ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.70–75

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.70–75

УДК 513.6

ПРО ВЛАСТИВОСТІ НОРМУВАНЬ ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИХ ПОЛІВ

Василь Андрійчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо проективну, неособливу, абсолютно незвідну криву X, визначену над псевдоскінченним полем k. Нехай K – поле функцій на кривій X, тобто K – поле алгебраїчних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним полем констант k. Ми називаємо таке поле K псевдоглобальним полем. Поле констант k псевдоглобального поля K характеризується такими властивостями:

1) k досконале;

2) k має єдине розширення степеня n для кожного натурального числа n;

3) k – псевдоалгебраїчно замкнуте, тобто кожний абсолютно незвідний многовид, визначений над полем k, має k – раціональну точку.

Зазначимо таке, якщо поле k має лише властивості 1) і 2), то його називають квазіскінченним.

Псевдоскінченні поля – це нескінченні моделі скінченних полів. Для них зберігаються всі властивості скінченних полів, які можуть бути сформульовані мовою логіки предикатів першого порядку. Прикладами псевдоскінченних полів є неголовні ультрадобутки скінченних полів та нескінченні алгебраїчні розширення скінченного поля F_q, які мають скінченний р – примарний степінь для кожного простого числа р. Крім того, М. Жарден [1] довів, якщо поле k є скінченнопородженим розширенням поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$, то для майже всіх $\sigma \in Gal(\bar{k}/k)$ підполе k^{σ}, що складається з інваріантних стосовно σ елементів алгебраїчного замикання $\bar{k}$ є псевдоскінченним. Тому псевдоскінченні поля можуть бути корисними і під час вивченння класичних полів.

Мета цієї праці – показати, що деякі важливі властивості нормувань глобальних полів залишаються правильними і для псевдоглобальних полів.

Оскільки псевдоскінченні поля є нескінченними моделями скінченних полів, то треба чекати, що і псевдоглобальні поля успадковують багато властивостей класичних глобальних полів.

Об'єднаємо в теоремі 1 декілька результатів про властивості нормувань псевдоглобальних полів, які аналогічні відповідним властивостям нормувань глобальних полів (крім властивості 4), яка у випадку глобального поля K загалом неправильна).

Теорема 1. *Нехай K – псевдоглобальне поле, n і p (p – просте) – натуральні числа, взаємно прості з характеристикою поля K.*

1. Якщо L/K – скінченне розширення Галуа і $L \neq K$, то існує нескінченна множина нормувань v поля K, які не розпадаються цілком в полі L. Інакше *кажучи, якщо* $L_w = K_v$, *де* w *– продовження нормування* v *на поле* L, *для всіх, крім скінченної кількості нормувань* $v \in V^K$, *то* $L = K$.

2. Якщо L/K *– циклічне розширення степеня* p^r, *то існує нескінченна кількість нормувань* $v \in V^K$, *що не розпадаються в* L.

3. Якщо $L_1, \cdots, L_m$ *– циклічні розширення степеня* p *поля* K, *які лінійно розділені над* K, *то існує нескінченна кількість нормувань* $v \in V^K$, *що розпадаються в* $L_i, (i > 1)$ *і не розпадаються в* L_1.

4. Існує простий дивізор степеня 1 поля K.

5. Нехай $S \subset V^K$ *– скінченна множина нормувань поля* K *і нехай* $a \in K$ *такий елемент, що* $a \in K_v^n$ *для всіх* $v \notin S$. *Тоді* $a \in K^n$.

6. Нехай J_n *(відповідно* C_n*) – підгрупи групи іделів (відповідно групи класів іделів) поля* K, *що мають період* n. *Тоді* $C_n = \bar{J}_n$, *де* $\bar{J}_n$ *– канонічний образ групи* J_n *в групі класів іделів поля* K.

Доведення. Всі сформульовані в цій теоремі властивості псевдоглобальних полів (крім властивості 4, яка у випадку глобальних полів правильна не завжди) доводять за тією ж схемою, що й аналогічні властивості глобальних полів. Відповідні доведення можна знайти в [2]. Для зручності читача ми відтворимо основні кроки міркувань.

1. Для глобального поля K – це теорема 2 з Розділу 5 книги [2], див. також наслідок 8.8 Розділу 7 книги [3]. Доведення зводиться до випадку, коли розширення L/K абельове. Нехай $G = Gal(L/K)$, C_K і C_L – групи класів іделів полів K і L відповідно. Оскільки згідно з [4],[5] класи іделів псевдоглобального поля утворюють формацію класів, то $C_K/N_{L/K}C_L \simeq G$. Звідси випливає (див.[3], с.275), що для кожної скінченної множини S нормувань поля K, яке містить всі розгалужені в L нормування (щодо цієї можливості див. [6], с.135, лема 3) група G породжується елементами $\sigma_v = \sigma^{[k(w):k(v)]} \in Gal(L_w/K_v) \subset G$, де σ – твірна групи Галуа алгебраїчного замикання поля k, L_w – поповнення поля L стосовно деякого вибраного нормування w поля L, що продовжує нормування $v \notin S$, $k(w)/k(v)$ – відповідне розширення поля лишків поля K_v. Якби існувала лише скінченна кількість нормувань поля K, які не розпадаються цілком в L, то, долучивши ці нормування до множини S, ми одержали б , що всі σ_v тривіальні для $v \notin S$, а тому не можуть породжувати групу G.

2. У випадку глобальних полів – це теорема 3 Розділу 5 книги [2]. Оскільки L/K – циклічне розширення степеня p^r, то існує лише одне підполе M поля L таке, що $[M : K] = p$. Якби сформульована властивість була неправильною, то існувала б скінченна множина нормувань $S \subset V^K$ така, що $[L_w : K_v] < p^r$ для всіх $v \notin S$ і їх продовжень w на поле L Звідси випливає

$$[L \cap K_v : K] = \frac{[L : K]}{[L : L \cap K_v]} = \frac{[L : K]}{[LK_v : K_v]} = \frac{[L : K]}{[L_w : K_v]} > 1,$$

а тому $M \subset K_v$ для всіх таких нормувань v. Отже, $M_u = K_v$ для всіх $v \notin S$ та їх продовжень u на поле M, тобто майже всі нормування поля K цілком розпадаються в полі M, що суперечить твердженню 2.

3. (Див. теорема 4, Розділ 5 з [12]). Розглянемо скінченну множину S нормувань поля K, що містить всі нормування, які розгалужені в полі $L = L_1 \cdots L_r$ (L – композит полів $L_1, \cdots, L_r$). Нехай $v \notin S$ і w – продовження нормування v на поле $L_2 \cdots L_r$. За властивістю 2 існує нескінченна множина таких нормувань w, що не розпадаються в полі L. Для кожного такого нормування w локальне

розширення $L_w/(L_2 \cdots L_r)_w$ є циклічним розширенням степеня p. Оскільки розширення L_w/K_v теж мусить бути циклічним степеня p (бо група Галуа $Gal(L/K)$ має тип $(p, \cdots, p)$), то звідси випливає, що $(L_2 \cdots L_r)_w = K_v$, тобто нормування v розпадається в полі $L_2 \cdots L_r$. Якби v розпадалося і в полі L_1, то ми одержали б, що $L_w = K_v$, що суперечить тому, що $[L_w : K_v] = p$.

4. Нагадаємо, що група $DivK$ дивізорів поля K – це вільна абельова група, породжена класами еквівалентних нормувань. Її твірні, тобто класи нормувань поля K , називають простими дивізорами. Степінь $degv$ простого дивізора v – це степінь поля лишків $k(v)$ поля K_v над полем констант k. Якщо $D = \sum n_v v \in DivK$ – довільний дивізор, то його степінь $degD$ визначається за формулою $degD = \sum n_v degv$. У випадку глобального поля K завжди існує дивізор степеня 1 , але прості дивізори степеня 1 існують не завжди (див.теорему 5 з Розділу 5 у [2]).

Якщо K – псевдоглобальне поле, то крива X, що є моделлю поля K, має k-раціональну точку і, навіть, має всюди щільну в топології Зариського множину k-раціональних точок (див.[7], с.129). Кожна така точка належить деякій відкритій за Зариським підмножині U кривої X і задає гомоморфізм ϕ кільця A регулярних функцій множини U на поле k. Якщо $\Omega = Ker\phi$, то локалізація A_Ω є локальним підкільцем поля К з полем дробів К, тому визначає нормування v поля K для якого $degv = 1$.

5. Для глобальних полів – це результат теореми 1 Розділу 9 книги [2]. Як показано в [2], с. 82-83, достатньо розглянути випадок, коли n є степенем простого числа і корені n-го степеня з 1 містяться в полі K. У цьому випадку для розширення $L = K(a^{\frac{1}{n}})$ ми одержуємо, що $K_v = L_w$ для всіх нормувань $v \notin S$ та їх продовжень w на поле L. Тепер з твердження 1 теореми випливає, що $L = K$, тобто $a \in K^n$.

6. Нехай $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha_v}\} \in C_n$. Тоді для представника α класу іделів $\bar{\alpha}$ маємо $\alpha^n = a \in K^*$, тому $a \in K_v^n$ для всіх $v \in V^K$. З попередньої властивості 5 одержуємо, що $a = b^n$, де $b \in k^*$, а тому $\alpha b^{-1} \in J_n$, і $\overline{\alpha b^{-1}} = \bar{\alpha}$, що й треба було довести. Зазначимо, що для глобального поля K цей результат доведений у теоремі 2 Розділу 10 книги [2].

Наступна теорема дає відповідь на запитання, якими можуть бути групи розкладення нормувань псевдоглобального поля K.

Теорема 2. *Для псевдоглобального поля K правильні такі еквівалентні властивості:*

1) нехай L/K – скінченне розширення Галуа, l – алгебраїчне замикання поля констант k поля K у полі L, H – циклічна підгрупа групи $Gal(L/K)$ для якої $res_l H = Gal(l/k)$. Тоді існує нормування поля K, група розкладення якого в полі L збігається з групою H;

2) якщо L/K – циклічне розширення, то існує нормування поля K, група розкладання якого в полі L збігається з групою $Gal(L/K)$;

3) якщо L/K – циклічне розширення і $a_1, \cdots, a_m$ – елементи поля K, то існує нормування v поля K таке, що елементи $a_1, \cdots, a_m$ цілі стосовно v, поле лишків нормування v збігається з k, а група розкладання нормування v у полі L збігається з $Gal(L/K)$.

Доведення. 1. Абсолютна група Галуа поля констант k поля K ізоморфна групі $\hat{\mathbb{Z}}$ – поповненню групи $\mathbb{Z}$ щодо топології, визначеної всіма її підгрупами; це вільна топологічна група з однією топологічною твірною. Звідси та з псевдо алгебраїчної замкненості поля k випливає (див. [6], Розд.[23]), що поле k є Фробеніусовим. У [7] показано, що Фробеніусові поля задовольняють умови 1, 2, 3 теореми 2, і що ці три умови еквівалентні.

Нехай K_{sep} – сепарабельне замикання псевдоглобального поля K. Позначимо $G_K = Gal(K_{sep}/K)$ його група Галуа. Якщо $L \subset K_{sep}$ розширення Галуа поля K з групою Галуа G, то через $H^1(G, M)$ або $H^1(L/K, M)$ ми позначаємо одновимірні когомології Галуа G – модуля M. Нехай S – підмножина множини V_K всіх нормувань поля K, $Ш^1_S(L/K, M) = Ker(H^1(L/K, M) \to \prod_{v \notin S} H^1(L_w/K_v, M))$ ядро гомоморфізму локалізації, $Ш^1_S(K_{sep}/K, M)$ позначаємо $Ш^1_S(M)$, $Ш^1_w(M)$ означає $\varinjlim_{S} Ш^1_S(M)$, де S – пробігає всі скінченні підмножини V_K. У цих позначеннях, як і у випадку глобального поля K, (див. [8], [9]) правильна така теорема.

Теорема 3. *Нехай M – скінченний G_K – модуль, де G_K – група Галуа сепарабельного замикання псевдоглобального поля K, і S – скінченна підмножина нормувань поля K. Припустимо, що модуль M стає постійним над скінченним розширенням Галуа L/K. Тоді*

1) $Ш^1_S(M) = Ш^1_S(L/K, M)$;

2) нехай S' – скінченна множина нормувань поля K з циклічними групами розкладення в полі L. Тоді $Ш^1_{S\cup S'}(M) = Ш^1_S(M)$;

3) якщо S_0 – скінченна множина нормувань, що містить всі розгалужені в L нормування з нециклічними групами розкладу, то

$$Ш^1_w(M) = Ш^1_{S_0}(M) = Ш^1_{S_0}(L/K, M).$$

Доведення. 1. Рівність випливає з міркувань, наведених у доведенні теореми 5 праці [10].

2. З теореми 2 випливає, що після долучення до множини S скінченної множини S_1 нормувань з циклічними групами розкладень у множині $V_K \setminus S \cup S_1$ ще залишиться нескінченна кількість нормувань з такими, як і в нормувань множини S_1, групами розкладень, тому $Ш^1_{S\cup S_1}(M)$ не збільшується порівняно з $Ш^1_S(M)$.

3. Для кожної скінченної множини нормувань $S \subset V^K$ маємо

$$Ш^1_S(M) = Ш^1_S(L/K, M) \subset Ш^1_{S\cup S_0}(L/K, M) = Ш^1_{S_0}(L/K, M) = Ш^1_{S_0}(M).$$

Тут перша і остання рівність є наслідками твердження 1) , а друга рівність випливає з твердження 2). Тому маємо включення $Ш^1_w(M) \subset Ш^1_{S_0}(M)$, а обернене включення очевидне.

Наслідок. *Нехай L/K – скінченне розширення Галуа, над яким модуль M стає постійним і l – алгебраїчне замикання поля констант k в полі L. Тоді*

1) якщо $L = lK$, то $Ш^1_w(M) = 0$;

2) якщо $L \neq lK$ і $H = Gal(L/lK)$, то $Ш^1_w(M)$ є підгрупою групи

$$Ker(H^1(H, M) \to \prod_{h\in H} H^1((h), M)),$$

де (h) – циклічна підгрупа, породжена елементом h. Зокрема, $Ш^1_w(M) = 0$, якщо група H є метациклічною або порядок модуля M взаємно простий з порядком групи H.

Доведення. 1. Розглянемо нормування v_1 поля K, що має степінь 1. Таке нормування існує згідно з твердженням 4 теореми 1. Група розкладення такого нормування v_1 в полі L збігається з групою $Gal(lK/K) \cong Gal(l/k)$. Звідси та з теореми 2 випливає, що

$$Ш^1_w(M) = Ш^1_w(L/K, M) = Ker(H^1(L/K, M) \to \prod_{v \notin S_0} H^1(L_w/K_v, M)) = 0.$$

2. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(lK/K, M) & \xrightarrow{inf} & H^1(L/K, M) & \xrightarrow{res} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & \\
0 & \longrightarrow & \prod_{v \notin S_0} H^1((lK)_{v'}/K_v, M) & \xrightarrow{inf} & \prod_{v \notin S_0} H^1(L_w/K_v, M) & \xrightarrow{res}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\xrightarrow{res} & H^1(L/lK, M) \\
 & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} \\
\xrightarrow{res} & \prod_{v' \notin S'_0} H^1(L_w/(lK)_{v'}, M)
\end{array},$$

де v' – одне з нормувань, що продовжує v на поле lK, w – одне з нормувань, що продовжує v' на поле L, S'_0 – множина всіх продовжень на поле lK нормувань з множини S_0. У цій діаграмі $Ker\alpha_1 = 0$ згідно з доведеним вище. Тому $Ш^1_w(K, M) = Ker\alpha_2 \subset Ker\alpha_3$. Доведемо, що $Ker\alpha_3 = Ker(H^1(H, M) \to \prod_{h \in H} H^1((h), M))$. Для цього досить зауважити, що для розширення L/lK з твердження 1 теореми 3 випливає, що кожна циклічна підгрупа групи H є групою розкладення деякого нерозгалуженого нормування поля lK.

Нарешті, якщо група H метациклічна (тобто всі її підгрупи Силова циклічні), то порядок групи H збігається з її експонентою. В послідовності

$$0 \longrightarrow H^1(H, M) \xrightarrow{Res} H^1((h), M) \xrightarrow{Cor} H^1(H, M)$$

добуток $Cor \circ Res$ є множенням на $\frac{|H|}{|(h)|}$. Це означає, що група $H^1(H, M)$ анулюється при множенні на всі числа $\frac{|H|}{|(h)|}$, $h \in H$, а тому є тривіальною. Якщо $(|H|, |M|) = 1$, то скінченна група $H^1(H, M)$ анулюється при домноженні як на $|H|$ так і на $|M|$ і тому мусить бути тривіальною. Тому, якщо група H метациклічна або $(|H|, |M|) = 1$, то $H^1(H, M) = 0$, тому $Ker\alpha_3 = 0$, отже $Ш^1_w(M) = 0$.

---

1. *Jarden M.* Elementary statements over large algebraic fields// Transactions of AMS. – 1972. – Vol. 164 – P.67–91.
2. *Artin E., Tate J.* Class field theory. –Harvard, 1961.
3. *Алгебраическая теория чисел* (Под ред. Дж. Кассела и А. Фрелиха). – М., 1969.
4. *Андрійчук В.І.* Псевдолокальні поля і закон взаємності// Матем. студії. – 1993. – N 2. – C.14–20.
5. *Andriychuk V.* On the algebraic tori over some function fields // Матем. студії. – 1999. – Т. 12. – N 2. – C.115–126.

6. *Fried M., Jarden M.* Field arithmetic. – Springer, 1986.
7. *Fried M., Haran D., Jarden M.* Galois stratification over Frobenius fields // Advances in Mathematics. – 1984. – Vol. 51. – P.1–35.
8. *Milne J.S.* Arithmetic Duality Theorems. – Academic Press, Inc. 1986.
9. *Sansuc J. -J.* Groupe de Brauer et arithmetique des groupes algebriques lineaires sur un corps de nombres// J. reine und angew.Math. - 1986. – Bd. 327. – S.12–80
10. *Андрійчук В.І.* Когомології Галуа скінченних модулів над псевдоглобальними полями // Вісник державного університету "Львівська політехніка". – 1998. – N 337. – C.5–7.

ON THE PROPERTIES OF VALUATIONS OF PSEUDOGLOBAL FIELDS

V. Andriychuk

Ivan Franko National University of Lviv

The properties of valuations and decomposition groups of K are considered. Also some properties of the kernels of lokalisation maps in one-dimensional Galois cohomology of finite modules over K are investigated.

Key words: *group, field, modul, Galois cohomology.*

Стаття надійшла до редколегії 28.09.2000
Прийнята до друку 28.12.2000