деяких її точках. Для ілюстрації результатів на рисунку показано відтворені значення швидкості вітру у рівнинній частині Львівської області на висоті 10 м у точках регулярної сітки (тонкі стрілки) за даними про швидкість на метеостанціях (товсті стрілки) при південно-східному (а) та західному (б) потоках. Відображено також лінії рівня рельєфу місцевості. Врахування рельєфу на відновлення швидкості вітру видно у разі порівняння векторів, отриманих у точках, позначених $\times$ та $\otimes$, які є недалеко, однак у різних ландшафтних зонах.

1. Джолов Г., Георгиева Е., Йорданов Д. Отчитане динимиката на планетарния граничен слой при интерполацията на приземния вятър // Българско геофизично списание. – 1988. – Т. 14, № 2. – С. 3–11.
2. Wieringa J. Roughness-dependent geographical interpolation of surface wind speed average // Quart. J. R. Met. Soc. – 1986. – Vol. 112. – P. 867–880.

THE REPRODUCTION OF WIND VELOCITY FUNCTION IN A NEAR THE GROUND LAYER OF ATMOSPHERE OF A REGION

Bogdan Gera

*Lviv faculty of the Dnipropetrovsk state technical university
of a railway transportation*

In the paper the mathematical model of the problem about reproduction near the ground wind velocity function is constructed. The possibility of obtaining correct results for the different landscape zones when the measuring are only in some parts of a territory is shown.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.1999

УДК 539.3

ТРИВІСНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПЛАСТИНІ, ЗВАРЕНИЙ ПРЯМОЛІНІЙНИМ ШВОМ

Олег Шаблій, Любов Цимбалюк

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

Під час зварювання листових конструкцій трапляються різні комбінації деталей, які з'єднуються прямолінійними швами. Залишкові напруження і деформації, які виникають, суттєво впливають на міцність, точність виготовлення і витривалість таких конструкцій. Для їхнього визначення широкого розповсюдження набувають розрахунково-експериментальні методи, зокрема метод умовних пластичних деформацій [1, 2], який ґрунтується на розв'язанні обернених задач механіки деформівних твердих тіл з власними напруженнями та використанні експериментальної інформації, отриманої за допомогою одного з неруйнівних методів або їх синтезу.

За таким підходом для певного класу полів залишкових пластичних деформацій, зумовлених зварюванням, визначають тривісний напружений стан у пластині (яка моделюється плоским шаром) з прямолінійним нескінченним стиковим швом.

Розглянемо рівновагу нескінченного шару завтовшки $2h$ під дією поля пластичних деформацій e_{ij}^0 . Віднесемо шар до декартової системи координат X_1, X_2, X_3 (рис. 1) і подамо компоненти тензора малої деформації у вигляді $e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^0$, $i, j = \overline{1, 3}$. Тут e_{ij} – компоненти тензора повної деформації; e_{ij}^0 – компоненти тензора пластичних деформацій; e_{ij}^e – компоненти тензора пружних деформацій. Введемо безрозмірну систему координат $x = X_1/h$, $y = X_2/h$, $z = X_3/h$ і спрямуємо вісь y уздовж осі шва, а вісь z уздовж нормалі до серединної поверхні пластини. Розглянемо випадок, коли пластина (шар) перебуває в умовах плоскої деформації і її поверхні $z = \pm 1$ вільні від навантаження, а поле e_{ij}^0 описується функціями $e_{xx}^0 = e_{xx}^0(x, z)$, $e_{yy}^0 = e_{yy}^0(x, z)$, $e_{zz}^0 = e_{zz}^0(x, z)$, $e_{xz}^0 = e_{yz}^0 = e_{xy}^0 = 0$. Тоді диференціальні рівняння рівноваги і суцільності деформацій у напруженнях та граничні умови можна записати у вигляді

$$\partial_1 \sigma_{xx} + \partial_2 \sigma_{zx} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{xz} + \partial_2 \sigma_{zz} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \sigma = \frac{E}{1-\mu^2} (\partial_1^2 e_{zz}^0 + \partial_2^2 e_{xx}^0 + \mu \nabla^2 e_{xy}^0), \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{xz}|_{z=\pm 1} = 0, \quad (3)$$

де σ_{xx} – поперечні, σ_{zz} – нормальні, а $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ – дотичні напруження; $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{zz}$, $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial z$, $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$. Поздовжні осьові напружен-

ня визначають за формулою

$$\sigma_{yy}(x, y) = -E e_{yy}^0 + \sigma. \quad (4)$$

Продиференціювавши перше рівняння (1) за x , а друге за y і виключивши дотичні напруження, отримаємо диференціальне рівняння для визначення нормальних напружень σ_{zz} через σ

$$\nabla^2 \sigma_{zz} = \partial_1^2 \sigma \quad (5)$$

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) використовуємо прямий метод інтегрування розв'язувальних рівнянь плоскої задачі теорії пружності у напруженнях [3]. Для цього граничні умови (3) для дотичних напружень з використанням другого рівняння рівноваги замінимо на граничні умови для похідної нормальних напружень

$$\partial_2 \sigma_{zz}|_{z=\pm 1} = 0. \quad (6)$$

Вираз для дотичного напруження можна записати у вигляді

$$2\sigma_{xz} = - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_2 \sigma_{zz}(\eta, z) \operatorname{sign}(x - \eta) d\eta. \quad (7)$$

Розглянемо випадок, коли пластина перебуває під дією симетричного стосовно серединної поверхні поля пластичних деформацій, компоненти якого зобразимо у вигляді

$$e_{xx}^0 = e_{xx}^0(x) f(z), \quad e_{yy}^0 = e_{yy}^0(x) f(z), \quad e_{zz}^0 = e_{zz}^0 f(z), \quad (8)$$

де $f(z) = 1 - mz^2$, m – числовий параметр.

Застосувавши до рівнянь (2), (5) інтегральне перетворення Фур'є і провівши, аналогічно [4], відповідні викладки, одержимо вирази для обчислення залишкових напружень у пластині, які можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma(x, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \Omega(s) [1 - 2\psi(s) \operatorname{ch} sz] - m\bar{\sigma}_0(s) [1 - z^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2s^{-2} - 4s^{-1}\psi(s) \operatorname{cth} s \operatorname{ch} s] \right\} \cos sx \, ds, \\ \sigma_{zz}(x, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \Omega(s) [1 + \psi(s) (sz \operatorname{sh} sz - (1 + s \operatorname{cth} s) \operatorname{ch} sz)] - \right. \\ &\quad \left. - m\bar{\sigma}_0(s) [1 - z^2 + 2\psi(s) (z \operatorname{cth} s \operatorname{sh} sz - \operatorname{ch} sz)] \right\} \cos sx \, ds, \\ \sigma_{xz}(x, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ s\Omega(s) \psi(s) (z \operatorname{ch} sz - \operatorname{cth} s \operatorname{sh} sz) + \right. \\ &\quad \left. + 2m\bar{\sigma}_0(s) [zs^{-1} - \psi(s) ((s^{-1} \operatorname{cth} s - 1) \operatorname{sh} sz + z \operatorname{cth} s \operatorname{ch} sz)] \right\} \sin sx \, ds, \\ \sigma_{xx}(x, z) &= \sigma(x, z) - \sigma_{zz}(x, z). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $\Omega(s) = -\bar{\sigma}_0(s) \left(1 - m - \frac{2m}{s^2}\right) + \frac{2m}{s^2} \bar{\sigma}_2(s)$, $\psi(s) = \frac{2 \operatorname{sh} s}{2s + \operatorname{sh} 2s}$,

$$\bar{\sigma}_0(s) = \frac{E}{1-\mu^2} (\bar{\epsilon}_{zz}^0 + \mu \bar{\epsilon}_{yy}^0), \quad \bar{\sigma}_2(s) = \frac{E}{1-\mu^2} (\bar{\epsilon}_{zz}^0 - \bar{\epsilon}_{xx}^0),$$

рисками зверху позначено відповідні величини у просторі зображень.

На основі аналізу літературних даних про розподіл пластичних деформацій біля шва [5, 6] функції $\bar{\epsilon}_{xx}$, $\bar{\epsilon}_{yy}$, $\bar{\epsilon}_{zz}$ апроксимуємо виразами

$$\bar{\epsilon}_{yy}^0 = -\bar{\epsilon}_1^* \bar{\epsilon}_T \varphi_1(x), \quad \bar{\epsilon}_{xx}^0 = \bar{\epsilon}_2^* \bar{\epsilon}_T \varphi_2(x), \quad \bar{\epsilon}_{zz}^0 = -\bar{\epsilon}_3^* \bar{\epsilon}_T \varphi_3(x), \quad |x| \leq x_0, \quad (10)$$

де

$$\varphi_i(x) = 1 - a_i \frac{x^2}{x_0^2} - (1 - a_i) \frac{x^4}{x_0^4}, \quad 0 \leq a_i \leq 2; \quad (11)$$

$\bar{\epsilon}_T = \sigma_T / E$; σ_T - границя плинності; $\bar{\epsilon}_i^*$ - безрозмірні параметри.

Для поля пластичних деформацій, що описується виразами (8), (10), (11) виконано числовий аналіз задачі. Обчислення зробили для металевої пластини ($\mu = 0.3$) при різних її товщинах і таких значеннях параметрів поля пластичних деформацій: $a_1 = a_3 = 2$, $x_0 = 1$, $m = 0$. Графіки побудовано для безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (E \bar{\epsilon}_T \bar{\epsilon}_1^*)$ при різних значеннях параметра $k = \bar{\epsilon}_3^* / \bar{\epsilon}_1^*$.

На рис. 1 зображено залежність поздовжніх $\tilde{\sigma}_{yy}$ напружень від відстані x від осі шва (а) і від відстані вздовж нормалі до поверхні z/h (б) для різних значень параметра k в перерізі $x = 0$.

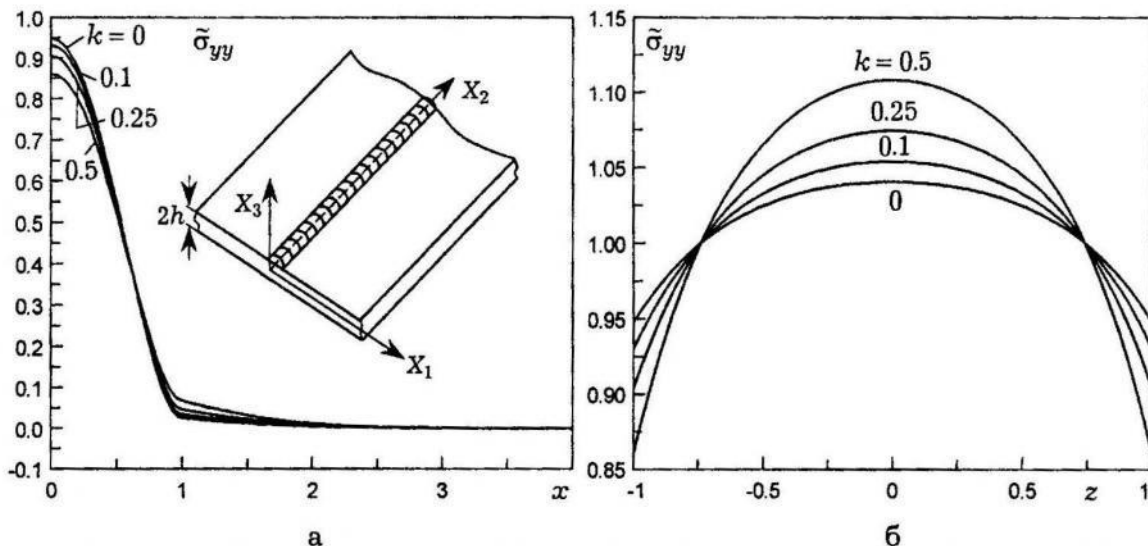


Рис. 1.

На рис. 2 зображено залежність нормальних $\tilde{\sigma}_{zz}$ (а) і поперечних $\tilde{\sigma}_{xx}$ (б) напружень від відстані z/h для різних значень параметра k в перерізі $x = 0$.

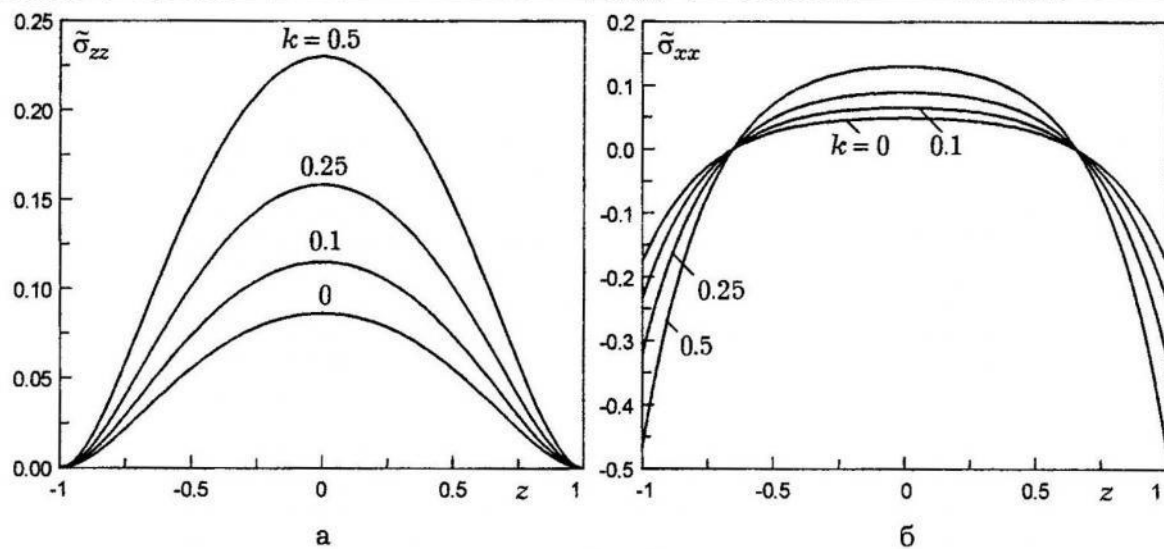


Рис. 2.

Як видно з графіків в околі шва є тривісний напружений стан. Максимальних значень напруження досягають на серединній поверхні пластини.

1. Сварные строительные конструкции: В 3-х т. / Под общей ред. Лобанова Л. М. – К.: Наук. думка, 1993. Т. I: Основы проектирования конструкций / Лобанов Л. М., Мехненко В. И., Труфяков В. И. и др. – 1993. – 416 с.
2. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Марголин А. М. Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: Наук. думка, 1991. – 296 с.
3. Вигак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
4. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
5. Касаткин Б. С., Прохоренко В. М., Чертов И. М. Напряжения и деформации при сварке. – К.: Вища школа, 1987. – 246 с.
6. Осадчук В. А., Шелестовська М. Я. Застосування математичного моделювання для визначення зварювальних залишкових напружень // Вісник держ. ун-ту «Львівська політехніка». – 1998. – № 337. – С. 246–248.

TRIAXIAL STRESSED STATE IN PLATE FROM A LINEAR WELD

Oleg Shabliy, Lyubov Tsymbalyuk

Ivan Pulyuy Ternopil' State Engineering University

Using the methods of conditional plastic strains and direct integration of resolving equations in stresses, the expressions are obtained to calculate the residual stresses in an infinite plate with a linear weld. The numerical analysis of the problem is carried out and it is shown that even in comparatively thin plates in the vicinity of the weld the extensional volume stressed state takes place.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.2000

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В СИСТЕМІ ШАР-ПІВПРОСТІР, ЗУМОВЛЕНЕ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА**Ольга Турчин***Львівський національний університет імені Івана Франка*

Розглянемо шар товщиною h , що лежить на масивному тілі (моделюється півпростором) з іншими теплофізичними характеристиками. Шар з певного моменту часу починають нагрівати джерела тепла, що рухаються по його вільній поверхні прямолінійно в додатному напрямі осі Oy зі сталою швидкістю v . Тепловий контакт між шаром і півпростором будемо вважати ідеальним, а початкову температуру шару і півпростору такою, що дорівнює нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерела тепла в напрямі перпендикулярному до напрямку руху, значно більші від товщини шару, а тому зміною температури в цьому напрямі знехтуємо (плоска задача).

Отже, задача полягає у відшуванні розв'язку двох рівнянь нестационарної теплопровідності

$$\partial_{\eta\eta}^2 T^{(i)} + \partial_{\zeta\zeta}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

за початкових

$$T^{(i)}(\eta, \zeta, 0) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

крайових

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_{\zeta} T^{(1)} = -q(\eta, \tau), \quad \zeta = 0; \quad (3)$$

$$T^{(2)} = 0, \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (4)$$

та умовах спряження

$$T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_{\zeta} T^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} \partial_{\zeta} T^{(2)}, \quad \zeta = 1. \quad (5)$$

Тут і надалі всі функції і величини з індексом «1» стосуються шару, а з індексом «2» – до півпростору; $T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau)$ – температура, $\eta = x/h$, $\zeta = y/h$, $\tau = a_0 t/h^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $q(\eta, \tau) = q(\eta) [S_+(v^* \tau + \tilde{l}) - S_+(v^* \tau - \tilde{l})] / (\lambda_T^{(0)} h)$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(0)}$, $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності; $\tilde{l} = l/h$, l – півдовжина рухомої смуги, на якій розташовані джерела тепла; $q(\eta)$ – закон розподілу густини джерел тепла по рухомій області; $v^* = v h/a_0$ – безрозмірна швидкість; $\lambda_T^{(0)}$, a_0 – деякі розмірні величини, які вибираємо згідно з завданнями числового аналізу.

Застосувавши до рівнянь (1), крайових умов (3), (4) та умов спряження (5) інтегральне перетворення Фур'є за змінною η та інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ , а також після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta \bar{T}_n^{(1)} \Big|_{\zeta=0} = -\bar{q}_n(\xi); \quad (7)$$

$$\bar{T}_n^{(2)} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = 0; \quad (8)$$

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta \bar{T}_n^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} d_\zeta \bar{T}_n^{(2)}, \quad \zeta = 1. \quad (9)$$

У формулах (6)–(9) $n = \overline{0, \infty}$; $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$

– зображення за Лагерром і Фур'є; $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра; $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$,

$\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$; λ – масштабний множник; $\bar{q}_n(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{v^*\tau-\bar{l}}^{v^*\tau+\bar{l}} q(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (6) наведемо у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \zeta) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \zeta) \right], \quad i = 1, 2; \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (10)$$

$$\text{де } G_j^{(i)}(\zeta, \omega_i) = e^{-\omega_i \zeta} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i \zeta)^k}{k!}; \quad W_j^{(i)}(\zeta, \omega_i) = e^{\omega_i \zeta} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i \zeta)^k}{k!}. \quad (11)$$

Коефіцієнти $a_{j,k}^i(\xi)$ у цьому разі задовольняють рекурентне співвідношення:

$$a_{j,k+1}^i = \frac{1}{2} \left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right),$$

де $a_{j,k}^i \equiv 0$, при $k > j$, а $a_{j,0}^i$ – довільні.

Задовольняючи умові на безмежності (8), одержимо

$$B_n^{(2)}(\xi) \equiv 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Прийmemo $a_{0,0}^i(\xi) \equiv 1$, $a_{j,0}^i \equiv 0$, $j = \overline{1, \infty}$. Тоді, задовольняючи крайову умову (7) та умови спряження (9) одержимо трикутну послідовність систем функційних рівнянь

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 & \omega_1 & 0 \\ e^{-\omega_1} & e^{\omega_1} & -e^{-\omega_2} \\ -\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 e^{-\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 e^{\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 e^{-\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)} \\ f_n^{(2)} \\ f_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\bar{q}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, 0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, 0) \right];$$

$$f_n^{(2)}(\xi) = \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\xi, 1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, 1) - B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, 1) \right];$$

$$f_n^{(3)}(\xi) = \sum_{j=1}^n \left[\tilde{\lambda}_T^{(2)} A_{n-j}^{(2)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(2)}(\xi, 1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(1)}(\xi, 1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta W_j^{(1)}(\xi, 1) \right].$$

З систем (13) невідомі $A_n^{(1)}(\xi)$, $B_n^{(1)}(\xi)$, $A_n^{(2)}(\xi)$ отримаємо у такому вигляді:

$$A_n^{(1)}(\xi) = \frac{-e^{\omega_1} (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \operatorname{ch}(\omega_1))},$$

$$A_n^{(2)}(\xi) = \frac{e^{-\omega_1} (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 - \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \operatorname{ch}(\omega_1))},$$

$$A_n^{(3)}(\xi) = \frac{-\tilde{\lambda}_T^{(1)} f_n^{(1)} - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1) f_n^{(2)} + \operatorname{ch}(\omega_1) f_n^{(3)}}{e^{-\omega_2} (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \operatorname{ch}(\omega_1))}. \quad (15)$$

Легко переконатись, що знаменник у формулах (15) (визначник матриці систем (14)) не перетворюється у нуль при довільних додатних дійсних значеннях ω_1 , ω_2 , а тому за формулами (15) можна послідовно обчислити всі невідомі $A_n^{(1)}(\xi)$, $B_n^{(1)}(\xi)$, $A_n^{(2)}(\xi)$.

Розв'язок вихідної задачі (1)-(5) одержимо у вигляді ряду за поліномами Лагерра

$$T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) e^{-i\xi\eta} d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \quad (16)$$

Приймемо, що густина джерел тепла є сталою. Тоді

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(\xi) &= q^* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{v^*\tau-\tilde{l}}^{v^*\tau+\tilde{l}} e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau = q^* \frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-iv^*\xi)\tau} L_n(\lambda\tau) d\tau = \\ &= q^* \frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \cos(v^*\xi\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \sin(v^*\xi\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right) = \\ &= q^* \frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi} (y_{c,n}(\xi) + iy_{s,n}(\xi)). \end{aligned} \quad (17)$$

Інтеграли $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$ у формулі (17) можна обчислити, проте зручніше використати те, що ці інтеграли є трансформантами за Лагерром від функцій $\cos(v^*\xi\tau)$ і $\sin(v^*\xi\tau)$ – розв'язків відповідних задач Коші:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_c + x^2 y_c &= 0, & y_c(0) &= 1, & \dot{y}_c(0) &= 0, \\ \ddot{y}_s + x^2 y_s &= 0, & y_s(0) &= 0, & \dot{y}_s(0) &= x, \end{aligned} \quad (19)$$

де $x = v^* \xi$.

Застосувавши до диференціальних рівнянь у (18) і (19) інтегральне перетворення Лагерра і врахувавши відповідні початкові умови, одержимо трикутні послідовності рівнянь

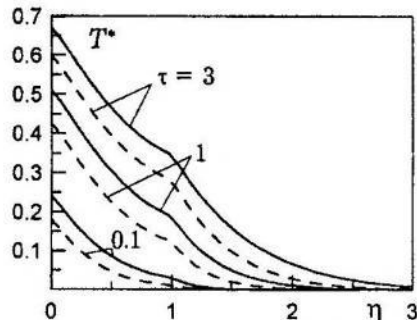
$$\lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) y_{c,m} + x^2 y_{c,n} = \lambda(n+1); \quad \lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) y_{s,m} + x^2 y_{s,n} = x.$$

Звідси випливають формули для визначення функцій $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$:

$$y_{c,n}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2 + (v^* \xi)^2} \left[\lambda(n+1) - \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) y_{c,m} \right];$$

$$y_{s,n}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2 + (v^* \xi)^2} \left[v^* \xi - \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) y_{s,m} \right].$$

За формулою (16) розраховано нестационарне температурне поле у неоднорідному тілі за таких значень вхідних параметрів: $\tilde{\lambda}_T^{(1)} = 1$, $\tilde{\lambda}_T^{(2)} = 0.162$, $\tilde{a}_1 = 1$, $\tilde{a}_2 = 0.131$, $\lambda = 1$, $\tilde{l} = 0.5$. У цьому випадку для забезпечення точності в межах 0.3% достатньо обмежитись тридцятьма членами ряду (16). На рисунку зображено залежність безрозмірної температури $T^* = T^{(1)}(1; \zeta; \tau_i) / q^*$ від глибини в різні моменти часу для двох значень безрозмірної швидкості v^* . Як видно з рисунка зі збільшенням часу температура півпростору збільшується інтенсивніше ніж температура шару, а зі збільшенням швидкості знижується як у шарі, так і у півпросторі.



1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С 3-7.

TRANSIENT TEMPERATURE FIELD IN LAYER-HALFSPACE SYSTEM DUE TO MOVING HEAT SOURCES

Olga Turchyn

Ivan Franko National University of L'viv

Transient plane problem of heat conduction for nonhomogeneous body consisting of layer and halfspace is considered. The changing temperature field in such a body due to moving heat sources is determined using Laguerre polynomials method and integral Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.1999

УДК 539.3

ПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ГІРСЬКИХ ПОРІД ПІД ДІЄЮ ГРАВІТАЦІЇ ТА СПІВНАПРЯМЛЕНИХ ТЕКТОНІЧНИХ СИЛ

Ольга Кузь

Львівський національний університет імені Івана Франка

Пластичність гірських порід, тобто їхня здатність до незворотних деформацій, може змінюватись протягом деформаційного процесу. Це пов'язано з дією багатьох чинників, зокрема зі зміною умов навантаження, тобто співвідношень силових чинників різної природи, впливом високих температур і тепломасоперенесення.

Завдяки дії спрямованих тектонічних сил середні нормальні напруження (тиски) вирівнюються на значних глибинах, причому їхні модулі різко зростають у межах верхньої кори порівняно зі стаціонарними режимами, коли напружений стан визначений передовсім гравітацією. Не менш значний вплив на рівень тисків мають температурні поля та об'ємні ефекти фазових перетворень у гірських породах [1].

Продовженням проведених в [1] розрахунків стало математичне моделювання в термопружнопластичному формулюванні розв'язуваних задач, яке дає змогу водночас оцінити як головні параметри тензора напружень, серед яких середні нормальні напруження, так і загальний потенціал пластичної деформації у разі різних комбінацій провідних силових чинників.

Розглянемо прямокутну ділянку Ω шириною $2L$ км, яка розташована на вертикальному зрізі земної кори та обмежена земною поверхнею і паралельною до неї площиною, яка лежить на глибині H км. Початок прямокутної декартової системи координат виберемо на вертикальній осі симетрії ділянки в точці на глибині H км. Вісь Ox спрямуємо вздовж горизонталі, вісь Oy – уздовж вертикалі (рис. 1). Отже,

$$\Omega = \{(x, y) \mid -L \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H\}.$$

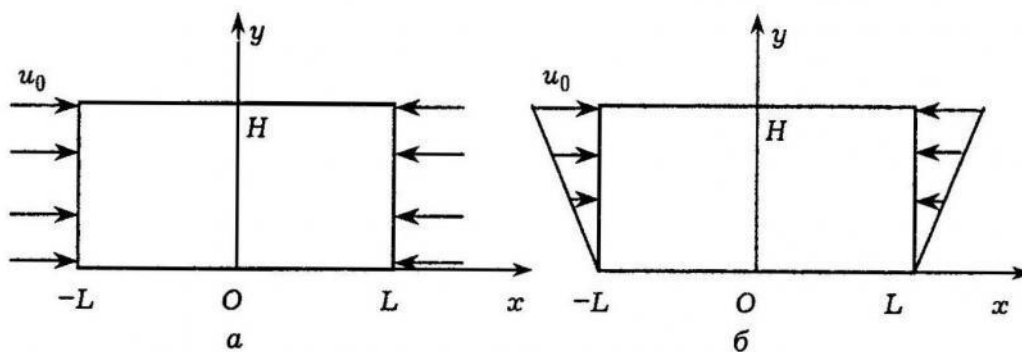


Рис. 1. Ділянка Ω і задані крайові умови: а – зі проковзуванням на нижній поверхні, б – із закріпленням нижньої поверхні.

Для розрахунку полів переміщень у ділянці Ω використаємо рівняння квазістатичної плоскої задачі термопружнопластичності

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + F_x - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + F_y - 3K\alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

де u, v – відповідно горизонтальне і вертикальне переміщення точок об'єму, $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ – відносна зміна об'єму; F_x, F_y – проекції вектора об'ємних сил на осі Ox та Oy відповідно, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення; T – різниця між початковою і поточною температурою; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; λ, μ – коефіцієнти Ляме, які у випадку деформаційної теорії пластичності для термально-однорідного тіла мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda(\varepsilon_{in}), \quad \mu = \mu(\varepsilon_{in}), \\
\lambda(\varepsilon_{in}) &= K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_{in}), \\
\mu(\varepsilon_{in}) &= \mu(1 - \omega(\varepsilon_{in})).
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут K, μ – відповідно, модулі об'ємного стиску і зсуву пружного середовища; $\omega(\varepsilon_{in})$ – функція пластичності Ільющина [2], $\varepsilon_{in} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ – інтенсивність тензора деформації; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – головні значення цього тензора.

Для оцінки рівня пластичних деформацій у земній корі застосуємо модель середовища, що лінійно зміцнюється. Для такого середовища функція $\omega(\varepsilon_{in})$ має вигляд

$$\omega(\varepsilon_{in}) = \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon_{in} \leq \varepsilon_y, \\ (1 - \gamma)(\varepsilon_{in} - \varepsilon_y)/\varepsilon_y, & \text{при } \varepsilon_{in} > \varepsilon_y. \end{cases}$$

де ε_y – межа плинності; γ – параметр зміцнення.

Будемо вважати, що верхня межа ділянки $\Omega y = H$ (рис. 1, а, б) вільна від навантаження $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, нижня межа $y = 0$ жорстко закріплена $u = v = 0$ (рис. 1, б) або на ній задані умови вільного проковзування $v = 0, \sigma_{xy} = 0$ (рис. 1, а), а на лівій і правій бічній межі (відповідно $x = -H, x = H$) задані горизонтальні переміщення (відповідно $u = u_0, u = -u_0$) і нема дотичних напружень $\sigma_{xy} = 0$. Завдяки силовій і геометричній симетрії задачі для розрахунків достатньо розглядати половину ділянки Ω (наприклад, ліву), задаючи на межі $x = 0$ умови жорсткої стінки $u = 0, \sigma_{xy} = 0$.

Оскільки задача незв'язана, то поле температур $T(x, y)$ вважаємо відомим після розв'язання задачі теплопровідності [3].

Аналітично розв'язати задачу (1), (2) практично неможливо. Числове розв'язування цієї задачі виконують методом Ньютона – Канторовича, на кожному кроці якого розв'язують лінійну задачу варіаційно-різницеvim методом, який ґрунтується на мінімізації класичного функціонала Лагранжа з урахуванням температурних членів.

Після знаходження поля переміщень напруження визначають за такими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - 3K\alpha T, \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - 3K\alpha T, \\ \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Побудовано значну кількість плоских моделей різних за розмірами геологічних систем з різними параметрами геологічних середовищ. Як приклад, розглянемо кілька варіантів розрахунків, які моделюють напружено-деформівний стан у межах тектонічної пластини, вертикальний розріз якої має розміри 3 км по вертикалі і 20 км по горизонталі (див, рис. 1). Крайові умови задані такі, як на рис. 1, а або на рис. 1, б. Пластина перебуває під дією сили гравітації та бічного стиску, який моделювали латеральними переміщеннями бічних поверхонь розмірами 40 м (рис. 2, а, г), 70 м (рис. 2, б, д), 100 м (рис. 2, в, е). У разі проковзування (рис. 1, а) бічні переміщення були однаковими по всій бічній поверхні, а у варіантах із прилипанням на нижній межі (рис. 1, б) вони були диференційованими і змінювались за лінійним законом від повного значення у верхній точці бічної поверхні до нуля – в нижній. У зображених на рис. 2 моделях параметри середовища задано такими: модуль Юнга $E = 30000$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.25$, модуль зміцнення $\gamma = 0.1$, межа плинності $\sigma_y = 240$ МПа, густина породи $\rho = 2.6$ кг/м³.

На підставі аналізу розрахованих полів напружень перш за все видно суттєві розбіжності за різних умов на нижній межі. У варіантах із проковзуванням (рис. 2, а, б, в) при допорогових рівнях нормальних і дотичних напружень простежується майже однорідне поле напружень (рис. 2, а), яке різко диференціюється з появою залишкових деформацій поблизу навантаженої бічної поверхні (рис. 2, б, в). В останніх випадках зона з високими середніми нормальними напруженнями (тисками) постійно розширюється, захоплюючи майже всю нижню частину системи і сприяючи розповсюдженню віртуальної пластичності. Варіанти ж із защемленою нижньою поверхнею та з навантаженням зсувного типу на бічних поверхнях (рис. 2, г, д, е) характерні тим, що вже при невеликих навантаженнях (рис. 2, г) фіксують залишкові деформації, які передаються підняттям верхньої поверхні поблизу навантаженої бічної. Судячи з рівня компонент тензора напружень, тут переважатиме крихке руйнування з порівняно невеликим розвитком пластичності.

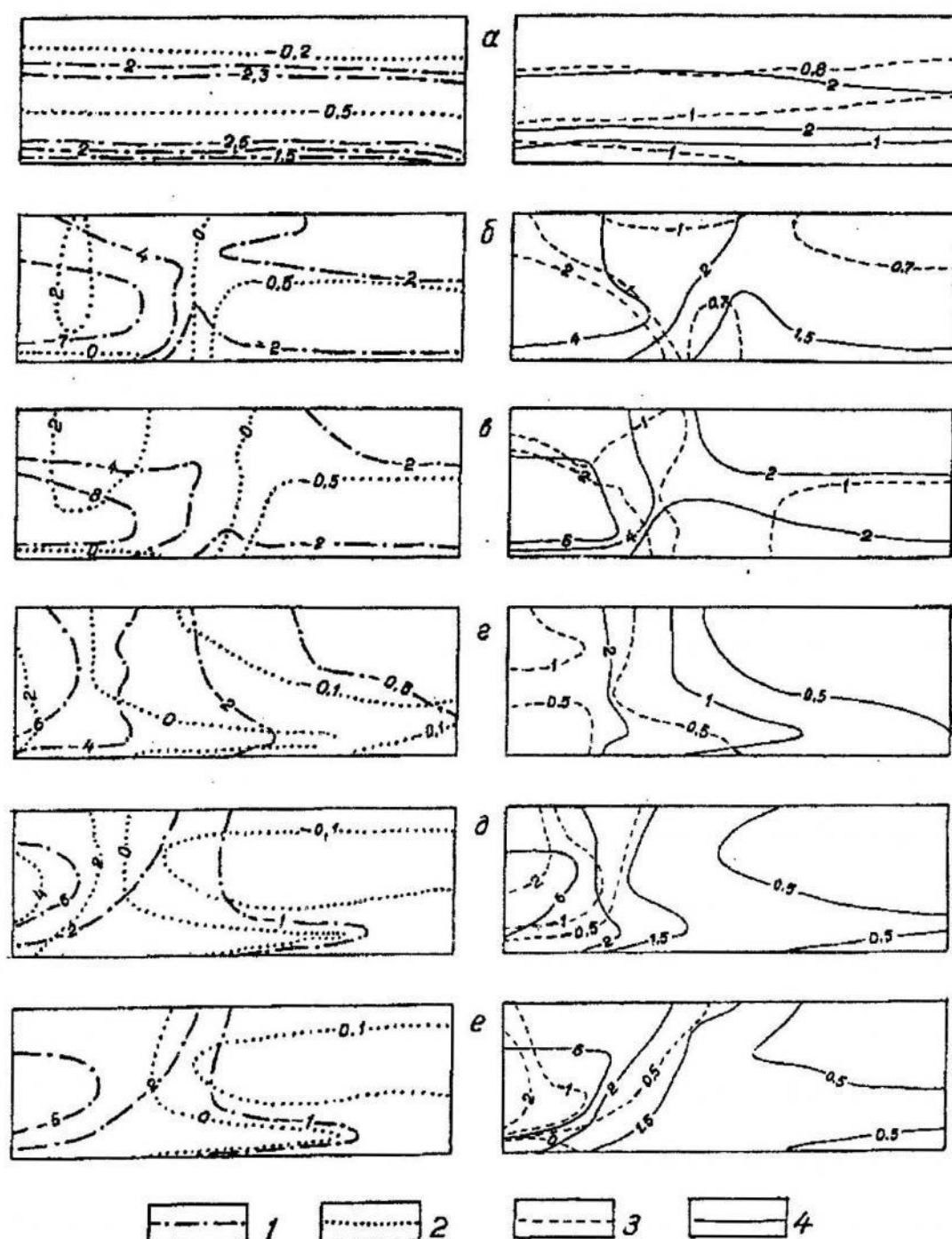


Рис. 2. Двовимірні моделі полів напружень і деформацій, спричинені гравітацією і бічним стиском (ліві частини ділянок): а, б, в – з умовами проковзування на нижній поверхні та з переміщенням на лівій бічній поверхні відповідно 40, 70 та 100 м; г, д, е – з умовами закріплення нижньої поверхні і з такими ж максимальними переміщеннями на лівій бічній поверхні; 1 – максимальні стисні напруження; 2 – мінімальні стисні (розтягуючі) напруження; 3 – середні нормальні напруження (бічний тиск); 4 – загальний потенціал залишкових деформацій.

Загалом, поза залежністю від характеру нижньої поверхні, в усіх моделях поле напружень має чітку зональність щодо навантаженої поверхні, поблизу якої загальний потенціал залишкових деформацій найбільший.

1. Шевчук В. В., Кузь І. С., Кузь О. Н. Давление как фактор метаморфизма и влияние на него тектонических сил // Тектоника, геодинамика и процессы магматизма и метаморфизма. – М.: ГЕОС, 1999. – Т. 2. – С. 298-302.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
3. Шевчук В. В., Лихачов В. В. Математическая модель поля напряжений, вызванного тепловой аномалией в упругой среде // Геофизический журнал. 1996. – Т. 18, № 6. – С. 74-80.

PLASTIC DEFORMATION OF MOUNTAIN BREEDS UNDER INFLUENCE OF GRAVITATION AND CODIRECTIONAL TECTONIC OF FORCES

Olga Kuz'

Ivan Franko National University of L'viv

The dependence of rheological properties fanerozoj rocks from one-directional tectonic forces and comprehensive pressure are investigated using the experimental data. The stress and strain fields are obtained based on the solution of two-dimensional problems of thermo-elasto-plasticity. These fields prove the dependence of comprehensive pressure and plasticity of the rocks from the levels of one -directional tectonic forces. The elaborated software gives the possibility to predict the main features of the paleotectonic stress fields in the crust with different boundary conditions, medium parameters and thermal fields.

Стаття надійшла до редколегії 14.11.1999

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ, ЩО РОЗМІЩЕНА НА ОПОРАХ

Василь Шваб'юк*, Ярослав Максимович**

* Луцький державний технічний університет

** Українська академія друкарства

Розглянемо контактну задачу теорії пружності для смуги, розміщеної на двох лінійних опорах, навантаженої вздовж межі $y = 0$ жорстким параболічним штампом та довільно прикладеними в точці (a_j, b_j) зосередженими силами X_j, Y_j . Прийнемо, що дотичних напружень під штампом нема, штамп діє в області $a \leq x \leq b$. Продовжимо дослідження сингулярного інтегрального рівняння задачі та його розв'язків, побудованих у [1]. Особливу увагу приділимо проблемі врахування явища часткового відлипання основи штампів від смуги.

Для побудови інтегрального рівняння для визначення напружень і переміщень під штампом скористаємось формулою [3]

$$2G(u' + iv') = (\chi + 1)\Phi(z) - [\sigma_y(x, 0) - i\tau_{xy}(x, 0)] \quad \text{при } z \rightarrow x, \quad (1)$$

де $u' + iv' = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv)$, $\Phi(z)$ – комплексний потенціал Мусхелішвілі, куди введені розв'язки типу Гріна; G – модуль зсуву; χ – відомий параметр [3].

Проаналізуємо детально задачу, коли невідома ліва межа контакту (величина a). Для розв'язування задачі використаємо відомий підхід, в якому будемо задавати a , а сила P , що діє на штамп, прийнемо як невідому. Інтегральне рівняння такої задачі запишемо у вигляді [1]

$$\int_a^b \sigma(\zeta)[K(x - \zeta) - \omega(x)]d\zeta + \Gamma = g_2(x), \quad (2)$$

$$\text{де } \omega(x) = -\left[\frac{c-B}{B-A}F(x-A) + \frac{A-c}{B-A}F(x-B)\right],$$

$$g_2(x) = 2Gf'(x) - g(x) - [Y_A^0 F(x-A) + Y_B^0 F(x-B)],$$

$$K(x) = (\chi + 1)\text{Im } \Phi_2(x, 0, 0); \quad F(x) = (\chi + 1)\Phi_2(x, 0, -H),$$

$$g(x) = (\chi + 1)\text{Im } \Phi_*(x); \quad f'(x) = \frac{df}{dx}; \quad \Gamma = -2G\varphi;$$

$$Y_A^0 = \frac{M + M_0 - BY_0}{B - A}; \quad Y_B^0 = -\frac{M + M_0 - AY_0}{B - A}; \quad Y_0 = \sum_{j=1}^M Y_j;$$

$$M_0 = \sum_{j=1}^M (-Y_j a_j - X_j b_j), \quad c = (a + b)/2;$$

$(A, -H), (B, -H)$ – точки прикладання реакцій опор Y_A, Y_B смуги; $f(x)$ – функція, якою описують основу штампа; a, b – межі області контакту; H – висота смуги; $\sigma(\zeta) = \sigma(\zeta, 0)$ – невідомі контактні напруження під штампом, які повинні задовольняти умови

$$\int_a^b \sigma(\zeta) d\zeta = P, \quad \int_a^b (\zeta - c) \sigma(\zeta) d\zeta = M. \quad (3)$$

Застосувавши до рівняння (1) та другої умови (2) квадратурну формулу Лобатто [4], отримаємо замкнену систему рівнянь:

$$\sum_{n=1}^{N-1} B_{nj} u_n + \Gamma = g_{2j}, \quad j = \overline{1, N-1};$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} L_n (x_n - c) u_n = M, \quad (4)$$

де

$$g_{2j} = g_2(x_j); \quad B_{nj} = L_n [K(x_j - \zeta_n) - \omega(x_j)];$$

$$x_j = l\eta_j + c, \quad \zeta_n = l\theta_n + c, \quad l = (b - a)/2,$$

$$\eta_j = \cos \pi \frac{j - 0,5}{N-1}, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad \theta_n = \cos \pi \frac{n-1}{N-1}, \quad n = \overline{1, N};$$

$$L_n = \frac{\pi}{N-1}, \quad n = \overline{2, N-1}; \quad L_n = \frac{\pi}{2(N-1)}, \quad n = 1, N.$$

Розв'язок задачі з двома наперед заданими межами контакту a і b шукаємо так само, як і в [1] – шляхом задання a і знаходження методом половинного ділення відповідної їй величини b . Їх визначаємо з системи рівнянь (4) при початкових наближеннях для b – величин b_1 і b_2 .

Розрахунки засвідчують, що при великих площинках контакту штамп відстає від смуги у внутрішніх точках. У таких випадках межі області контакту стають невідомими, і їх визначають з умови обмеженості напружень.

Для спрощення розглянемо такий випадок, коли прикладне навантаження і форма штампа є симетричними (тобто $a = -b$, $A = -B$, $\varphi = 0$), а штамп і смуга контактують в областях $(-b, -d)$, (d, b) . Рівняння (2) в цьому випадку набуде вигляду

$$\int_a^b \sigma(\zeta) [K(x - \zeta) + K(x + \zeta)] d\zeta - Pw(x) = g_2(x), \quad (5)$$

де прийнято, що напруження $\sigma(\xi) = \sigma(-\xi)$, якщо $-b < \xi < -d$. Додатковою умовою для $\sigma(\xi)$ є умова

$$\int_a^b \sigma(\zeta) d\zeta = P/2.$$

Зазначимо, що у наведених вище формулах треба прийняти таке:

$$c = 0, \quad M = 0, \quad M_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad g_2(x) = 2Gf' - g(x),$$

$$\omega(x) = \frac{B}{B-A} [F(x-A) + F(x-B)]. \quad (6)$$

Розв'язання такої задачі зводиться до низки лінійних рівнянь, шляхом задання наперед величинами d_i , (які є в околі початку координат) і визначення відповідних їм величин P . Рівняння (5) зводиться до розв'язання системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N-1} C_{nj} u_n = g_{2j}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

де $C_{nj} = L_n [K(x_j - \zeta_n) + K(x_j + \zeta_n) - 2\omega(x_j)]$.

Для визначення напружень у довільних точках межі смуги під штампом скористаємось співвідношеннями М.І. Мусхелішвілі [3], які (після застосування формули Племеля – Сохоцького) мають вигляд

$$\sigma(x_j, 0) = 4 \operatorname{Re} \Phi(x_j, 0) + \sigma(x_j), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(x_j) = & \int_a^b \sigma(\zeta) \Phi_2(x - \zeta, 0, 0) d\zeta + Y_A \Phi_2(x_j - A, 0, -H) + \\ & + Y_B \Phi_2(x_j - B, 0, -H) + \Phi_*(x_j), \end{aligned}$$

$$Y_A = \frac{c-B}{B-A} P + Y_A^0, \quad Y_B = \frac{A-c}{B-A} P + Y_B^0.$$

Використовуючи інтерполяційну формулу, побудовану на основі поліномів Чебишова другого роду [4], контактні напруження під штампом можна записати в такому вигляді:

$$\sigma(x_j) = \frac{u(x_j)}{\sqrt{(x_j - a)(b - x_j)}}, \quad (9)$$

де $u(x_j) = \frac{(-1)^{j+1}}{N-1} \sin\left(\pi \frac{j-0,5}{N-1}\right) \cdot \sum_{n=1}^N \varepsilon_n u_n (-1)^n \frac{1}{\eta_j - \theta_n}$, $\varepsilon_n = 1$ при $n \neq 1, N$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_N = 0,5$.

На підставі розроблених алгоритмів дослідимо напружено-деформований стан смуги, розміщеної на двох опорах і навантаженої штампом параболічної форми. Основу штампа описує функція $f(x) = \delta + x^2 / 2R$. Опори розміщені симетрично відносно штампа на відстані $2l$ одна від одної. Тут позначено: δ – осадка штампа, R – радіус кривини основи штампа. Результати розрахунків значень для безрозмірної величини $P^* = \frac{3}{4} \frac{lR}{GH^3} (\chi + 1)P$

залежно від області контакту $\beta = a/l$ і відносної довжини $2l/H$ зведені в таблиці.

Залежність значення P^* від $\beta = a/l$

$\beta = a/l$	0.1	0.2	0.6	0.8
$2l/H = 2$	0.045	0.173	0.840 (0.840)	1.225 (1.225)
$2l/H = 10$	0.890	1.138	1.995 (1.766)	3.186 (2.781)
$2l/H = 20$	1.101	1.230	2.282 (2.004)	3.990 (3.502)
Класична теорія	1.111	1.250	2.500 (2.500)	5.000 (5.000)

Значення в дужках обчислені з урахуванням ефекту відлипання штампів від смуги.

Зазначимо, що значення P^* для $2l/H = 20$ і $a/l = 0,03; 0,1; 0,6$ і $0,8$ з точністю до 0.1% збігаються з даними, наведеними в [2] для випадку плоского деформованого стану, якщо не враховувати ефект відлипання штампів від смуги при великих областях контакту. Водночас для малих областей контакту $\theta < 0.1$ значення P^* збігаються для обох випадків.

1. Гембара В. М., Максимович Я. В., Шваб'юк В. І. Пружна рівновага смуги, навантаженої штампом та зосередженими силами // Наук. зап. Укр. акад. друкарства. Сер. природн. наук. – Львів, 1999. – Вип. 1. – С.129.
2. Григор'юк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 323 с.

A CONTACT PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR THE STRIP DISPOSED UPON SUPPORTS LOADED

Vasyl Shvabjuk*, Jaroslav Maxymovytsh**

* Luts'k State Technical University

** The Ukrainian academy of a print

A contact problem of elasticity theory for the strip disposed upon two supports loaded with rigid parabolic die and randomly concentrated a force is considered. There is an example of figure calculates.

Стаття надійшла до редколегії 11.01.2000

ЗМІСТ

Сулим Георгій Історія кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка	3
Хлебніков Дмитро, Гриліцький Дмитро, Сулим Георгій Михайло Петрович Шереметьєв (до 95-річчя від дня народження).....	10
Андрійчук Василь Про групи розкладу нормувань псевдоглобальних полів	24
Барвінський Анатолій, Гонтар Владислав Коливання стрижневих систем змінного перерізу з нелінійним законом пружності	30
Божидарник Віктор, Максимович Олеся Інтегральні рівняння другої основної задачі теорії пружності для багатозв'язної анізотропної пластинки	34
Вігак Василь, Токовий Юрій, Ричагівський Андрій Розв'язки плоских задач пружності та термопружності для прямокутної області	38
Шацький Іван Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям	42
Гачкевич Микола, Гуменчук Орест, Чорний Борис Методика оптимізації режимів нагрівання конвективним способом і джерелами тепла кусково-однорідних оболонок обертання.....	48
Гачкевич Олександр, Касперський Зигмунт Термомеханіка намагнічуваних і поляризованих електропровідних тіл у випадку дії квазіусталених електромагнітних полів	52
Гачкевич Олександр, Курницький Тарас, Терлецький Ростислав Модель термомеханіки тіл низької електропровідності в квазіусталених електромагнітних полях радіо- та інфрачервоного діапазону ..	56
Гольцев Аркадій, Шевченко Володимир Фундаментальний розв'язок термопружності ортотропних циліндричних оболонок	60
Воробель В'ячеслав, Реут Віктор Концентрація напружень біля вершин поперечної тріщини у коробчастій оболонці	64
Дівеев Богдан, Микитюк Олег, Тимошенко Надія Визначення характеристик гумових амортизаторів	68
Жидик Уляна Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок	72
Калоєров Стефан, Горянська Олена, Шаповалова Юлія Напружений стан анізотропної платівки з еліптичним пружним включенням за наявності тріщини або лінійного жорсткого включення	76
Космодам'янський Олександр, Нескородев Роман Кручення ортотропного тонкостінного призматичного стрижня з еліптичним отвором на боковій поверхні	80
Кулик Олександр, Махоркін Ігор, Сеник Андрій Узагальнене температурне поле термочутливого півпростору, зумовлене опромінюванням концентрованим потоком енергії (КПЕ).....	84

Максимук Олександр Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям	88
Мандзик Юрій Дослідження єдиності та стійкості розв'язку нестационарної задачі термопружності для порожнистого ортотропного циліндра з Урахуванням нелінійності контактного термоопору	93
Михайлишин Михайло, Капаціла Ірина Великі осесиметричні пружно-пластичні деформації круглих пластин у процесах формоутворення	97
Моїсєєв Микола, Янковий Віктор Задача про концентрацію напружень біля двох тріщин, які перетинають лінію зміни матеріалів складеної пружної площини	101
Мусій Роман, Швець Лідія, Мельник Наталія Термопружні процеси в довгому порожнистому електропровідному неферомагнітному циліндрі при імпульсних електромагнітних діях	106
Онишкевич Володимир, Новосад Володимир Задачі про взаємодію осесиметричних термопружних тіл зі змінною ділянкою контакту	110
Онишко Олексій Моделювання фізико-механічних процесів у композитах, армованих короткими волокнами	115
Опанасович Віктор Термопружна контактна задача для пластини з тріщиною по дузі кола	120
Опанасович Віктор, Селіверстов Роман Напружений стан плити з двома прямолінійними колінеарними тріщинами за теорією Рейсснера	124
Пир'єв Юрій Дослідження руху тіла типу зчеплення-ковзання з урахуванням фрикційного теплоутворення та зносу	128
Попов Геннадій, Вайсфельд Наталія Динамічна нестационарна змішана задача для зрізаного кругового порожнистого конуса	133
Попович Василь, Гарматій Галина Розв'язування нелінійних задач теплопровідності термочутливих тіл методом поетапної лінеаризації	137
Пороховський Василь, Кунець Ярослав, Міщенко Віктор, Желавська Ірина Напружено-деформований стан біля гострої вершини жорстко підкріпленого м'якого включення	142
Процюк Борис Функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору	146
Рибак Тимофій, Олексюк Василь, Перчишин Володимир Механіка руйнування у пошуковому конструюванні мобільних машин	154
Стадник Мирон, Горбачевський Ігор Плоска деформація тіла з періодичними системами жорстких еліптичних включень	158
Сухорольський Михайло Узагальнений сингулярний розв'язок динамічної задачі для оболонки Тимошенка	162
Сяський Андрій, Сяський Володимир Двосторонній контакт двозв'язних симетричних гострокутних штампів з криволінійним отвором нескінченної пластинки	166

Тисовський Любомир Модель тонкого криволінійного термопружного включення	170
Турчин Ігор, Середюк Ростислав Метод поліномів Лагерра в динамічній задачі для пружного циліндра при локальному осесиметричному навантаженні	174
Гера Богдан Відтворення функції швидкості вітру в приземному шарі атмосфери регіону	178
Шаблій Олег, Цимбалюк Любов Тривісний напружений стан у пластині, звареній прямолінійним швом	182
Турчин Ольга Нестационарне температурне поле в системі шар-півпростір, зумовлене рухомим джерелом тепла	186
Кузь Ольга Пластична деформація гірських порід під дією гравітації та співнаправлених тектонічних сил	190
Шваб'юк Василь, Максимович Ярослав Контактна задача теорії пружності для смуги, що розміщена на опорах	194

CONTENTS

Georgij Sulym History of chair of mechanics of Ivan Franko Lviv national university	3
Hlebnikov Dmytro, Hrylits'ky Dmytro, Sulym Georgij Mykhajlo Petrovych Sheremetjev (to 95 th birth anniversary)	10
Vasyl Andriychuk On decomposition groups of valuations of pseudoglobal fields	24
Barvinsky Anatoly, Gontar Vladislav Oscillations of rod systems with variable area of cross-section with the non-linear principle of elastic	30
Bozidarnik Victor, Maxymovytch Olesia Integral equations of non-asitropes elastic plates with holes	34
Vihak Vasyl, Tokovyi Yuriy, Rychagivsky Andriy Solutions to the plane elasticity and thermoelasticity problems for a rectangular region	38
Shatsky Ivan Model of crack in plate with flexible covering	42
Gachkevich Mykola, Humenchuk Orest, Chorny Borys Optimal heating of piece-wise homogeneous shells of revolution by convection and heat sources	48
Gachkevich Aleksandr, Kasperski Zygmunt Thermomechanics of polarizable and magnetizable electroconductive bodies subjected to quasisteady electromagnetic fields	52
Gachkevich Alexandr, Kournyts'kyi Taras, Terletskii Rostyslav Thermomechanics of low electroconductive solids in quasisteady electromagnetic fields of radio- and infrared range	56
Goltsev Arkadiy, Shevchenko Vladimir Fundamental solution of thermoelasticity for orthotropic cylindrical shells	60
Vorobel Viacheslav, Reut Victor Stress concentration near the ends of a cross crack in a box shell	64
Diveiev Bogdan, Mykytiuk Oleg, Tymoshenko Nadia Determination of the performances for elastic shock absorbers	68
Zhydyk Ulyana Mathematical modeling the thermomechanical behavior of nonhomogeneous elastic anisotropic shells	72
Kaloerov Stefan, Goryanska Olena, Shapovalova Yulia Stress state of the anisotropic plate with elliptic elastic inclusion and crack or linear rigid inclusion	76
Kosmodamiansky Alexander, Neskorochev Roman Torsion of an orthotropic thin-walled prismatic rod with an elliptic hole on a lateral area	80
Kulyk Olexandr, Makhorkin Ihor, Senyk Andriy Generalized temperature field in a thermosensible half-space caused by concentrated energy flux radiation	84
Maksymuk Oleksandr Contact problem about wear of rigid body with thin surface	88

Mandzyk Yuriy Investigation of Uniqueness and stability of transient thermoelasticity problem solution for hollow orthotropic cylinder with nonlinear contact thermal resistance	93
Mychajlyshyn Mychajlo, Kapatsila Iryna Major axis symmetry elastoplastic deformations of round plates in the shape formation processes	97
Moiseyev Mykola, Yankoviy Victor The problems of stress concentration by two cracks crossed a materials change line of a composite elastic plane	101
Musij Roman, Shvets Lidiya, Melnyk Nataliya Thermoelasticity processes in the long hollow electroconductive non-ferromagnetic cylinder with impulse electromagnetic influence	106
Onyshkevych Volodymyr, Novosad Volodymyr Discretization of problem about interaction of axially symmetrical thermoelastic bodies with changeable contact area	110
Onyshko Oleksij Modelling of physicomachanical processes in composites reinforced with short fibres	115
Opanasovych Victor Thermoelastic contact problem about plate with crack lying on the arc of circle	120
Opanasovych Victor, Seliverstov Roman Stress state in the plate containing two straight colinear cracks by Reissner theory	124
Pyryev Yuriy Generation of frictional heat in a stick-slip motion of elastic solids	128
Popov Gennadiy, Whitefield Natalia Dynamic nonstationary mixed problem for the cutted circular hollow cone	133
Popovych Vasyl, Harmatij Galyna Solution of the nonlinear heat conduction problems for thermosensitive bodies by the stage-by-stage linearization method	137
Porochovs'ky Vasyl, Kunets Yaroslav, Mishchenko Victor, Zhelavs'ka Iryna The stressed-strained state near a sharp tip of rigid reinforced soft inclusion	142
Protsiuk Boris Green's displacement functions of elasticity axisymmetric problem for a piecewise-homogeneous half-space	146
Rybak Tymophiy, Oleksyuk Vasyl, Perchyshyn Volodymyr The mechanics fracture of the designing of mobile machines	154
Stadnyk Myron, Horbachevskyj Ihor Plane deformation of a body With the periodical arrays of rigid elliptical inclusions	158
Sukhorolsky Mikhaïlo Generalized singular solution of the dynamic problem for Timoshenko's shell	162
Syasky Andriy, Syasky Volodymyr The two-sided contact of doubly-connected symmetric acute-angled stamps with curvilinear aperture in endless plate	166

Tisowskij Lubomir A model of a thin curvilinear elastic inclusion for the planar problem of thermoelasticity	170
Turchyn Igor, Seredyuk Rostyslav Laguerre polynomials method in dynamic problem for long cylinder under local axisymmetric loading	174
Gera Bogdan The reproduction of wind velocity function in a near the ground layer of atmosphere of a region	178
Shabliy Oleg, Tsymbalyuk Lyubov Triaxial stressed state in plate from a linear weld	182
Turchyn Olga Transient temperature field in layer-halfspace system due to moving heat sources	186
Kuz' Olga Plastic deformation of mountain breeds under influence of gravitation and codirectional tectonic of forces	190
Shvabjuk Vasyl, Maxymovytsh Jaroslav A contact problem of elasticity theory for the strip disposed upon supports loaded	194

Збірник наукових праць
ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 57

Видається з 1965 року

Підп. до друку *1602*2001. Формат 70x100/16. Папір друк.
Обл.-вид. арк. 13.86. Гарнітура Journal. Наклад 200 прим. Зам. № *72*.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41

