ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.36-40

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.36-40

УДК 517.5

ПРО ПОВІЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ЛІЧИЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ДОДАТНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Олег Скасків, Олеся Тракало

Львівський національниий університет імені Івана Франка

Нехай $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – ціла функція, а $M_f(r)=\max\{|f(z)|\,:\,|z|=r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n\,:\,n\geqslant 0\}$, $T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta$, $\nu_f(r)=\max\{n\,:\,|a_n|r^n=\mu_f(r)\}$. Просто перевірити (див. також [1]), що функції $\ln M_f(r)$, $\ln\mu_f(r)$ і $T(r,f)$ є повільно зростаючими одночасно, при цьому функція f має нульовий порядок.

Відзначимо, що умови повільного зростання усередненої лічильної функції $N(r)=\int\limits_0^r n(t)/t\,dt$ (де $n(t)=\sum\limits_{0<\lambda_n\leqslant t}1$ – лічильна функція додатної послідовності (λ_n), $\lambda_n\uparrow+\infty$) негайно отримуємо з умов повільного зростання $\ln\mu_f(r)$ цілої функції f з коефіцієнтами $a_n=(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{-1}$, оскільки у цьому випадку $N(r)=\ln\mu_f(r)$. Крім того, якщо $n(t)$ – повільно зростаюча (змінна), то очевидно є повільно зростаючою функцією і її усереднення $N(r)$.

1.Повільне зростання лічильної функції. У статті [1] сформульовано таку проблему: знайти необхідні та достатні умови повільного зростання центрального індексу $\nu_f(r)$ в термінах тейлорових коефіцієнтів цілої функції f. Тому природно виникає задача про знаходження умов повільного зростання функції $n(t)$. Доведемо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $h(x)$ – додатна зростаюча до $+\infty$ неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ функція така, що*

$$h(x+1)=(1+o(1))h(x)\quad i\quad \frac{h'(x)}{h(x)}\searrow 0\quad (x\to+\infty).$$

1. Якщо виконується умова

$$\frac{h'(n-1)}{h(n-1)}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\to 0\quad (n\to+\infty),$$

то функція $h(n(t))$ – повільно зростаюча.

2. Якщо $h(n(t))$ повільно зростаюча, то

$$\frac{h'(n)}{h(n)}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\to 0\quad (n\to+\infty).$$

Доведення. Визначимо функцію $l(t) = \dfrac{t-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} + n - 1$ для $t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ і $n \geqslant 1$. Оскільки

$$n(t) - 1 \leqslant l(t) \leqslant n(t) \quad (t \geqslant \lambda_1),$$

то функції $h(n(t))$ і $h(l(t))$ є повільно зростаючими одночасно. Зауважимо, що для $t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ правобічна похідна $l'(t) = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$, тому для правобічної похідної $\varphi'(t)$ функції $\varphi(t) = h(l(t))$ для $t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ маємо

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}t = h'(l(t))\frac{l'(t)}{h(l(t))}t \leqslant \frac{h'(n-1)}{h(n-1)}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} =$$
$$= \frac{h'(n-1)}{h(n-1)}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} + \frac{h'(n-1)}{h(n-1)} = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Звідси випливає

$$0 \leqslant \ln\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} = \int_t^{2t} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} x \frac{dx}{x} = o(1) \quad (t \to +\infty),$$

тобто $\varphi(2t) \sim \varphi(t)$ $(t \to +\infty)$ і функція $\varphi(t) = h(l(t))$ є повільно зростаючою. Твердження 1 доведено.

За умов твердження 2 зауважимо таке, оскільки правобічна похідна $l'(t) \searrow$ $(t \to +\infty)$, то

$$\ln\frac{h(l(2t))}{h(l(t))} = \int_t^{2t} \frac{h'(l(x))}{h(l(x))} l'(x)dx \geqslant \frac{h'(l(2t))}{h(l(2t))} l'(2t)t.$$

Оскільки $h(l(t))$ – повільно зростаюча, то звідси негайно маємо $\ln\dfrac{h(l(2t))}{h(l(t))} \to 0$ $(t \to +\infty)$ і, отже,

$$\psi(x) = \frac{h'(l(x))}{h(l(x))} l'(x)x \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

Залишилось пригадати, що при $x \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$

$$\psi(x) = \frac{h'(n)}{h(n)}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}.$$

Теорему доведено.

Наведемо деякі наслідки з теореми.

Наслідок 1. *Достатньою умовою (а за умови $(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \nearrow$ і необхідною) повільного зростання лічильної функції $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ є умова*

$$n\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1\right) \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

Наслідок 2. *Достатньою умовою (а за умови* $(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \nearrow$ *і необхідною) повільного зростання функції* $\ln n(t)$ *є умова*

$$n\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1\right)\ln n \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

Щоб переконатися у правильності наслідків 1 і 2, достатньо в теоремі 1 вибрати $h(x) = x$ і $h(x) = \ln x$ відповідно.

Легко зрозуміти, як треба модифікувати одержані твердження у випадку, коли послідовність (λ_n) має кратні точки.

Проілюструємо це на прикладі повільного зростання лічильної функції $n(t)$ послідовності $\lambda_n \nearrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$ з кратними точками. Тобто послідовності (λ_n) такої, що існує послідовність $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що $\lambda_{n_k} \uparrow +\infty$ і $\lambda_n = \lambda_{n_k}$ для $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Позначимо $\tilde\lambda_k = \lambda_{n_k}$ і визначимо для $\tilde\lambda_k \leqslant \sigma < \tilde\lambda_{k+1}$ функцію

$$l(\sigma) = \frac{t - \tilde\lambda_k}{\tilde\lambda_{k+1} - \tilde\lambda_k}(n_k - n_{k-1}) + n_{k-1}.$$

Оскільки $n(\tilde\lambda_k) = n_k$, $\dfrac{n(2\tilde\lambda_k - 0)}{n(\tilde\lambda_k - 0)} \geqslant \dfrac{n_k}{n_{k-1}} > 1$ та у випадку повільного зростання $n(2t) \sim n(t)$ $(t \to +\infty)$, то необхідно $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \to 1$ $(k \to +\infty)$. Тому для $\sigma \in [\tilde\lambda_k, \tilde\lambda_{k+1})$ одержуємо при $\sigma \to +\infty$

$$(1 + o(1))n(\sigma) = n_{k-1} \leqslant l(\sigma) < n_k = n(\sigma).$$

Тобто функції $l(\sigma)$ і $n(\sigma)$ є одночасно повільно зростаючими. Зауважимо, що для правобічної похідної $l'(\sigma)$ при $\sigma \in [\tilde\lambda_k, \tilde\lambda_{k+1})$ маємо

$$\frac{l'(\sigma)}{l(\sigma)}\sigma = \frac{n_k - n_{k-1}}{\tilde\lambda_{k+1} - \tilde\lambda_k}\frac{\sigma}{l(\sigma)} \leqslant \frac{n_k - n_{k-1}}{n_{k-1}}\frac{\tilde\lambda_{k+1}}{\tilde\lambda_{k+1} - \tilde\lambda_k}.$$

Отже, достатньою умовою повільного зростання $n(t)$ є умова

$$\left(\frac{n_k}{n_{k-1}} - 1\right)\left(1 + \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}\right) = o(1) \quad (k \to +\infty). \tag{1}$$

Припускаючи, що

$$\frac{n_k - n_{k-1}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \searrow, \tag{2}$$

отримуємо, що правобічна похідна

$$l'(\sigma) = \frac{n_k - n_{k-1}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \quad (\sigma \in [\tilde\lambda_k, \tilde\lambda_{k+1}))$$

є незростаючою. Звідси, як і вище, маємо, що у випадку, коли $n(t)$ (а отже, і $l(t)$) є повільно зростаючою, то $\psi(x) = \dfrac{l'(x)}{l(x)}x \to 0$ $(x \to +\infty)$, де $l'(x)$ – правобічна похідна. Зауважимо, що

$$\psi(\tilde\lambda_k + 0) = \frac{n_k - n_{k-1}}{\tilde\lambda_{k+1} - \tilde\lambda_k}\frac{\tilde\lambda_k}{n_{k-1}}.$$

Отже, виконується умова (1).

Підсумовуючи, сформулюємо доведене твердження.

Теорема 2. *Нехай послідовність* (λ_n), $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ *така, що* $\lambda_n = \lambda_{n_k}$ *для* $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, *а* $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$. *Для того щоб лічильна функція* $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ *була повільно зростаючою достатньо, а у випадку, коли виконується умова (2) і необхідно, щоб виконувалась умова (1).*

2. Повільне зростання центрального індексу степеневого ряду. Отримані вище твердження дають змогу сформулювати умови повільного зростання центрального індексу $\nu_f(r)$ цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

Зокрема, з наслідку 1 випливає твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $r_n = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. *Для того щоб функція* $\nu_f(r)$ *була повільно зростаючою достатньо, а у випадку, коли* $r_{n+1} - r_n \nearrow$, *і необхідно, щоб*

$$n\left(\frac{|a_{n+1}||a_{n-1}|}{|a_n|^2} - 1\right) \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

Для доведення наслідку 3 досить зауважити, що у випадку, коли $r_n \uparrow +\infty$, маємо

$$\nu_f(r) = n \quad \text{для} \quad r \in [r_n, r_{n+1}).$$

Тобто, достатньо застосувати наслідок 1 до послідовності (r_n), лічильна функція якої $n(r) = \nu_f(r) + 1$.

У випадку, коли a_n^* – коефіцієнти мажоранти Ньютона цілої функції вигляду (3), то добре відомо, що $r_n = \dfrac{a_{n-1}^*}{a_n^*} \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, а також $\nu_f(r) \equiv \nu_{f_1}(r)$, де $f_1(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* z^n$ – мажоранта Ньютона, а також, якщо $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ послідовність така, що $r_n^* = r_{n_k}^*$ для $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то $\nu_f(r) = n_k$. Добре відомо, що у цьому випадку

$$r_{n_k}^* = \left(\frac{|a_{n_{k-1}}|}{|a_{n_k}|}\right)^{\dfrac{1}{n_k - n_{k-1}}}.$$

Останнє спостереження дає змогу за допомогою теореми 2 сформулювати твердження.

Наслідок 4. *Нехай* $J = \{n_k\}$ *– множина всіх значень центрального індексу* $\nu_f(r)$, *занумерованих так, що* $0 \leqslant n_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$, *а* $R_k = (|a_{n_{k-1}}|/|a_{n_k}|)^{1/(n_k - n_{k-1})}$ *Для того щоб функція* $\nu_f(r)$ *була повільно зростаючою достатньо, а у випадку, коли* $\dfrac{n_k - n_{k-1}}{R_{k+1} - R_k} \searrow$ *і необхідно, щоб виконувалась умова*

$$\left(\frac{n_k}{n_{k-1}} - 1\right)\left(1 + \frac{R_k}{R_{k+1} - R_k}\right) = o(1) \quad (k \to +\infty).$$

1. *Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65. – N 2. – С. 206–214.

ON A SLOWLY INCREACING COUNTING FUNCTION OF A POSITIVE SEQUENCE

O. Skaskiv, O. Trakalo

Ivan Franko National University of Lviv

Conditions of slowly variation of the counting function of an positive increasing to $+\infty$ sequence are established.

Key words: *entire funktions, counting function.*

Стаття надійшла до редколегії 01.09.2000

Прийнята до друку 28.12.2000