УДК 517.576

ПРО КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Оксана Мулява
Дрогобицький державний педагогічний університет

1. Нехай

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad a_0\neq 0 \tag{1}$$

– така ціла функція, що $\ln M_f(r)$, де $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, є повільно зростаючою функцією (додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[x_0,+\infty)$ функція α називається повільно зростаючою, якщо $\alpha(2r)/\alpha(r)\to 1$, $r\to\infty$).

Для повільно зростаючої функції α говоритимемо, що f належить до α-класу збіжності, якщо

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln M_f(r)dr}{r\alpha(\ln r)\ln^2 r}<+\infty,\quad \text{коли}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t\alpha(t)}<+\infty, \tag{2}$$

і

$$\int_1^{\infty}\frac{dr}{r\alpha(\ln r)\ln M_f(r)}<+\infty,\quad \text{коли}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t\alpha(t)}=+\infty. \tag{3}$$

Опис належності функції (1) до α-класу збіжності в термінах коефіцієнтів a_n легко отримати з теореми, доведеної в [1] для цілих рядів Діріхле. Подамо опис цієї належності в термінах нулів z_k функції f. Для цього використовується один результат з [1].

2. Нехай $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ ряд Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp(s\lambda_n),\quad s=\sigma+it, \tag{4}$$

є цілим, а $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\geqslant 0\}$ – його максимальний член. Приймемо $\varkappa_n(F)=\dfrac{\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$. Ключовим у доведенні теореми в [1], а також теореми, одержаної у цій праці, є таке твердження.

Твердження [1]. *Припустимо, що* $\varkappa_n(F)\nearrow+\infty\,(n\to\infty)$.

Якщо $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dt}{t\alpha(t)}<+\infty$, *то для того щоб* $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\ln\mu(\sigma,F)d\sigma}{\sigma^2\alpha(\sigma)}<+\infty$, *необхідно і достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\beta_1(\varkappa_{n-1}(F))<+\infty$, *де* $\beta_1(x)=\int\limits_x^{\infty}\dfrac{d\sigma}{\sigma\alpha(\sigma)}$.

Якщо $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\alpha(t)} = +\infty$, *то для того щоб* $\int\limits_1^\infty \frac{d\sigma}{\alpha(\sigma)\ln\mu(\sigma,F)} < +\infty$, *необхідно і достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_n}\right)\beta_2\left(\varkappa_{n-1}(F)\right) < +\infty$, *де* $\beta_2(x) = \int\limits_1^x \frac{d\sigma}{\sigma\alpha(\sigma)}$.

3. Нехай z_k – нулі функції f, $r_k = |z_k|$, $n(t) = \sum\limits_{r_k \leqslant t} 1$ – лічильна функція нулів функції f, а $N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}dt$ – неванліннівська лічильна функція. Оскільки $\ln M_f(r)$ є повільно зростаючою функцією, то [2] $N(r) \sim \ln M_f(r)$, $r \to +\infty$. Тому у співвідношеннях (2) і (3) $\ln M_f(r)$ можна замінити на $N(r)$.

Неважко показати (і це добре відомо), що $N(r) = \sum\limits_{k=1}^n \ln\frac{1}{r_k} + n\ln r$ для $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$. З іншого боку, ряд Діріхле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^\infty \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{r_k}\right)e^{sn}, \tag{5}$$

завдяки монотонному прямуванню r_k до $+\infty$ є цілим, а $\ln\mu(\sigma,F^*) = \sum\limits_{k=1}^n \ln\frac{1}{r_k} + n\sigma$ при $\ln r_n \leqslant \sigma \leqslant \ln r_{n+1}$. Тому $N(r) = \ln\mu(\ln r, F^*)$. Отже, у співвідношеннях (2) і (3) замість $\ln M_f(r)$ можна поставити $\ln\mu(\ln r, F^*)$.

Застосуємо до ряду Діріхле (5) висновок наведеного вище твердження. Оскільки $\lambda_n = n$ і $\varkappa_n(F^*) = \ln r_{n+1} \nearrow +\infty$, то, якщо $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\alpha(t)} < +\infty$, для того щоб $\int\limits_1^\infty \frac{\ln\mu(\sigma,F^*)d\sigma}{\sigma^2\alpha(\sigma)} < +\infty$, необхідно і достатньо, щоб $\sum\limits_{n=1}^\infty \beta_1(\ln r_n) < +\infty$, а якщо $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\alpha(t)} = +\infty$, то для того щоб $\int\limits_1^\infty \frac{d\sigma}{\alpha(\sigma)\ln\mu(\sigma,F^*)} < +\infty$, необхідно і достатньо, щоб $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\beta_2(\ln r_n) < +\infty$.

З наведених вище міркувань випливає правильність теореми.

Теорема. *Якщо* $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\alpha(t)} < +\infty$, *то для того щоб ціла функція* f *належала до* α*-класу збіжності, необхідно і достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^\infty \beta_1(\ln r_n) < +\infty$, $\beta_1(x) = \int\limits_x^\infty \frac{d\sigma}{\sigma\alpha(\sigma)}$. *Якщо* $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\alpha(t)} = +\infty$, *то для того щоб* f *належала до* α*-класу збіжності, необхідно і достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\beta_2(\ln r_n) < +\infty$, $\beta_2(x) = \int\limits_1^x \frac{d\sigma}{\sigma\alpha(\sigma)}$.

1. *Muliava O.M.* A convergence class for entire Dirichlet series of slowly growth // Математ. студії. – 2000. – Т. 14. – N 2. – С.49-53 .

2. *Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Математ. заметки. – 1983. – Т. 34. – N 2. – С.227-236.

ON CONVERGENCE KLASSES THE ENTIRE FUNCTIONS OF SLOWLY GROWTH

O. Muliava

Drogobych State Pedagogic University

For an entire function a connection between the growth of maximum modulus and the zeroes distribution is established in the terms of certain convergence class.

Key words: *entire function of slowly growth.*

Стаття надійшла до редколегії 07.06.2000

Прийнята до друку 28.12.2000