ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.57–61 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.57–61*

УДК 517.537.72

ПРО МАКСИМУМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

МИРОСЛАВ ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка

1. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda; +\infty)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

із заданою послідовністю показників (λ_n). Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 1\}$ – максимальний член ряду (1). Говоритимемо, що цілий ряд Діріхле (1) має повільне зростання, якщо

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\sigma\alpha(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

де α – повільно зростаюча функція. Завдяки нерівності Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$, з (2) випливає нерівність

$$\ln \mu(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\sigma\alpha(\sigma), \quad \sigma \to +\infty. \tag{3}$$

Ми зазначимо умови на Λ, за яких з (3) випливає (2). Для цього через $S^*(\Lambda; +\infty)$ позначимо клас формальних рядів Діріхле (1) таких, що $|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \to 0$, $n \to \infty$, для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$, тобто максимальний член такого ряду існує для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$, але абсциса абсолютної збіжності може не дорівнювати $+\infty$. Говоритимемо, що такий ряд належить до класу $S_\alpha^*(\Lambda; +\infty)$, якщо виконується співвідношення (3).

Теорема. *Нехай α – додатна двічі неперервно диференційована зростаюча до $+\infty$ на $[\sigma_0, +\infty)$ функція така, що $(\sigma\alpha(\sigma))' \uparrow +\infty$ і $\dfrac{\sigma\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)} \ln \alpha(\sigma) \to 0$ при $\sigma_0 \leqslant \sigma \to +\infty$. Для того щоб кожний ряд Діріхле $F \in S_\alpha^*(\Lambda; +\infty)$ належав до $S(\Lambda; +\infty)$ і для нього виконувалось співвідношення (2), достатньо, щоб*

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(\ln n(t))}{t} < 1, \tag{4}$$

і необхідно, щоб

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(\ln n(t))}{t} \leqslant 1. \tag{5}$$

Доведення. Нехай послідовність Λ задовольняє умову (4).

Через Ω позначимо клас додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [1] функція Ψ неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$, а функція φ неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(0, +\infty)$. В [1] доведено, що для того щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_*$ необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_*$. Але $(x\Psi(\varphi(x)))' = (x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)))' = \varphi(x) + x\varphi'(x) - \Phi'(\varphi(x))\varphi'(x) = \varphi(x)$. Тому, якщо $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_*$, то $\ln |a_n| \leqslant -\int\limits_0^{\lambda_n} \varphi(t)dt + c_1$, $c_1 = \text{const}$.

З (3) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $\sigma \geqslant \sigma_*(\varepsilon)$ виконується нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant (1+\varepsilon)\sigma\alpha(\sigma)$. Виберемо функцію $\Phi \in \Omega$ так, щоб $\Phi(\sigma) = (1+\varepsilon)\sigma\alpha(\sigma)$ при $\sigma \geqslant \sigma_*(\varepsilon)$. Тоді $\Phi'(\sigma) = (1+\varepsilon)(\alpha(\sigma) + \sigma\alpha'(\sigma)) = (1+o(1))(1+\varepsilon)\alpha(\sigma) \leqslant (1+\varepsilon)^2\alpha(\sigma)$ для всіх досить великих σ і тому $\varphi(t) \geqslant \alpha^{-1}\left(\dfrac{t}{(1+\varepsilon)^2}\right)$ при $t \geqslant t_0(\varepsilon)$. Отже, для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leqslant -A(\lambda_n) + c_2, \quad A(x) = \int\limits_{t_0}^{x} \alpha^{-1}\left(\frac{t}{(1+\varepsilon)^2}\right) dt, \quad c_2 = \text{const}. \tag{6}$$

Оскільки функція α^{-1} зростаюча, то

$$\left(\frac{A(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}\left(\alpha^{-1}\left(\frac{t}{(1+\varepsilon)^2}\right)x - \int\limits_{t_0}^{x} \alpha^{-1}\left(\frac{t}{(1+\varepsilon)^2}\right)dt\right) > 0$$

і, отже, функція $A(x)/x$ зростаюча. Приймемо $N(\sigma) = \min\{n : A(\lambda_n)/\lambda_n \geqslant 2\sigma\}$. Тоді $N(\sigma) \geqslant n_0(\varepsilon)$ для всіх досить великих σ і, завдяки (6),

$$\begin{aligned} M(\sigma, F) &\leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda_{N(\sigma)}} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant \\ &\leqslant N(\sigma)\mu(\sigma, F) + e^{c_2} \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\{-A(\lambda_n) + \sigma\lambda_n\} = \\ &= N(\sigma)\mu(\sigma, F) + e^{c_2} \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\left\{-A(\lambda_n)\left(1 - \sigma\frac{\lambda_n}{A(\lambda_n)}\right)\right\} \leqslant \\ &\leqslant N(\sigma)\mu(\sigma, F) + e^{c_2} \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\left\{-A(\lambda_n)\left(1 - \sigma\frac{\lambda_{N(\sigma)}}{A(\lambda_{N(\sigma)})}\right)\right\} \leqslant \\ &\leqslant N(\sigma)\mu(\sigma, F) + e^{c_2} \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}A(\lambda_n)\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Легко побачити, що

$$A(x) \geqslant \int\limits_{x(1+\varepsilon)^{-1}}^{x} \alpha^{-1}\left(\frac{t}{(1+\varepsilon)^2}\right) dt \geqslant \alpha^{-1}\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)^3}\right)\frac{\varepsilon x}{1+\varepsilon} \geqslant \alpha^{-1}\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)^3}\right)$$

при $x \geqslant (1+\varepsilon)/\varepsilon$, а з умови (4) випливає, що $\ln n(x) \leqslant \alpha^{-1}(qx)$ для деякого $q \in (0, 1)$ і всіх $x \geqslant x_0$. Виберемо ε настільки малим, щоб $(1+\varepsilon)^3 \leqslant 2/(1+q)$.

Тоді

$$\frac{\ln n(x)}{A(x)} \leqslant \frac{\alpha^{-1}(qx)}{\alpha^{-1}((1+q)x/2)} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

бо, якщо $\beta(x) = \alpha^{-1}(x)$ і $\eta \in (0,\,1)$, то, завдяки умові $\dfrac{\sigma\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)} \to 0$, $\sigma_0 \leqslant \sigma \to +\infty$, при деякому $\xi = \xi(x) \in (\eta x,\, x)$

$$\ln\,\beta(x) - \ln\,\beta(\eta x) = \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)}(1-\eta)x \geqslant \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)}(1-\eta)\xi \to +\infty, \quad x \to +\infty.$$

Тому $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}A(\lambda_n)\right\} < +\infty$, і з (7) отримуємо нерівність $M(\sigma, F) \leqslant N(\sigma)\mu(\sigma, F) + o(1)$, $\sigma \to +\infty$, тобто $\ln\,M(\sigma, F) \leqslant \ln\,N(\sigma) + \ln\,\mu(\sigma, F) + o(1)$, $\sigma \to +\infty$. Щоб завершити доведення достатності умови (4), треба показати, що $\ln\,N(\sigma) = o(\sigma\alpha(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$.

З означення $N(\sigma)$ випливає, що $A(\lambda_{N(\sigma)-1})/\lambda_{N(\sigma)-1} \leqslant 2\sigma$. Як було показано вище, $A(x) \geqslant \alpha^{-1}\left(\dfrac{x}{(1+\varepsilon)^3}\right)\dfrac{\varepsilon x}{1+\varepsilon}$. Тому $\alpha^{-1}\left(\dfrac{\lambda_{N(\sigma)-1}}{(1+\varepsilon)^3}\right)\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqslant 2\sigma$ і, оскільки α – повільно зростаюча функція, то $\lambda_{N(\sigma)-1} \leqslant (1+\varepsilon)^3\alpha(2(1+\varepsilon)\sigma/\varepsilon) \leqslant (1+\varepsilon)^4\alpha(\sigma)$ для всіх досить великих σ, тобто $N(\sigma) - 1 \leqslant n((1+\varepsilon)^4\alpha(\sigma))$ для всіх досить великих σ. Отже,

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,N(\sigma)}{\sigma\alpha(\sigma)} \leqslant \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,n((1+\varepsilon)^4\alpha(\sigma)}{\sigma\alpha(\sigma))} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon)^4 \ln\,n(x)}{x\alpha^{-1}\left(\dfrac{x}{(1+\varepsilon)^4}\right)} = 0.$$

Остання рівність випливає з нерівності $\ln\,n(x) \leqslant \alpha^{-1}(qx)$ для деякого $q \in (0,\,1)$ і всіх $x \geqslant x_0$ і вибору ε настільки малим, щоб $(1+\varepsilon)^4 \leqslant 2/(1+q)$. Достатність умови (4) доведено.

Доведемо необхідність умови (5). Припустимо, що (5) не виконується, тобто $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln\,n)}{\lambda_n} > 1$. Тоді існує $q > 1$ таке, що $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\,n}{\alpha^{-1}(q\lambda_n)} > 1$, бо $\alpha^{-1}(q_1 x) = o(\alpha^{-1}(q_2 x))$, $x \to +\infty$, якщо $q_1 < q_2$. В [2] доведено таке: якщо (μ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\,n}{\mu_n} > 1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\mu_k^*\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\mu_{k_j}^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності k_j. Тому існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\alpha^{-1}(q\lambda_k^*)\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\alpha^{-1}(q\lambda_{k_j}^*)\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності k_j.

Приймемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\left\{-\int\limits_0^{\lambda_k^*} \alpha^{-1}(t)dt\right\}$ (для простоти вважаємо, що функція α^{-1} визначена і неперервна на $[0,\,+\infty)$).

Для ряду Діріхле (1) з такими коефіцієнтами маємо:

$$\ln\,\mu(\sigma,F)\leqslant\max\left\{-\int\limits_0^x\alpha^{-1}(t)dt+\sigma x:\,x\geqslant 0\right\}=-\int\limits_0^{\alpha(\sigma)}\alpha^{-1}(t)dt+\sigma\alpha(\sigma)=$$

$$=-\int\limits_{\alpha^{-1}(0)}^{\sigma}xd\alpha(x)+\sigma\alpha(\sigma)=\int\limits_{\alpha^{-1}(0)}^{\sigma}\alpha(x)dx=(1+o(1))\sigma\alpha(\sigma),\quad\sigma\to+\infty,$$

тобто він належить до класу $S^*_\alpha(\Lambda;+\infty)$.

Приймемо тепер $m_j=\left[k_j-\sqrt{k_j}\right]+2$. Тоді

$$\lambda^*_{m_j}\geqslant\frac{1}{q}\alpha(\ln\,(m_j-1))\geqslant\frac{1}{q}\alpha(\ln\,(k_j-\sqrt{k_j}))=\frac{1}{q}\alpha(\ln\,k_j)-$$
$$-\frac{1}{q}\left(\alpha(\ln\,k_j)-\alpha(\ln\,(k_j-\sqrt{k_j}))\right)\geqslant\lambda^*_{k_j}-\delta_j,$$

де

$$\delta_j=\frac{\alpha'(\ln\,\xi_j)}{q\xi_j}\sqrt{k_j},\quad k_j-\sqrt{k_j}\leqslant\xi_j\leqslant k_j.$$

Приймемо, нарешті, що $\sigma_j=\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j})$. Тоді

$$\sum_{k=m_j}^{k_j}a^*_k\exp\{\sigma_j\lambda^*_k\}\geqslant\sum_{k=m_j}^{k_j}\exp\left\{-\int\limits_0^{\lambda^*_k}\alpha^{-1}(t)dt+\sigma_j\lambda^*_k\right\}\geqslant$$

$$\geqslant(k_j-m_j+1)\exp\left\{-\int\limits_0^{\lambda^*_{k_j}}\alpha^{-1}(t)dt+\sigma_j\lambda^*_{m_j}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant(k_j-m_j+1)\exp\left\{-\int\limits_0^{\lambda^*_{k_j}}\alpha^{-1}(t)dt+\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j})\lambda^*_{k_j}-\delta_j\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j})\right\}\geqslant$$

$$\geqslant(\sqrt{k_j}-1)\exp\{-\delta_j\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j})\}.$$

Якщо цей ряд Діріхле виявиться цілим, тобто $M(\sigma,F)$ існує для всіх $\sigma\in\mathbb{R}$, то

$$\ln\,M(\sigma_j,F)\geqslant\frac{1}{2}\ln\,k_j-\delta_j\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j})+o(1)\geqslant\frac{1}{2}\alpha^{-1}(q\lambda^*_{k_j})-\delta_j\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j})+o(1)=$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\alpha^{-1}(q\lambda^*_{k_j})-o(\alpha^{-1}(\lambda^*_{k_j}))\geqslant\frac{1+o(1)}{2}\alpha^{-1}(q\lambda^*_{k_j}),\quad j\to\infty,$$

бо

$$\delta_j=\frac{\alpha'(\ln\,\xi_j)\ln\,\xi_j}{\alpha(\ln\,\xi_j)}\frac{\alpha(\ln\,\xi_j)}{\ln\,\xi_j}\frac{(1+o(1))\sqrt{\xi_j}}{q\xi_j}\to 0,\quad j\to\infty.$$

Отже,

$$\frac{\ln\,M(\sigma_j,F)}{\sigma_j\alpha(\sigma_j)}\geqslant\frac{(1+o(1))\alpha^{-1}(q\alpha(\sigma_j))}{2\sigma_j\alpha(\sigma_j)}\to+\infty,\quad\sigma\to+\infty,$$

бо для $q > 1$ і $a(x) = \alpha^{-1}(x)$ маємо

$$\ln \frac{a(qx)}{xa(x)} = \frac{a'(\xi)}{a(\xi)}(q-1)x - \ln x \geqslant \frac{q-1}{q}\frac{\xi a'(\xi)}{a(\xi)} - \ln \xi, \quad x < \xi < qx,$$

а завдяки умові $\dfrac{\sigma\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)} \ln \alpha(\sigma) \to 0$, $\sigma \to +\infty$,

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{\xi a'(\xi)}{a(\xi)\ln \xi} = \lim_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\sigma)}{\alpha'(\sigma)\sigma \ln \sigma} = +\infty.$$

Отже, якщо умова (5) не виконується, то існує ряд Діріхле з класу $S_\alpha^*(\Lambda; +\infty)$, який або не є цілим, або для нього співвідношення (2) не справджується. Теорему повністю доведено.

---

1. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т 39. – N 1. – С. 206-223.
2. *Шеремета М.Н.* О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества // Матем. заметки. – 1995. – Т.57. – N2. – С. 283-296.

ON THE MAXIMUM MODULUS AND THE MAXIMAL TERM OF A ENTIRE DIRICHLET SERIES OF SLOWLY GROWTH

M. Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv

Conditions on exponents of an entire Dirichlet series are estalished in order that the relations $\ln M(\sigma) \leqslant (1+o(1))\sigma\alpha(\sigma)$ and $\ln \mu(\sigma) \leqslant (1+o(1))\sigma\alpha(\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$ are equivalent, where $M(\sigma)$ is the maximum modulus and $\mu(\sigma)$ is the maximal term of the Dirichlet series and α is slowly increasing function.

Key words: *entire Dirichlet series.*

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2000

Прийнята до друку 28.12.2000