ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.54–56

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.54–56

УДК 517.53

ПРО БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ ЦІЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Зоряна Шеремета

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача

Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Функція f називається близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\operatorname{Re} \dfrac{f'(z)}{\Phi'(z)} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f_1 \neq 0$.

С.Шах [1] вивчав умови на сталі коефіцієнти диференціального рівняння

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0, \tag{2}$$

при яких цілий розв'язок f цього рівняння і всі його похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.

Легко побачити, що (1) є розв'язком (2) тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma_2 f_0 = 0, \quad (\beta_1 + \gamma_2) f_1 + \gamma_1 f_0 = 0 \tag{3}$$

і

$$\{n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2\} f_n + \{\beta_0(n-1) + \gamma_1\} f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = 0 \quad (n \geqslant 2). \tag{4}$$

Якщо $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \neq 0$, то останню рівність можна записати у вигляді

$$f_n = -\frac{\beta_0(n-1) + \gamma_1}{n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2} f_{n-1} - \frac{\gamma_0}{n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2} f_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \tag{5}$$

Якщо $\gamma_0 = 0$, або $\beta_0 = \gamma_1 = 0$, то двочленна рекурентна формула (5) перетворюється в одночленну рекурентну формулу, і в цьому випадку С.Шах [1] при додаткових умовах на інші коефіцієнти рівняння (2) показав, що існує його цілий розв'язок f такий, що f, f', f'', ... є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями і

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sigma r, \; r \to \infty, \tag{6}$$

де або $\sigma = |\beta_0|$, або $\sigma = \sqrt{\gamma_0}$, а $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Значно складніший випадок, коли $\gamma_0 \neq 0$ і $\beta_0 \neq 0$, вивчений в [2], де за певних умов на коефіцієнти показано, що існує цілий розв'язок f рівняння (2) такий, що всі $f^{(k)}$, $k \geqslant 0$, є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і виконується (6) з $\sigma = \dfrac{1}{2}(|\beta_0| + \sqrt{|\beta_0|^2 + 4\gamma_0})$.

Виникає природне запитання, чи може рівняння (2) мати такий цілий розв'язок f, що всі $f^{(k)}$, $k \geqslant 0$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$, а (6) не виконується. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Якщо $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, $\beta_1 = -\gamma_2 > -2$ і $-(2+\beta_1) \leqslant 2\gamma_1 < 0$, то існує цілий розв'язок*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n \tag{7}$$

рівняння (2) такий, що $f, f', f'' \dots$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і

$$\ln M_f(r) = 2(1+o(1))\sqrt{|\gamma_1| r}, \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Доведення. Відомо [3, с.10] таке: якщо

$$1 \geqslant 2f_2 \geqslant 3f_3 \geqslant \ldots \geqslant nf_n \geqslant (n+1)f_{n+1} \geqslant \cdots > 0, \tag{9}$$

то функція (7) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Оскільки $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ і $\beta_1 = -\gamma_2$, то з (5) одержуємо рекурентну формулу

$$f_n = \frac{|\gamma_1|}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1} \quad (n \geqslant 2). \tag{10}$$

З умови $-(2+\beta_1) \leqslant 2\gamma_1 < 0$ випливає, що $1 \geqslant 2f_2$ і $n|\gamma_1| \leqslant (n-1)^2(n+\beta_1)$ для всіх $n \geqslant 2$, тобто $nf_n = \dfrac{n|\gamma_1|}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1} \leqslant (n-1)f_{n-1}$. Отже, виконуються нерівності (9) і f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Нехай тепер $k \geqslant 1$. Оскільки $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} z^n$, де $f_n^{(k)} = \dfrac{(n+k)!}{n!} f_{n+k}$, і всі $f_n^{(k)} > 0$, то $f^{(k)}$ є близькою до опуклої тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$\frac{f^{(k)}(z) - f_0^{(k)}}{f_1^{(k)}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n,k} z^n, \tag{11}$$

де $f_{0,k} = 0,\ f_{1,k} = 1,\ f_{n,k} = f_n^{(k)}/f_1^{(k)}$ $(n \geqslant 2)$, тобто

$$f_{n,k} = \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!} \frac{f_{n+k}}{f_{1+k}}. \tag{12}$$

Із (10) і (12) маємо

$$\begin{aligned} f_{n,k} &= \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!f_{1+k}} \frac{|\gamma_1|}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)} f_{n-1+k} = \\ &= \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!f_{1+k}} \frac{|\gamma_1|}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)} \frac{(n-1)!(k+1)!f_{1+k}}{(n+k-1)!} f_{n-1,k} = \\ &= \frac{n+k}{n} \frac{|\gamma_1|}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)} f_{n-1,k}. \end{aligned}$$

Неважко показати, що $(k+2)|\gamma_1| \leqslant (k+1)(k+2+\beta_1)$, і, отже, $2f_{2,k} \leqslant 1$.

Неважко також показати, що $(k+n)|\gamma_1| \leqslant (n-1)(k+n-1)(k+n+\beta_1)$, а тому

$$nf_{n,k} = \frac{(n+k)|\gamma_1|}{(n+k-1)(n+k+\beta_1)} f_{n-1,k} \leqslant (n-1)f_{n-1,k}.$$

Отже, для функції (11) виконуються нерівності (9) і близькість до опуклості функції $f^{(k)}(z)$ доведена для кожного $k \geqslant 0$.

Нехай $\mu_f(r) = \max\{f_n r^n : n \geqslant 1\}$ – максимальний член ряду (7), а $\nu_f(r) = \max\{n : f_n r^n = \mu_f(r)\}$ – його центральний індекс. Оскільки $\varkappa_{n-1} = f_n/f_{n-1} = (n-1)(n+\beta_1)/|\gamma_1| \uparrow \infty$, $n \to \infty$, то $\nu_f(r) = n$ для $r \in (\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$, звідки випливає, що $r = (1+o(1))\nu_f^2(r)/|\gamma_1|$, $r \to +\infty$, тобто $\nu_f(r) = (1+o(1))\sqrt{|\gamma_1|r}$, $r \to +\infty$. Тому

$$\ln \mu_f(r) = \ln \mu_f(1) + \int_1^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt = 2(1+o(1))\sqrt{|\gamma_1|r},\ r \to +\infty$$

і оскільки за теоремою Бореля $\ln f(r) \sim \ln \mu_f(r)$, $r \to +\infty$, то доведення теореми 1 завершено.

Зауваження. Якщо $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ і $\beta_1 = -\gamma_2 = -2$, то з (4) при $n = 2$ отримуємо $\gamma_1 = 0$ і рівняння (2) зводиться до рівняння $z^2 w'' - 2zw' + 2w = 0$, яке не має цілих трансцендентних розв'язків (загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $w = az + bz^2$).

1. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. anal. and appl.– 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
2. *Шеремета З.М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2000. - Т. 36. – N 6. – С.921-929.
3. *Goodman A.W.* Univalent function. – Vol. II. – Mariner Publishing Co., 1983.

ON THE CLOSE-TO-CONVEXITY OF ENTIRE SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION

Z. Sheremeta

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Meckanics and Mathematics

Conditions on constant coefficients of differential equation $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$, under which there exists an entire solution f such that f and all its derivatives $f', f'', \ldots$ are close-to-convex in the unit disk is investigated.

Key words: *entire solution, differential equation.*

Стаття надійшла до редколегії 06.07.2000

Прийнята до друку 28.12.2000