ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.21–24

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.21–24

УДК 517.53

ПРО АНАЛІТИЧНІ В КРУЗІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО l-ІНДЕКСУ

Володимир Кушнір

Львівський національниий університет імені Івана Франка

Нехай l – додатна неперервна на $[1,+\infty)$ функція така, що для всіх $x \in [1,+\infty)$

$$\frac{l(x)}{x} \geqslant \beta > 1 \tag{1}$$

і $l(x) = l(1)$ для $x \in [0,1)$.

Аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f називається [1, 2, с.5] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} l^{-n}\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} l^{-k}\left(\frac{1}{1-|z|}\right) : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Ми з'ясуємо, за яких умов на функцію l із обмеженості l-індексу функції f випливає обмеженість l-індексу функції $F(z) = f(w(z))$, де $w(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} e^{i\alpha}$ $(z_0 \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R})$ – дробово-лінійне відображення з $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$. Очевидно таке, якщо $z_0 = 0$, то $w(z) = ze^{i\alpha}$ і з (1) випливає обмеженість l-індексу функції $F(z) = f(ze^{i\alpha})$. Для випадку, коли z_0 – довільна точка з $\mathbb{D}$, правильна така теорема.

Теорема. *Якщо додатна, неперервна на $[1,+\infty)$ функція l задовольняє умову (1) і $l(kx) = O(l(x))$ при $x \to +\infty$ для кожного $k \in (0,+\infty)$, то з обмеженості l-індексу функції f випливає обмеженість l-індексу функції $F(z) = f(w(z))$.*

Для доведення цієї теореми потрібний один критерій обмеженості l-індексу. Через $Q_\beta, \beta > 1$ позначимо клас додатних неперервних на $[1,+\infty)$ функцій l, які, крім умови (1), для кожного $\eta \in [0,\beta)$ задовольняють умови

$$\begin{aligned} 0 <&\lambda_1(\eta) = \inf\left\{\frac{1}{l(x)} l\left(\frac{x}{1 + tx/l(x)}\right) : -\eta \leqslant t \leqslant \eta, x \geqslant 1\right\} \leqslant \\ \leqslant&\lambda_2(\eta) = \sup\left\{\frac{1}{l(x)} l\left(\frac{x}{1 + tx/l(x)}\right) : -\eta \leqslant t \leqslant \eta, x \geqslant 1\right\} < +\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

© Кушнір Володимир, 2000

Лема. *[1, 2, с.21]. Нехай $\beta > 1$ і $l \in Q_\beta$. Для того щоб аналітична в $\mathbb{D}$ функція f була обмеженого l-індексу, необхідно і достатньо, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$ і $C \geqslant 1$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{D}$*

$$|f^{(p+1)}(z)|l^{-(p+1)}\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \leqslant C\max\left\{|f^{(k)}(z)|l^{(-k)}\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\ :\ 0 \leqslant k \leqslant p\right\}. \quad (4)$$

Перейдемо до доведення теореми. Спочатку покажемо таке: якщо виконуються умови теореми, то $l \in Q_\beta$. Справді, з умови (1) випливає, що для кожного $\eta \in [0,\beta)$ і всіх $x \geqslant 1$

$$0 < 1 - \frac{\eta}{\beta} \leqslant 1 - \frac{\eta x}{l(x)} \leqslant 1 + \frac{tx}{l(x)} \leqslant 1 + \frac{\eta x}{l(x)} \leqslant 1 + \frac{\eta}{\beta} < +\infty,$$

а тому з умови $l(kx) = O(l(x))$, $x \to +\infty$ випливає, що $\lambda_1(\eta) > 0$ і $\lambda_2(\eta) < +\infty$. Отже, $l \in Q_\beta$ і ми можемо використовувати лему.

Легко бачити, що для $F(z) = f(w(z))$ правильна рівність

$$F^{(k)}(z) = f^{(k)}(w)(w')^k + \sum_{j=1}^{k-1} f^{(j)}(w)Q_{j,k}(w', w'', ..., w^{(j)}), \quad (5)$$

де $Q_{j,k}(z)$ – многочлени за всіма змінними. Подібно,

$$f^{(k)}(w) = (F(z(w)))^{(k)} = F^{(k)}(z)(z')^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} F^{(j)}(z)Q_{j,k}(z', ..., z^{(j)}), \quad (6)$$

де $z = z(w) = \dfrac{w - w_0}{1 - w\bar{w}_0}e^{-i\alpha}$, $w_0 = -z_0e^{i\alpha}$, визначається з рівняння $w = w(z)$, а похідні z беремо за w. Елементарні обчислення дають $w^{(j)} = \dfrac{j!e^{i\alpha}(1-|z_0|^2)\bar{z}_0^{j-1}}{(1 - z\bar{z}_0)^{j+1}}$.
Отже, $|w^{(j)}(z)| \leqslant K_1(j, z_0)$, $z \in \mathbb{D}$, $|z^{(j)}(w)| \leqslant K_2(j, z_0)$, $w \in \mathbb{D}$ і тому $|Q_{j,k}(w', ..., w^{(j)})| \leqslant C(j, k, z_0)$, $|Q_{j,k}(z', ..., z^{(j)})| \leqslant \tilde{C}(j, k, z_0)$.

З рівності (5), з огляду на (4), маємо

$$\begin{aligned}
\frac{|F^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}\left(\frac{1}{1-|z|}\right)} \leqslant & \frac{|f^{(p+1)}(w(z))|}{l^{p+1}\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\right)^{p+1}|w'(z)|^{p+1} + \\
& + \sum_{j=1}^{p}\frac{|f^{(j)}(w(z))||Q_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1}\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\right)^{p+1} \leqslant \\
& \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(w(z))|}{l^k\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\ : 0 \leqslant k \leqslant p\right\}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\right)^{p+1} \times \\
& \times \left(C|w'(z)|^{p+1} + \sum_{j=1}^{p}\frac{|Q_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1-j}\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\right) \leqslant \\
& \leqslant C_1\max\left\{\frac{|f^{(k)}(w(z))|}{l^k\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\ : 0 \leqslant k \leqslant p\right\}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\right)^{p+1}, \quad (7)
\end{aligned}$$

$C_1 \equiv \mathrm{const} > 0$. Завдяки (6)

$$\frac{|f^{(k)}(w(z))|}{l^k\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)} \leqslant \frac{|F^{(k)}(z)|}{l^k\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\right)^k |w'(z)|^{-k}+$$

$$+|w'(z)|^{-2k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|F^{(j)}(z)||Q^*_{j,k}(z)|}{l^k\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}|w'(z)|^j\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|F^{(j)}(z)|}{l^j\left(\frac{1}{1-|z|}\right)} : 1\leqslant j\leqslant k\right\}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\right)^k \times$$

$$\times\left(|w'(z)|^{-k}+|w'(z)|^{-2k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|Q^*_{j,k}(z)|}{l^{k-j}\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}|w'(z)|^j\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_2\max\left\{\frac{|F^{(j)}(z)|}{l^j\left(\frac{1}{1-|z|}\right)} : 1\leqslant j\leqslant k\right\}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}\right)^k, \tag{8}$$

$C_2 \equiv \mathrm{const} > 0$. З нерівностей (7) і (8) легко отримуємо нерівність

$$\frac{|F^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}\left(\frac{1}{1-|z|}\right)} \leqslant C_1C_2\max\left\{\frac{|F^{(k)}(z)|}{l^k\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\left(\frac{l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)}{l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\right)^{p+1-k} : 0\leqslant k\leqslant p\right\}. \tag{9}$$

Щоб завершити доведення теореми, нам треба оцінити величину відношення $l\left(\frac{1}{1-|w(z)|}\right)/l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$. Зауважимо: якщо $z_0=\rho e^{i\vartheta}$ і $z=re^{i\varphi}$, то з $\beta=\varphi-\vartheta$ маємо

$$\begin{aligned}1-|w(z)| =&1-\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right| = 1-\left|\frac{re^{i\varphi}-\rho e^{i\vartheta}}{1-r\rho e^{i(\varphi-\vartheta)}}\right| =\\ &=\frac{|1-r\rho e^{i\beta}|^2-|re^{i\beta}-\rho|^2}{|1-r\rho e^{i\beta}|(|1-r\rho e^{i\beta}|+|re^{i\beta}-\rho|)}=\\ &=\frac{1+r^2\rho^2-2r\rho\cos\beta-r^2-\rho^2+2r\rho\cos\beta}{|1-r\rho e^{i\beta}|(|1-r\rho e^{i\beta}|+|re^{i\beta}-\rho|)}=\\ &=\frac{(1-\rho^2)(1+r)}{|1-r\rho e^{i\beta}|(|1-r\rho e^{i\beta}|+|re^{i\beta}-\rho|)}(1-|z|).\end{aligned}$$

Але

$$1-r\rho+r-\rho=(1-\rho)(1+r)\leqslant|1-r\rho e^{i\beta}|+|re^{i\beta}-\rho|\leqslant$$

$$\leqslant 1+r\rho+r+\rho=(1+\rho)(1+r)$$

і

$$1-\rho\leqslant 1-r\rho\leqslant|1-r\rho e^{i\beta}|\leqslant 1+r\rho\leqslant 1+\rho.$$

Тому

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} \leqslant \frac{(1-\rho^2)(1+r)}{|1-r\rho e^{i\beta}|(|1-r\rho e^{i\beta}|+|re^{i\beta}-\rho|)} \leqslant \frac{1+\rho}{1-\rho},$$
$$\frac{1-\rho}{1+\rho}\frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{1}{1-|w(z)|} \leqslant \frac{1+\rho}{1-\rho}\frac{1}{1-|z|}$$

і, отже, завдяки умові $l(kx) = O(l(x)), x \to +\infty$, маємо $l\left(\frac{1}{1-|w|}\right) \leqslant C_3 l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $C_3 \equiv \mathrm{const} > 0$. Звідси і з нерівності (9) отримуємо нерівність

$$\frac{|F^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}\left(\frac{1}{1-|z|}\right)} \leqslant C_4 \max\left\{\frac{|F^{(k)}(z)|}{l^k\left(\frac{1}{1-|z|}\right)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\}, C_4 \equiv \mathrm{const} > 0$$

і за лемою F є функцією обмеженого l-індексу.

1. *Строчик С.М., Шеремета М.М.* Аналітичні в крузі функції обмеженого l-індексу // Доп. НАН України. – 1993. – N 1. – С.19-22.
2. *Sheremeta M.* Analytic functions of bounded l-index. Mathematical Studies: Monograph Series, Vol.6. – Lviv, 1999.

ON ANALITIC FUNCTIONS OF BOUNDED l-INDEX IN THE UNIT DISK

V. Kushnir

Ivan Franko National University of Lviv

Let l be a positive continuous on $[1, +\infty)$ function such that

$$\frac{l(x)}{x} \geqslant \beta > 1, \ x \in [1, +\infty)$$

and f be an analytic in the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ function of bounded l-index.

In this paper we find out conditions on the function l which provide the boundedness of l-index of the function $F(z) = f(w(z))$, where $w = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} e^{i\alpha}$ $(z_0 \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R})$.

Key words: *analytic function, bounded l-index.*

Стаття надійшла до редколегії 31.05.2000

Прийнята до друку 28.12.2000