ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.25–28

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.25–28

УДК 517.537.72

ЗАУВАЖЕННЯ ДО АПРОКСИМАЦІЇ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Люба Микитюк
Львівський національний університет імені Івана Франка

1°. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $D_0(\lambda)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\},\ s = \sigma + it, \tag{1}$$

які мають абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Для $\beta < 0$ через $\bar{D}_\beta(\lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле (1), для яких абсциса збіжності $\sigma_з > \beta$. Клас експоненціальних многочленів вигляду $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ позначимо через $\Pi_k(\lambda)$.

Для $F \in \bar{D}_\beta(\lambda)$, як в [1]–[3], приймемо $E_n(F,\beta) = \inf\{\|F - P\|_\beta : P \in \Pi_n(\lambda)\}$, де $\|F - P\|_\beta = \sup\{|F(\beta + it) - P(\beta + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. В [1] доведено таке: якщо послідовність (λ_n) має додатний крок і $F \in \bar{D}_\beta(\lambda)$, то для того щоб $F \in D_0(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)} = |\beta|. \tag{2}$$

У цьому твердженні, як показано в [3], умову додатності кроку можна замінити умовою $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$. Ця умова, як видно з доведення теореми 1 із [3], використовується тільки для того, щоб виконувалась рівність

$$\sigma_a = \sigma_з = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}. \tag{3}$$

Проте в [4] показано, що рівність (3) виконується, якщо $\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$, $n \to \infty$. Отже, умову $\ln n = o(\lambda_n), n \to \infty$ в теоремі 1 із [3] можна замінити умовою $\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$, $n \to \infty$. Зауважимо якщо через $\bar{D}^*_\beta(\lambda)$ позначити клас рядів Діріхле (1), для яких абсциса абсолютної збіжності $\sigma_a > \beta$, то правильним є таке твердження: *якщо $F \in \bar{D}^*_\beta(\lambda)$, то для того щоб $F \in D_0(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність (2).*

2°. В [1] для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах порядку і типу зазначений зв'язок між спаданням $E_n(F,\beta)$ та зростанням функції F. Цей же зв'язок у термінах нижнього порядку і типу вивчений в [2]. Нарешті, в [3] результати з [1] узагальнено на будь-яку шкалу зростання.

Позначимо через $\Omega(0)$ клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Зрозуміло, що функція φ зростає до 0 на $(0, +\infty)$, а в [5] доведено, що функція Ψ є неперервною і зростаючою до 0 на $(-\infty, 0)$. Тому $0 > \Psi(\varphi(x)) \uparrow 0$ при $0 < x \to +\infty$. В [3] доведена така теорема.

Теорема A. *Нехай* $\beta < 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, $\ln n = o(\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)))$, $n \to \infty$, *а ряд Діріхле (1) має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a = 0$ *і* $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ *– його максимальний член. Для того щоб*

$$\ln \mu(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\Phi((1 + o(1))\sigma), \ \sigma \to 0,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\ln(E_n(F, \beta) \exp\{|\beta|\lambda_{n+1}\}) \leqslant (1 + o(1))\lambda_{n+1}|\Psi(\varphi(\lambda_{n+1}))|, \ n \to \infty.$$

Ми доведемо теорему, яка узагальнює результати з [2].

Теорема 1. *Нехай* $\beta < 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, $\dfrac{{\Phi'}^2(x)}{\Phi(x)\Phi''(x)} = O(1)$, $x \to 0$, *а ряд Діріхле (1) має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a = 0$, $\ln n = o(\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|)$ *і* $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$ *при* $n \to \infty$. *Тоді, якщо*

$$\ln(E_n(F, \beta) \exp\{|\beta|\lambda_{n+1}\}) \geqslant (1 - \varepsilon)\lambda_{n+1}|\Psi(\varphi(\lambda_{n+1}))| \tag{4}$$

для $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *і* $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, *то*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geqslant (1 - \varepsilon)^2 \Phi\left(\frac{\sigma}{1 - 2\varepsilon}\right), \quad \sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0). \tag{5}$$

Доведення. У [3] доведено таке: якщо $\beta < 0$, то

$$E_n(F, \beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\}.$$

Нехай $\sigma_n = \varphi(\lambda_{n+1}), \varepsilon \in (0, 1/2)$, а n таке, що $\beta < \sigma_n(1 - 2\varepsilon) < 0$. Тоді

$$E_n(F, \beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{(1 - 2\varepsilon)\sigma_n\lambda_k\} \exp\{(\beta - \sigma_n(1 - 2\varepsilon))\lambda_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mu((1 - 2\varepsilon)\sigma_n, F) \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{(\beta - \sigma_n + 2\sigma_n\varepsilon)\lambda_k\} =$$

$$= \mu((1 - 2\varepsilon)\sigma_n, F) \int_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{(\beta - \sigma_n + 2\sigma_n\varepsilon)t\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant -\mu((1 - 2\varepsilon)\sigma_n, F)(\beta - \sigma_n + 2\sigma_n\varepsilon) \int_{\lambda_{n+1}}^{\infty} n(t) \exp\{(\beta - \sigma_n + 2\sigma_n\varepsilon)t\} dt =$$

$$= -\mu((1-2\varepsilon)\sigma_n, F)(\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon)\int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty}\exp\{(\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon)t\}\exp\{\sigma_n\varepsilon t+\ln n(t)\}dt.$$

Оскільки $\ln n(t) = o(t|\varphi(t)|)$, $t \to \infty$, то $\sigma_n\varepsilon t + \ln n(t) \leqslant \sigma_n\varepsilon t + \varepsilon t|\varphi(t)| = \varepsilon t(\varphi(\lambda_{n+1}) - \varphi(t)) \leqslant 0$ для всіх $t \geqslant \lambda_{n+1}$ і $n \geqslant n_1(\varepsilon)$. Тому для всіх $n \geqslant n_1(\varepsilon)$

$$E_n(F,\beta) \leqslant -\mu((1-2\varepsilon)\sigma_n, F)(\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon)\int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty}\exp\{(\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon)t\}dt =$$

$$= \mu((1-2\varepsilon)\sigma_n, F)\frac{\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon}{\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon}\exp\{(\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon)\lambda_{n+1}\},$$

тобто з огляду на (4)

$$\begin{aligned}
\ln\mu((1-2\varepsilon)\sigma_n, F) &\geqslant \ln E_n(F,\beta) + (\sigma_n - \sigma_n\varepsilon - \beta)\lambda_{n+1} + \ln\frac{\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon}{\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon} \geqslant\\
&\geqslant (1-\varepsilon)\lambda_{n+1}|\Psi(\varphi(\lambda_{n+1}))| - |\beta|\lambda_{n+1} + \sigma_n(1-\varepsilon)\lambda_{n+1} -\\
&- \beta\lambda_{n+1} + \ln\frac{\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon}{\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon} =\\
&= (1-\varepsilon)\left(-\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})) + \sigma_n\lambda_{n+1}\right) + \ln\frac{\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon}{\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon} =\\
&= (1-\varepsilon)\{-\lambda_{n+1}\varphi(\lambda_{n+1}) + \Phi(\varphi(\lambda_{n+1})) + \varphi(\lambda_{n+1})\lambda_{n+1}\} +\\
&+ \ln\frac{\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon}{\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon} = (1-\varepsilon)\Phi(\sigma_n) + \ln\frac{\beta-\sigma_n+\sigma_n\varepsilon}{\beta-\sigma_n+2\sigma_n\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Нехай $\sigma_n \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{n+1}$. Тоді з огляду на (6) маємо

$$\begin{aligned}
\ln\mu((1-2\varepsilon)\sigma, F) &\geqslant \ln\mu((1-2\varepsilon)\sigma_n, F) \geqslant (1-\varepsilon)\Phi(\sigma_n) + \ln\frac{\beta-\sigma+\sigma\varepsilon}{\beta-\sigma+2\sigma\varepsilon} =\\
&= (1-\varepsilon)\frac{\Phi(\sigma_n)}{\Phi(\sigma_{n+1})}\Phi(\sigma_{n+1}) + \ln\frac{\beta-\sigma+\sigma\varepsilon}{\beta-\sigma+2\sigma\varepsilon} \geqslant\\
&\geqslant (1-\varepsilon)\frac{\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))}{\Phi(\varphi(\lambda_{n+2}))}\Phi(\sigma) + \ln\frac{\beta-\sigma+\sigma\varepsilon}{\beta-\sigma+2\sigma\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Оскільки для деякого $\xi_n \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$

$$\ln\Phi(\varphi(\lambda_{n+1})) - \ln\Phi(\varphi(\lambda_n)) = (\lambda_{n+1}-\lambda_n)\frac{\Phi'(\varphi(\xi_n))}{\Phi(\varphi(\xi_n))}\varphi'(\xi_n),$$

а з умови $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$, $n \to \infty$ випливає, що $\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\lambda_n) = o(\xi_n)$, $n \to \infty$ то, завдяки умові $\dfrac{\Phi'^2(x)}{\Phi(x)\Phi''(x)} = O(1)$, $x \to 0$ маємо

$$\begin{aligned}
\ln\Phi(\varphi(\lambda_{n+1})) - \ln\Phi(\varphi(\lambda_n)) &= o(\xi_n)\frac{\Phi'(\varphi(\xi_n))}{\Phi(\varphi(\xi_n))}\frac{1}{\Phi''(\varphi(\xi_n))} =\\
&= o\left(\frac{\Phi'^2(\varphi(\xi_n))}{\Phi(\varphi(\xi_n))\Phi''(\varphi(\xi_n))}\right) \to 0, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Тому з нерівності (7) легко отримуємо нерівність

$$\ln\mu((1-2\varepsilon)\sigma, F) \geqslant (1-\varepsilon)^2\Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0),$$

звідки випливає нерівність (5).

3^0. Використовуючи теореми A і 1, можна отримати не тільки результати з [1] і [2], а й багато інших тверджень про поводження $E_n(F, \beta)$ у тій чи іншій шкалі зростання (R-порядок і R-тип, узагальнені порядки тощо). Зауважимо також, що подібні до теореми 1 результати можна одержати при інших умовах на показники, ніж у теоремі 1. Умови на функцію Φ будуть також іншими. Цього розглядати не будемо.

1. *Nautiyal A., Shukla D.P.* On the approximation of an analytic functions by exponential polynomials // Indian J. pure appl. Math. – 1983. – Vol.14. – N 6. – P.722-727.
2. *Srivastava G.S., Sunita Rani.* On the approximation of analytic functions represented by Dirichlet series // Indian J. pure appl. Math. – 1988. – Vol.19. – N 2. – P.167-176.
3. *Микитюк Л.Я., Шеремета М.М.* До апроксимації рядів Діріхле експоненціальними многочленами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. – С.35-39.
4. *Мулява О.М.* Про абсциси збіжності ряду Діріхле// Матем. студії. – 1998. – Т.9. – N 2. – С.171-176.
5. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле// Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39. – N 1. – С.206-223.

THE REMARK ON THE APPROXIMATION OF DIRICHLET SERIES BY EXPONENTIAL POLINOMIALS

L. Mykytyuk

Ivan Franko National University of Lviv

Approximation on vertical lines of absolutely convergent in the half-plane $\{s : \mathrm{Re}\, s < 0\}$ Dirichlet series with positive exponents is investigated.

Key words: *Dirichlet series.*

Стаття надійшла до редколегії 24.04.2000
Прийнята до друку 28.12.2000