

УДК 517.537.72

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ У ЛЬВІВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ У ПІСЛЯВОЄННИЙ ПЕРІОД

МИРОСЛАВ ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка

Проблемами математичного та комплексного аналізу у Львівському університеті займалось багато математиків ще до Другої світової війни. Ми розглянемо розвиток цих напрямів сучасної математики у період з 1945 до 1999 року.

Польські математики виїхали на Батьківщину в 1945 р. і до Львова запросили провідних учених з різних міст тодішнього Радянського Союзу. Серед запрошених були спеціалісти з теорії функцій С.М.Нікольський, О.С.Кованько та Л.І.Волковиський. Разом з С.М.Нікольським до Львова приїхав І.Г.Соколов. С.М.Нікольського зарахували професором кафедри геометрії. Побувши у Львові декілька днів, він повернувся назад до Москви. І.Г.Соколов залишився працювати у Львові, де створив невелику школу з конструктивної теорії функцій і підготував декілька кандидатів наук (В.О.Гукевич, Б.В.Ковальчук, З.В.Зарицька, О.О.Іванова і В.Г.Коменар-Амелькович).

У Львові І.Г.Соколов отримав нову асимптотичну формулу для констант Лебега та оцінку норм інтерполяційних тригонометричних поліномів з рівновіддаленими вузлами, які розглядали як оператори з $C_{[0,2\pi]}$ в $C_{[0,2\pi]}$. Декілька результатів він одержав у теорії наближень певних класів функцій поліномами С.Н.Бернштейна. Учні І.Г.Соколова займались в основному питаннями наближення різних класів функцій однієї та багатьох змінних тими чи іншими поліномами.

О.С.Кованько прибув до Львова з Томська і заснував у Львові школу з теорії майже періодичних функцій. До цієї школи належать Л.М.Лісевич та Я.Г.Притула.

О.С.Кованько вивчав майже періодичні за Вейлем функції з класу, який є замиканням (у певній метриці) множини скінченних тригонометричних сум. Цей простір неповний і О.С.Кованько одержав умови, за яких збіжна в собі послідовність елементів цього простору має границю. Ці результати він застосував до вивчення компактності сім'ї майже періодичних функцій за Вейлем. Таку ж проблему О.С.Кованько дослідив і для майже періодичних функцій за Левітаном. Крім того, О.С.Кованько займався питаннями застосування теореми Фішера-Рісса до майже періодичних функцій за Вейлем, разом з О.М.Костовським досліджував квадровність поверхонь у розумінні Лебега.

Л.М.Лісевич вивчав майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь гіперболічного типу з майже періодичними коефіцієнтами, а Я.Г.Притула займався теорією наближень майже періодичних функцій тригонометричними

многочленами в інтегральній метриці та ознаками збіжності рядів Фур'є майже періодичних функцій.

Найсильнішою є школа з комплексного аналізу, яку заснував Л.І.Волковиський. Він приїхав до Львова з Москви у 1948 р., а виїхав зі Львова до Пермі в 1955 р. За цей період Л.І.Волковиський виховав багато учнів, серед яких всесвітньо відомі математики П.П.Белінський, І.І.Данилюк, А.А.Гольдберг, Ю.Ю.Трохимчук, І.М.Песін, В.Г.Михальчук, Г.В.Сірик та інші.

Л.І.Волковиський займався проблемою типу однозв'язних ріманових поверхонь та квазіконформних відображень. У цих напрямках він отримав багато фундаментальних результатів, які викладені в його монографіях: "Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности" (1950) і "Квазиконформные отображения" (1954). У світовій математичній науці ці монографії були першими зі згаданої тематики, а "Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности" і до сьогодні залишилась єдиною.

Теорією квазіконформних відображень займався також П.П.Белінський. Застосовуючи варіаційну теорію до вивчення квазіконформних відображень, він у львівський період своєї діяльності одержав багато фундаментальних результатів, серед яких є класична теорема Белінського-Тейхмюллера.

І.М.Песін ввів поняття Q -квазіконформного відображення і разом з П.П.Белінським довів теорему існування та єдиності таких відображень, довів замкнутість класу Q -квазіконформних відображень та їхню абсолютну неперервність.

З проблемою класифікації ріманових поверхонь тісно пов'язані питання про усунні множини особливостей аналітичних функцій. Їх досліджував Ю.Ю.Трохимчук, який розглянув певні характеристики множин особливостей, які є усунними для аналітичних функцій із скінченим інтегралом Діріхле. Він розвинув також теорію ядра послідовностей ріманових поверхонь і одержав вагомі результати в питаннях моногенності.

І.І.Данилюк проводив дослідження на стику теорій диференціальних рівнянь і ріманових поверхонь. Він вніс певний вклад у теорію аналітичних функцій на ріманових поверхнях.

А.А.Гольдберг, навчаючись в університеті, а потім працюючи вчителем в с. Заболотцях, досліджував дефектні значення мероморфних функцій. Отримані ним результати окремими параграфами увійшли в монографію відомого англійського математика У.Хеймана "Meromorphic functions" (1964), яку переклали на російську мову в 1966 р. Ці параграфи так і називались: "Приклади типу прикладів Гольдберга" та "Теорема Гольдберга про середні значення аналітичних функцій."

У 1955 р. Л.І.Волковиський виїхав до Пермі. Майже одночасно з ним Львів покинули і його учні. П.П.Белінський опинився в Новосибірську, Ю.Ю.Трохимчук – у Києві, І.І.Данилюк – у Москві. А.А.Гольдберг виїхав із Заболотців до Ужгорода.

У Львові залишився тільки І.М.Песін, якого цікавила теорія функцій дійсної змінної. Він і С.П.Пономарьов досліджували симетрично неперервні та симетрично диференційовні функції. Разом з М.Т.Бродович займалися теорією простих кінців, а з І.Я.Олексівим – площами поверхонь. Тільки один з його учнів А.П.Копилов досліджував квазіконформні відображення. І.М.Песін активно займався теорією інтеграла, історією розвитку поняття інтеграла. Ці дослідження сприяли появі добре відомої його монографії "Теория интеграла". Незважаючи

на науковий потенціал та ентузіазм І.М.Песіна, йому не вдалось закріпити в університеті школу з теорії функцій, оскільки в кінці 60-х років зі Львова виїхали С.П.Пономарьов і А.П.Копилов.

У шістдесятих роках у Львівському університеті виникла школа О.М.Костовського, до якої входили І.В.Вітенько, І.Г.Чулик, А.І.Кардаш та Г.Г.Цегелик. Основний напрям цієї школи – локалізація нулів функцій, заданих тими чи іншими рядами з застосуванням в обчислювальній математиці. В основу такої локалізації покладено теорію мажорант Ньютона.

Школа з комплексного аналізу відновила свою роботу з приходом у 1963 р. у Львівський університет А.А.Гольдберга. Він створив у 1964 р. семінар, який назвали "Львівським міжвузівським семінаром з теорії аналітичних функцій". Першими учасниками цього семінару були Д.Б.Потягайло, Ф.Й.Гече, Т.В.Строчик, А.А.Кондратюк, М.М.Шеремета. А.А.Гольдберг у 1965 р. захистив докторську дисертацію.

Наукові погляди А.А.Гольдберга у львівський період (1964–1997) були дуже широкими. Кожен його учень одержав задачу, яка була певним напрямом у комплексному аналізі. Ф.Й.Гече досліджував функції багатьох комплексних змінних та аналітичну теорію систем диференціальних рівнянь у частинних похідних; Т.В.Строчик – аналоги теорем Варшавського про відображення півсмуг; А.А.Кондратюк – зв'язок між розподілом нулів цілих функцій та їхніми індикаторами; М.М.Шеремета – зв'язок між зростанням функцій та поведінкою її тейлорових коефіцієнтів; Г.С.Прокопович – суперпозиції аналітичних функцій; М.О.Гірник – аналітичні функції в одиничному крузі; В.Д.Мохонько – логарифмічні похідні мероморфних функцій; А.З.Мохонько – аналітичну теорію диференціальних рівнянь; О.Е.Єрьоменко – асимптотичні значення мероморфних функцій; М.Є.Коренков – асимптотику похідних від логарифмічної похідної цілої функції; М.В.Заболоцький – мероморфні та субгармонійні функції повільного зростання. Питання теорії розподілу значень цілих, мероморфних та субгармонійних функцій досліджували й інші учні А.А.Гольдберга: О.Н.Фрідман, Є.В.Глейзер, О.П.Соколовська, В.А.П'яна.

А.А.Гольдберг, окрім зазначених результатів про дефекти мероморфних функцій, розробив теорію інтеграла по напівадитивній мірі з застосуванням до оцінок індикаторів цілих функцій, разом з Й.В.Островським одержав багато важливих результатів у теорії характеристичних функцій ймовірнісних законів, спрогнозував глибокі застосування ріманових поверхонь до дослідження розподілу значень мероморфних функцій, вивчав розподіл значень мероморфних функцій за аргументами, цікавився багатьма іншими проблемами комплексного аналізу. Низка результатів А.А.Гольдберга увійшла до монграфій різних математиків. Він разом з Й.В.Островським опублікував у 1970 р. монографію "Распределения значения мероморфных функций." А.А.Гольдберг допомагав своїм учням розв'язувати сформульовані задачі. В останні роки наукової діяльності у Львові А.А.Гольдберг разом з М.М.Шереметою досліджували цілі функції обмеженого індекса, довів гіпотезу С.Шаха про обмеженість індексу функції типу Міттаг-Леффлера. В 1997 р. А.А.Гольдберг виїхав до Ізраїлю. Зі школи А.А.Гольдберга докторські дисертації захистили М.М.Шеремета, О.Е.Єрьоменко, А.А.Кондратюк, А.З.Мохонько, Б.В.Винницький, О.Б.Скасків, М.В.Заболоцький.

А.А.Кондратюк продовжив дослідження А.А.Гольдберга, опублікував багато

статей у солідних математичних журналах про зв'язок між поведінкою цілої функції і розподілом її нулів, одержав непокрашені оцінки індикатора.

М.М.Шеремета ввів узагальнені порядки і в цих термінах вивчив зв'язок між зростанням аналітичних функцій та поведінкою її тейлорових коефіцієнтів, досліджував асимптотику функцій типу Міттаг-Леффлера і з їхньою допомогою довів точність оцінок у теорії відхилень мероморфних функцій, яку розробив В.П.Петренко.

Ф.Й.Гече вивчав системи цілих функцій багатьох комплексних змінних і звернув увагу на їхнє застосування в теорії диференціальних рівнянь, довів непокрашеність умови на показники цілого ряду Діріхле, за якої правильна формула Рітта.

Використовуючи теорему Белінського-Тейхмюллера, Т.В.Строчик значно уточнив теорему Варшавського про відображення півсмуг.

У 1967 р. О.М.Костовський захистив докторську дисертацію з теорії локалізації нулів різних класів аналітичних функцій. Протягом наступних двадцяти років не було захищено жодної докторської дисертації з математики у Львівському університеті. На механіко-математичному факультеті посилювалась комуністично-партійна робота.

Завершивши навчання в аспірантурі, Ф.Й.Гече і Т.В.Строчик пішли з університету. У 1970 р. М.М.Шеремета поїхав працювати до Дрогобича, а А.А.Кондратюк – в Алжир. Семінар з теорії аналітичних функцій став науково-навчальним семінаром для аспірантів А.А.Гольдберга.

А.А.Кондратюк і М.М.Шеремета в 1974 р. повернулись до Львова. Через два роки до аспірантури вступив Б.В.Винницький. Закінчили навчання в університеті О.Е.Єрмоєнко і М.М.Хом'як, студентами старших курсів стали О.Б.Скасків, М.В.Заболоцький, Я.В.Васильків і О.В.Веселовська. В школі А.А.Гольдберга виникло дві групи математиків: 1) А.А.Кондратюк, Я.В.Васильків, О.В.Веселовська і 2) М.М.Шеремета, Б.В.Винницький, М.М.Хом'як, О.Б.Скасків. Перша група розробляла методи рядів Фур'є в теорії мероморфних функцій, а інша – метод Вімана-Валірона для рядів Діріхле. Згодом до першої групи прийшов С.І.Тарасюк, а до другої групи прийшли учні М.М.Шеремети і О.Б.Скасківа.

Застосовавши метод рядів Фур'є до теорії мероморфних функцій, А.А. Кондратюк повністю описав регулярність зростання цілої функції скінченного λ -типу в термінах її нулів, для мероморфної функції скінченного λ -типу вперше ввів поняття індикатора та зазначив його зв'язок з коефіцієнтами Фур'є її логарифма модуля, для субгармонійних в $\mathbb{R}^n$ функцій розробив метод сферичних гармонік і одержав багато результатів про асимптотичне поведінку таких функцій. Свої дослідження він підсумував у монографії "Метод рядів Фур'є в теорії мероморфних функцій".

Я.В.Васильків застосував метод рядів Фур'є до вивчення асимптотичних властивостей субгармонійних і δ -субгармонійних функцій і в цьому напрямі одержав результати критеріального характеру.

О.В.Веселовська одержала аналог теореми Майлза для δ -субгармонійних в $\mathbb{R}^n$ функцій і в термінах узагальнених порядків Шеремети вивчила зростання цілих гармонійних в $\mathbb{R}^n$ функцій.

М.М. Шеремета, М.М.Хом'як і О.Б.Скасків розробленим ними методом Вімана-Валірона для цілих рядів Діріхле отримали закінчені результати про ек-

вівалентність максимуму модуля і максимального члена, еквівалентність логарифмів максимуму модуля і максимального члена, поведження в околі точки максимуму ряду Діріхле та його похідних зовні виняткових множин. Розв'язана гіпотеза Турана про поведження в куті цілої функції, заданої лакунарним степеним рядом. М.М.Шеремета вперше застосував метод Вімана-Валірона до раціональної апроксимації цілих функцій з додатними коефіцієнтами, спростував одну гіпотезу Ердеша-Редді.

О.Б.Скасків і М.Й. Гречанюк розробили методику типу методу Вімана-Валірона для рядів Діріхле абсолютно збіжних у півплощині та кратних цілих рядів Діріхле і одержали аналоги теорем М.М. Шеремети і О.Б.Скасківа, доведених раніше для звичайних цілих рядів Діріхле.

В.М.Сороківський у термінах узагальнених порядків вивчив поведження цілих рядів Діріхле в горизонтальних смугах на горизонтальних прямих.

Інший учень М.М.Шеремети Ю.М.Галь у термінах узагальнених порядків вивчив зростання аналітичних у півплощині функцій, заданих рядами Діріхле, і теоретико-ймовірнісним методом Роземблума для таких функцій отримав аналоги класичної теореми Вімана.

М.М. Шеремета та його учні А.Д.Кузик і Ш.Абуарабі ввели поняття цілих функцій обмеженого l -індексу та обмеженого $l - M$ -індексу і для таких функцій одержали аналоги класичних теорем С.Шаха та Г.Фріке.

О.Н.Фрідман одержав ряд непокресуваних оцінок для субгармонійних функцій нецілого порядку з масами, розподіленими на додатному промені.

Г.С. Прокопович узагальнив другу основну теорему Неванлінни і довів гіпотезу Розенблума про кількість нерухомих точок цілої функції.

М.О.Гірник отримав асимптотичні рівності для аналітичних в одиничному крузі функцій, зображених канонічними добутками Джрбашяна-Нафталевича-Цудзі.

А.З.Мохонько узагальнив теорему Валірона про неванліннівську характеристику суперпозиції раціональної та мероморфної функції, що дало йому змогу одержати низку сильних результатів в аналітичній теорії диференціальних рівнянь.

В.Д.Мохонько довела лему про логарифмічну похідну для алгеброїдних функцій і зазначила її застосування до вивчення зростання і розподілу значень мероморфних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.

О.Е.Єрьоменко розв'язав задачу Дрейсіна-Вейцмана про зростання неванліннівської функції наближення і, застосовуючи теорему Бера про категорії, одержав багато непокресувальних результатів про валіронівські дефекти цілих характеристичних функцій ймовірнісних законів і про лічильні функції послідовностей a -точок аналітичних у крузі функцій. Разом з А.А.Гольдбергом він спростував гіпотезу Хеймана про асимптотичні криві цілих функцій скінченного порядку.

М.Є.Коренков одержав асимптотики логарифмічної похідної та похідних від логарифмічної похідної цілої функції цілком регулярного зростання.

М.В.Заболоцький одержав багато результатів стосовно асимптотичних властивостей мероморфних і δ -субгармонійних функцій нешвидкого зростання, пікарівських множин цілих функцій та сферичних похідних мероморфних функцій.

Є.В. Глейзер вивчав класи δ -субгармонійних з розділеними масами, розв'язав задачу Б.Я.Левіна про оцінку гармонійної міри однієї множини, яка трапляється

в теорії субгармонійних функцій.

М.М.Строчик одержав необхідні та достатні умови, які пов'язують повну регулярність зростання мероморфної функції з асимптотичним поведінням її логарифмічної похідної, а для цілих функцій з від'ємними нулями довів тауберіві теореми.

У 1987 р. докторську дисертацію захистив М.М.Шеремета, а в 1989 – А.А.Кондратюк. У 1991 р. у Львівському університеті відкрито Спеціалізовану вчену раду для захисту кандидатських (а згодом і докторських) дисертацій. Того ж року заснували журнал "Математичні студії". Розпочинається новий період розвитку математики у Львівському університеті, зокрема комплексного аналізу. Захистили докторські дисертації А.З.Мохонько, Б.В.Винницький, О.Б.Скасків, М.В.Заболоцький.

О.П.Соколовська для δ -субгармонійних функцій, порядок або нижній порядок яких менший від одиниці, одержала оцінки логарифмічної щільності множин, на яких виконуються нерівності, які пов'язують характеристики цих функцій.

В.А.П'яна отримала багато теорем єдиності для алгеброїдних функцій.

С.І.Тарасюк довів критерій належності δ -субгармонійної в $\mathbb{R}^n$ функції до класу скінченного λ -типу в термінах її інтегральних середніх.

А.А.Кондратюк, Я.В.Васильків, С.І.Тарасюк дослідили загальну проблему Пелі.

Я.В.Васильків і Я.В.Микитюк довели критерій обмеженості інтегральних логарифмічних середніх для добутків Бляшке.

М.В.Заболоцький для цілих функцій нульового порядку одержав аналоги теореми Валірона-Тітчмарша про зв'язок між регулярним зростанням функції та розподілом її нулів, ввів поняття "індикатора" і для певного класу функцій довів формулу для його знаходження через кутову щільність нулів.

М.В.Заболоцький і М.М.Шеремета отримали аналог теореми Ліндельофа для рядів Діріхле довільного зростання і з довільною абсцисою абсолютної збіжності. Подібний аналог довів Я.Я.Притула.

М.М.Шеремета, М.В.Заболоцький і Р.І.Тарасюк у термінах двочленної асимптотики одержали зв'язок між зростанням цілої функції скінченного логарифмічного порядку та розподілом її нулів. Для таких функцій Р.І.Тарасюк у термінах двочленної асимптотики зазначив про зв'язок між зростанням максимуму модуля і поведінням тейлорівських коефіцієнтів.

М.М.Шеремета та С.І. Фединак одержали непокреслені оцінки швидкості зростання похідних рядів Діріхле довільного зростання і з довільною абсцисою абсолютної збіжності.

М.М.Шеремета вивчив можливість аналітичного продовження голоморфної в одиничному крузі функцій з послідовністю однолистих у цьому крузі похідних на всю площину. З отриманого ним критерію М.М.Шеремета спростував одну гіпотезу С.Шаха. Подібні проблеми він дослідив і для випадку похідних Гельфонда-Леонтьєва.

Над проблемами цілих функцій обмеженого індексу працювали М.Т.Бордуляк, А.А.Гольдберг і М.М.Шеремета. Для цілих функцій обмеженого l -індексу вони визначили критерії існування. А.А.Гольдберг довів гіпотезу С.Шаха про обмеженість індексу класичної функції Міттаг-Леффлера. М.Т.Бордуляк дослідила обмеженість розподілу значень цієї функції. Вона вивчала також обмеженість L -індексу цілих функцій багатьох комплексних змінних і зазначила про їхнє за-

стосування в теорії систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. М.М. Шеремета разом з В.О.Кушнірем для довільної комплексної області ввели і вивчали аналітичні в цій області функції обмеженого l -індексу. В 1999 р. опубліковано монографію М.М.Шеремети "Analytic functions of bounded index".

У 90-х роках виникла група математиків, до якої увійшли О.Б.Скасків, І.Е.Чижиков, П.В.Філевич, О.Г.Оришин та інші.

О.Б.Скасків отримав остаточний розв'язок проблеми Пойа про асимптотичну рівність логарифмів максимуму та мінімуму модуля цілої функції, заданої лакунарним степеневим рядом. Подібні задачі він досліджував для аналітичних в одичному крузі функцій та функцій, зображених рядами Діріхле з невід'ємними показниками.

Продовжуючи дослідження, М.М.Хом'як, С.Херате одержали результати типу Вімана-Фентона за слабких умов на зростання суми цілого ряду Діріхле.

О.Г.Оришин отримала завершені результати в теорії раціональної апроксимації цілих функцій з невід'ємними тейлорівськими коефіцієнтами.

П.В.Філевич одержав аналог нерівності Вімана між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій та цілих функцій із швидкоосцилюючими тейлоровими коефіцієнтами.

У термінах характеристик Цзудзі І.Е.Чижиков розв'язав узагальнену "вузьку" обернену задачу розподілу значень для аналітичних у замкненій півплощині функцій як для випадку врахування розподілу значень похідних, так і для випадку наявності дефектних функцій.

У Львівському університеті (травень 2000 р.) відбулася Міжнародна конференція "Цілі та мероморфні функції", присвячена 70-річчю професора А.А.Гольдберга. Це була звітна конференція Львівської школи з комплексного аналізу.

THE THEORY OF FUNCTIONS IN LVIV UNIVERSITY AT THE POSTWAR PERIOD

M. Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv

There is considered the development of the theory of functions in the Lviv university after the Second World War.

Key words: *development of the theory of functions.*

Стаття надійшла до редколегії 24.11.99

Прийнята до друку 28.12.2000