ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.15–20

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.15–20

УДК 517.535

ЗРОСТАННЯ СЕРЕДНІХ КВАДРАТИЧНИХ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ПОРЯДКУ МЕНШОГО ВІД ОДИНИЦІ

Ярослав Васильків, Святослав Тарасюк

Львівський національний університет імені Івана Франка

Нехай f мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $f(0)=1$, $\{a_j\}$, $\{b_l\}$ – послідовності її нулів та полюсів відповідно. Через $\log f(z)$ позначимо функцію

$$\log f(z) = \int_0^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi,$$

визначену в максимальній зірковій стосовно початку координат області, що не містить елементів множин $\{a_j\}$ та $\{b_l\}$. Нехай $n(r,a,f)$, $N(r,a,f)$ та $T(r,f)$ неванліннівські характеристики функції f (див., наприклад, [1]). Позначимо

$$\rho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}, \quad \left.\begin{matrix}\rho_0\\ \mu_0\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}\varlimsup\\ \varliminf\end{matrix}_{r\to+\infty} \frac{n(r,f)}{N(r,f)},$$

де $n(r,f) = n(r,0,f) + n(r,\infty,f)$, $N(r,f) = \int\limits_0^r n(t,f)t^{-1}dt$. Якщо ρ не ціле або 0, то $\rho = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log N(r,f)}{\log r}$, і, крім того [2], $0 \leqslant \mu_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$.

Нехай також

$$M_2(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2},$$

$$m_2(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^2 d\theta \right\}^{1/2},\ 0 < r < +\infty.$$

Зростання величин $m_2(r,f)/N(r,f)$ при $r\to+\infty$ для мероморфних функцій порядку $\rho < +\infty$ вивчені в працях [3-10].

Наша мета – за допомогою методу рядів Фур'є для $\log f(z)$ дати оцінки на зростання при $r\to+\infty$ величин $M_2(r,f)/n(r,f)$ та $M_2(r,f)/N(r,f)$ у випадку $\rho < 1$. У доведеннях здебільшого дотримуватимемось схеми, запропонованої в праці [6].

Правильні такі теореми.

Теорема 1. *Нехай f мероморфна в $\mathbb{C}$ функція, $f(0)=1$. Тоді*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{M_2(r,f)}{n(r,f)} \leqslant \frac{\pi}{\sin\pi\rho},\ 0<\rho<1; \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M_2(r,f)}{N(r,f)} \leqslant \frac{\pi\rho_0}{\sin\pi\rho_0},\ 0<\rho_0<1. \tag{2}$$

Теорема 2. *Нехай f ціла функція з додатними нулями, $f(0)=1$. Тоді*

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M_2(r,f)}{N(r,f)} \geqslant \frac{\pi\mu_0}{\sin\pi\mu_0},\ 0\leqslant\mu_0\leqslant\rho<1; \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M_2(r,f)}{n(r,f)} \geqslant \frac{\pi}{\sin\pi\rho},\ 0<\rho<1. \tag{4}$$

Зауваження 1. Оцінки (1)–(4) досягаються для цілої функції $f(z)$, $f(0)=1$, з додатними нулями такими, що $n(r,f)\sim r^\rho$, $r\to+\infty$.

Зауваження 2. (див., наприклад, [2,11]). Виконується $0<\mu_0=\rho_0<+\infty \Leftrightarrow N(r,f)=r^\rho L(r)$, де $L(r)$ деяка диференційовна повільно змінна функція (тобто $\lim\limits_{r\to+\infty} rL'(r)/L(r)=0$).

Перед тим, як приступити до доведень, нагадаємо потрібні нам у подальшому позначення та факти.

Для мероморфної функції $f(z)$, $f(0)=1$ позначимо

$$n_k(r,f)=\sum_{|a_j|\leqslant r} e^{-ik\alpha_j} - \sum_{|b_l|\leqslant r} e^{-ik\beta_l},\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\alpha_j=\arg a_j,\ \beta_l=\arg b_l,$$

$$n_0(r,f)=n(r,0,f)-n(r,\infty,f),\ N_0(r,f)=\int_0^r n_0(t,f)t^{-1}dt;$$

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta,\ k\in\mathbb{Z}.$$

З результатів праць [6] та [12] випливає таке, якщо $0<\rho<1$, то

$$c_k(r,f)=\begin{cases} -\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^k\frac{n_k(t,f)}{t}dt, & k\in\mathbb{N};\\ N_0(r,f), & k=0;\\ \int\limits_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|}\frac{n_k(t,f)}{t}dt, & -k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

Для $n(r,f)$ існують [13] послідовності піків Пойя першого та другого роду порядку $0<\rho<+\infty$. Нагадаємо, що послідовністю піків Пойя порядку $0<\rho<+\infty$ другого роду для $n(r,f)$ називається (див. [13]) послідовність $\{r_n\}$, $r_n\to+\infty$ така, що нерівність

$$n(r,f)\geqslant\left(\frac{r}{r_n}\right)^\rho(1-\varepsilon_n)n(r_n,f),\ a_n^{-1}r_n\leqslant r\leqslant a_nr_n, \tag{6}$$

виконується для деяких $a_n\to+\infty$, $\varepsilon_n\to0+$, $n\to+\infty$.

Крім того, послідовність $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$ називається односторонньою послідовністю піків Пойя порядку $0 < \rho < +\infty$ для $n(r,f)$ (див. [13, 14]), якщо

$$\begin{aligned} n(r,f) &\leqslant \left(\tfrac{r}{r_n}\right)^{\rho-\delta_n} n(t_n,f),\ 1 \leqslant r \leqslant t_n, \\ n(r,f) &\leqslant \left(\tfrac{r}{t_n}\right)^{\rho+\delta_n} n(t_n,f),\ t_n \leqslant r < +\infty \end{aligned} \tag{7}$$

для деякої послідовності $\{\delta_n\}$, $\delta_n \to 0+$, $n \to +\infty$.

Щоб довести співвідношення (2) та (3), нам буде потрібна елементарна лема.

Лема. *Нехай* $0 \leqslant \mu_0 \leqslant \rho_0 < 1$. *Позначимо для* $k \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{matrix} b_k^1 \\ a_k^1 \end{matrix}\right\} = \overline{\underline{\lim}}_{r\to+\infty} \frac{\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N(t,f)}{t} dt}{N(r,f)},$$

$$\left.\begin{matrix} b_k^2 \\ a_k^2 \end{matrix}\right\} = \overline{\underline{\lim}}_{r\to+\infty} \frac{\int\limits_0^{r} \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N(t,f)}{t} dt}{N(r,f)}.$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k-\mu_0} \leqslant a_k^1 \leqslant b_k^1 \leqslant \frac{1}{k-\rho_0}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{k+\rho_0} \leqslant a_k^2 \leqslant b_k^2 \leqslant \frac{1}{k+\mu_0}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки $\rho \leqslant \rho_0 < 1$, то

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-k} N(r,f) = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_r^{+\infty} t^{-k-1} N(t,f) dt = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тому з огляду на узагальнене правило Лопіталя (див., наприклад, [15], [16, с. 149]), маємо

$$b_k^1 \leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{r^{-k-1}N(r,f)}{kr^{-k-1}N(r,f) - r^{-k-1}n(r,f)} = \frac{1}{k-\rho_0},$$

$$a_k^1 \geqslant \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{r^{-k-1}N(r,f)}{kr^{-k-1}N(r,f) - r^{-k-1}n(r,f)} = \frac{1}{k-\mu_0},$$

Співвідношення (9) доводиться аналогічно. □

Доведення теореми 1. Позначимо

$$\{x_n\} = \{|a_j|\} \cup \{|b_l|\},\ F(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{x_n}\right). \tag{10}$$

Зауважимо, що $F(z)$ має порядок ρ і (див. співвідношення (5))

$$c_k(r,F) = \begin{cases} -\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(t,f)}{t} dt, & k \in \mathbb{N}; \\ N(r,f), & k = 0; \\ \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n(t,f)}{t} dt, & -k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

Крім того,

$$|c_k(r,f)| \leqslant |c_k(r,F)|, \ k \in \mathbb{Z},$$

звідки, з урахуванням рівності Парсеваля, знаходимо, що

$$M_2(r,f) \leqslant M_2(r,F).$$

Але з (11) на односторонній послідовності $\{t_n\}$ піків Пойя порядку $0 < \rho < 1$ для $n(r,f)$ (див. співвідношення (7)) отримуємо

$$-c_k(t_n,F) \leqslant \frac{n(t_n,f)}{k-\rho-\delta_n}, \ k \in \mathbb{N},$$

$$c_k(t_n,F) \leqslant \frac{n(t_n,f)}{|k|+\rho-\delta_n}, \ -k \in \mathbb{N}.$$

Для $k=0$ маємо

$$N(t_n,f) = \int_0^{t_n} \frac{n(t,f)}{t} dt \leqslant \frac{1}{\rho-\delta_n}.$$

Отже,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{|c_k(t_n,f)|}{n(t_n,f)} \leqslant \frac{1}{|k-\rho|}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Використовуючи рівність Парсеваля

$$M_2^2(r,F) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r,F)|^2 = N^2(r,f) + \sum_{|k|=1}^{+\infty} |c_k(r,F)|^2,$$

приходимо до нерівності

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M_2(r,F)}{n(r,f)} \leqslant \Big\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k-\rho)^2} \Big\}^{1/2}.$$

Враховуючи, що для функції $u(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\theta-\pi)}$ її k-й коефіцієнт Фур'є дорівнює $(k-\rho)^{-1}$, одержимо

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M_2(r,f)}{n(r,f)} \leqslant \frac{\pi}{\sin \pi\rho}, \ 0 < \rho < 1,$$

тобто співвідношення (1) доведене.

Інтегруючи в (11) частинами, маємо

$$|c_k(r,F)| = \begin{cases} k \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N(t,f)}{t} dt - N(r,f), & k \in \mathbb{N}; \\ N(r,f) - |k| \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{N(t,f)}{t} dt, & -k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{12}$$

Враховуючи співвідношення (8) та (9), знаходимо

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{|c_k(r,F)|}{N(r,f)} = kb_k^1 - 1 \leqslant \frac{\rho_0}{k-\rho_0}, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{|c_k(r,F)|}{N(r,f)} = 1 - |k|a_k^2 \leqslant \frac{\rho_0}{|k|+\rho_0}, \ -k \in \mathbb{N}.$$

Звідки за аналогією до попереднього випадку отримуємо співвідношення (2), що завершує доведення теореми 1. □

Доведення теореми 2. Оскільки нулі $f(z)$ додатні і $f(0) = 1$, то $f(z) = F(z)$, де $F(z)$ задана співвідношенням (10). Далі так само, як при доведенні співвідношення (2), маємо

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{|c_k(r,f)|}{N(r,f)} \geqslant \frac{\mu_0}{|k-\mu_0|},\ k \in \mathbb{Z},$$

звідки випливає (3).

І, нарешті, з (11) на послідовності $\{r_n\}$ піків Пойя другого роду порядку $0 < \rho < 1$, отримуємо

$$|c_k(r_n,f)| \geqslant \int\limits_{r_n}^{a_n r_n} \left(\frac{r_n}{t}\right)^k \left(\frac{t}{r_n}\right)^\rho \frac{dt}{t}(1-\varepsilon_n)n(r_n,f) =$$

$$= (1-\varepsilon_n)(1-a_n^{\rho-k})\frac{n(r_n,f)}{k-\rho},\ k \in \mathbb{N},$$

$$|c_k(r_n,f)| \geqslant \int\limits_{a_n^{-1} r_n}^{r_n} \left(\frac{t}{r_n}\right)^{|k|} \left(\frac{t}{r_n}\right)^\rho \frac{dt}{t}(1-\varepsilon_n)n(r_n,f) =$$

$$= (1-\varepsilon_n)(1-a_n^{-|k|-\rho})\frac{n(r_n,f)}{|k|+\rho},\ -k \in \mathbb{N},$$

і

$$|c_0(r_n,f)| \geqslant \int\limits_{a_n^{-1} r_n}^{r_n} \left(\frac{t}{r_n}\right)^\rho \frac{dt}{t}(1-\varepsilon_n)n(r_n,f) = (1-\varepsilon_n)(1-a_n^{-\rho})\frac{n(r_n,f)}{\rho}.$$

Отже,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{|c_k(r,f)|}{n(r,f)} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_k(r_n,f)|}{n(r_n,f)} \geqslant \frac{1}{|k-\rho|},\ k \in \mathbb{Z},$$

що імплікує (4). □

---

1. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.
2. *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Порівняння характеристик зростання додатних функцій // Матем. студії – 1998. – Т.10. – №1 – С.23–32.
3. *Kjellberg B.* On the minimum modulus of entire functions of lower oder less then one // Math. Scand. – 1960. – Vol.8. – P.189–197.
4. *Островський И.В.* О дефектах мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы // Док. АН СССР. – 1963. – Т.50. – №1. – С.32–35.
5. *Edrei A.* The deficiencies of meromorphic functions of finite lower order // Duke Math. J. – 1964. – Vol.31. – P.1–21.
6. *Miles J., Shea D.F.* An extremal problem in value-distribution theory // Quart. J. Math. – 1973. – Vol.24. – P.377–383.

7. *Miles J., Shea D.F.* On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value // Duke. Math. J. – 1976. – Vol.43. – P.171–186.

8. *Abi-Khuzam F.F.* On the growth of the integral means of subharmonic functions of order less than one // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol.241. – P.239–252.

9. *Ozawa M.* On the growth of meromorphic function // Kodai Math. J. – 1983. – Vol.6. – P.250–260.

10. *Yanagihara H.A.* Tauberian theorem for certain class of meromorphic functions // Kodai Math. J. – 1984. – Vol.7. – P. 238–247.

11 *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М., 1985.

12. *Калинець Р.З., Кондратюк А.А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0,2\pi]$-метриці // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50. – №7. – С.889–896.

13. *Drasin D., Shea D.F.* Polya peaks and the oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol.24. – №2. – P.403–411.

14. *Shea D.F., Wainger S.* Growth problems for a class of entire functions via singular integral estimates // Ill. J. Math. – 1981. – Vol.25. – №1. – P.41–50.

15. *Singh S.K., Gopalakrishna H.S.* Growth of entire and meromorphic functions // Comment. Math. Univ. St. Pauli. – 1977. – Vol.26. – №1. – P.3–15.

16. *Дороговцев А.Я.* Математчний аналіз. – К., 1993, Ч.1.

THE GROWTH OF SQUARE MEANS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS OF ORDER LESS THEN ONE

Ya. Vasylkiv, S. Tarasyuk

Ivan Franko National University of Lviv

There are established the sharp estamates of growth of ratios $M_2(r,f)/n(r,f)$ and $M_2(r,f)/N(r,f)$ as $r \to +\infty$, for meromorphic in $\mathbb{C}$ functions $f(z)$, $f(0)=1$, of order less then one, where $M_2(r,f)$ be the Lebesgue square means of the functions $u_r(\theta) = \log f(re^{i\theta})$, $\theta \in [0,2\pi]$, and $n(r,f) = n(r,0,f) + n(r,\infty,f)$, $N(r,f) = \int\limits_0^r n(t,f)t^{-1}dt$.

Key words: *meromorphic functions.*

Стаття надійшла до редколегії 03.11.99

Прийнята до друку 28.12.2000