ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 58. С. 32–35

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 2000. Vol. 58. P. 32–35

УДК 517.57

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ

Олег Скасків, Василь Сороківський

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львівська комерційна академія

Для цілого ряду Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n},\ a_n\geqslant 0\ (n\geqslant 1),\ a_0=1, \tag{1}$$

визначимо

$$\sigma_n(F)=\sup\left\{\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}\ :\ x\in\mathbb{R}\right\},\ S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k e^{x\lambda_k}.$$

Нехай h – додатна неспадна на $(0,+\infty)$ функція така, що $h(0)=0$, а $n(t)=\sum\limits_{\lambda_n\leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності $\lambda=(\lambda_n)$. Відомо [1], що умова

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{-2}h(\ln n(t))dt<+\infty \tag{2}$$

забезпечує правильність співвідношення

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{h(\ln(n+1))}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty \tag{3}$$

для кожної функції вигляду (1). У випадку $x=O(h(x))$ $(x\to+\infty)$ в [2,3] показано, що умова (2) є необхідною для того, щоб співвідношення (3) виконувалося для кожної цілої функції вигляду (1).

Цікаво, відмовившись від будь-яких умов на показники (крім монотонності), оцінити швидкість збіжності рядів вигляду (1). Зауважимо лише, що з цитованого результату з [1] випливає, що (порівняй з [4], теорема 2)

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\psi(\lambda_n)}{\lambda_n}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty$$

для кожної додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функцій $\psi(t)$ такої, що $\frac{t}{\psi(t)}\uparrow$ та $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t\psi(t)}<+\infty$. Для того щоб у цьому переконатися, достатньо вибрати $h(x)$

так, щоб $h(\ln n) \asymp \frac{\lambda_{n-1}}{\psi(\lambda_{n-1})}$ $(n \to +\infty)$. Справді,

$$\int\limits_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{h(\ln n(t))}{t^2} dt \asymp \frac{\lambda_{n-1}}{\psi(\lambda_{n-1})} \int\limits_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{dt}{t^2} \leqslant \int\limits_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{dt}{t\psi(t)} \ (n \to +\infty).$$

У [4] (теорема 2) доведено подібне твердження за додаткових обмежень

$$\frac{t}{\psi(t)\ln t} \to +\infty \ (t \to +\infty) \text{ та } \ln n(t) = o\left(\frac{t}{\psi(t)}\right) \ (t \to +\infty).$$

Зазначимо також, що у випадку, коли $\ln F(x) \leqslant \Phi(x)$ $(x > x_0)$, а $\Phi(x)$ – випукла така, що для правобічної похідної $\varphi'_+(x)$ функції $\varphi(x)$, оберненої до $\Phi(x)$, виконуються умови

$$t^2\varphi'_+(t) \uparrow +\infty, \ \frac{t^2\varphi'_+(t)}{\ln t} \to +\infty \ (t \to +\infty),$$

а, крім того, $\ln n(t) = o(t)$ $(t \to +\infty)$, в [4] показано (теорема 3), що $(\forall \eta \in (0;1))$ $(\exists n_k \uparrow +\infty)$:

$$\sigma_n(F) \leqslant \exp\left\{-\frac{\eta}{8}\lambda_n^2\varphi'(\lambda_n)\right\} \ (n = n_k).$$

Розглянемо клас цілих рядів Діріхле вигляду (1) нульового нижнього порядку за Ріттом і покажемо, що правильна така теорема.

Теорема 1. *Для кожного цілого ряду Діріхле вигляду (1) нульового нижнього порядку за Ріттом*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sigma_n(F)} = +\infty.$$

Відзначимо, що твердження теореми 1 суттєво сильніше за твердження, одержане вище з результату з [1], а також порівняно з цитованими теоремами у ньому немає будь-яких додаткових умов на послідовність показників.

Теорему 1 одержимо з такого загальнішого твердження.

Нехай $L(t)$ – двічі неперервно диференційовна на $(0 < +\infty)$ додатна функція така, що

$$tL'(t) \uparrow \ \text{і} \ (tL''(t)/L'(t)) \leqslant C < +\infty \ (t \to +\infty).$$

Теорема 2. *Якщо для цілого ряду Діріхле (1) виконується умова*

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{L(\ln F(\sigma))}{\sigma} = 0, \tag{4}$$

то

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 L'(\lambda_n)} \ln \frac{1}{\sigma_n(F)} = +\infty.$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що за доведеним в [1] для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\sigma_N(F) \leqslant \frac{2}{F(x)}, \ N = n(2g'(x)) - 1,$$

де $g(x) = \ln F(x)$. Визначимо додатну неперервну зростаючу до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцію $h(x)$ так, щоб виконувалася асимптотична рівність

$$h(\ln n(x)) \asymp x^2 L'(x).$$

Виберемо тепер додатну зростаючу до $+\infty$ неперервно диференційовну на $[0,+\infty)$ функцію $r(x)$ і функцію $\psi(x)$ такі, що

$$\psi^{-1}(x) = x^2 L'(x) r(x),\ \psi^{-1}(x) \geqslant x\ (x \to +\infty),$$
$$\frac{x r'(x)}{r(x)} \leqslant C < +\infty\ (x \to +\infty)$$

та

$$r(g(\sigma))L(g(\sigma)) = o(\sigma) \tag{5}$$

при $\sigma = \sigma_j \to +\infty$, де (σ_j) – послідовність, для якої в (4) досягається рівність, тобто $L(g(\sigma_j)) = o(\sigma_j)$.

Легко бачити, оскільки $tL'(t) \uparrow$, то $t^2 L'(t) \geqslant tc_1$ $(t \geqslant t_0)$, $c_1 > 0$ і описаний вище вибір функції $r(x)$ є можливий.

Зауважимо, що за умовами вибору $r(x)$

$$(\psi^{-1}(x))' \leqslant 2(1+C)L'(x)r(x)x\ (x \geqslant x_0).$$

Позначимо через $E = \{\sigma > 0\ :\ 2g'(\sigma) > \psi(g(\sigma))\}$. Тоді для оцінки величини множини E маємо (де $\operatorname{meas} E$ – лебегова міра на прямій)

$$\frac{1}{R}\operatorname{meas}(E\cap[0,R]) = \frac{1}{R}\int\limits_{E\cap[0,R]} d\sigma \leqslant \frac{2}{R}\int\limits_{E\cap[0,R]} \frac{g'(\sigma)}{\psi(g(\sigma))}d\sigma =$$
$$= \frac{2}{R}\int\limits_{g(E\cap[0,R])} \frac{dx}{\psi(x)} \leqslant \frac{2}{R}\int\limits_{x_0}^{\psi(g(R))} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} + o(1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4(1+C)}{R}\int\limits_{0}^{\psi(g(R))} L'(x)r(x)dx + o(1) \leqslant \frac{4(1+C)}{R} r(g(R))L(g(R)) + o(1),$$

Ми скористалися нерівністю $\psi(x) \leqslant x$, яка виконується за побудовою.

Звідси, при $R = \sigma_j \to +\infty$ за умовою вибору (5), отримуємо

$$0 \leqslant dE = \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\operatorname{meas}(E\cap[0,R]) \leqslant 4(1+C) \lim_{\sigma_j\to+\infty} \frac{r(g(\sigma_j))L(g(\sigma_j))}{\sigma_j} = 0,$$

тобто $dE = 0$.

Відзначимо, що за вибором $r(x)h(\ln n(x)) = o(\psi^{-1}(x))$ $(x \to +\infty)$.

Зауважимо, що існує послідовність $\{R_j\} \not\subset E$ така, що $R_j \uparrow +\infty$ і, отже, при $R = R_j \to +\infty$ одночасно виконується для $x = 2g'(R_j)$

$$x^2 L'(x) \asymp h(\ln n(x)) \leqslant h(\psi(g(R_j))) = o(g(R_j)).$$

Тому при $N = n(x) - 1$, $x = 2g'(R_j)$ одержимо

$$\ln\frac{1}{\sigma_N(F)} \geqslant g(R_j) - \ln 2 \text{ та } \frac{1}{x^2 L'(x)}\ln\frac{1}{\sigma_N(F)} \to +\infty\ (R_j \to +\infty).$$

Залишилося зауважити, що $x = 2g'(R_j) \in [\lambda_N, \lambda_{N+1}]$. Тому $x^2 L'(x) \geqslant \lambda_N^2 L'(\lambda_N)$ і остаточно отримуємо для $N = n(x) - 1$, $x = 2g'(R_j)$

$$\frac{1}{\lambda_N^2 L'(\lambda_N)}\ln\frac{1}{\sigma_N(F)} \to +\infty\ (R_j \to +\infty).$$

Теорему 2 доведено.

Теорему 1 одержуємо з теореми 2, вибираючи в теоремі 2 $L(x) \equiv \ln x$.

Відзначимо, що в праці [5] твердження подібні до доведених тут, навіть у випадку лакунарних степеневих рядів одержуються за додаткових припущень щодо показників та максимально можливої швидкості зростання суми ряду.

---

1. *Скаскiв О.Б.* До теореми Шеремети про швидкість збіжності додатних рядів Діріхле // Матем. студії. – Т.12. – №2. – С.222–224.
2. *Орищин О.Г., Скаскiв О.Б.* Про швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле // Матем. студії. – 1997. – Т.7. – №2. – С.167–179.
3. *Орищин О.Г., Скаскiв О.Б.* Швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле // Доп. НАН України. – 1998. – №4. – С.41–44.
4. *Шеремета М.Н.* О скорости сходимости частных сумм целого ряда Дирихле // Теория функций, функциональный анализ и их прилож. (Харьков). – 1983. – Вып.40. – С.141–145.
5. *Шеремета М.Н.* Рациональная аппроксимация на $[0, +\infty)$ целых функций произвольного роста с неотрицательными тейлоровскими коэфициентами // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31. – №3. – С.303–311.

ON THE CONVERGENCE RATE OF DIRICHLET SERIES OF ZERO RITT'S ORDER

O. Skaskiv, V. Sorokivs'kyi

Ivan Franko National University of Lviv
Lviv Comercial Academy

We prove that $\sup\left\{\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)} \ : \ n > 0\right\} = +\infty$, where $\sigma_n(F) = \sup\left\{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{x\lambda_k}\right)^{-1} - \frac{1}{F(x)} \ : \ x \in \mathbb{R}\right\}$, for any entire Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $a_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 1)$, $a_0 = 1$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ of zero Ritt's order.

Key words: *Dirichlet series.*

Стаття надійшла до редколегії 07.07.2000

Прийнята до друку 28.12.2000