УДК 513.813

ПРО ЕКВІДИСТАНТНІ ТА УЗАГАЛЬНЕНО-ЕКВІДИСТАНТНІ ПАРАБОЛІЧНО КЕЛЕРОВІ ПРОСТОРИ

Тетяна Григор'єва

Південноукраїнський державний педагогічний університет

1. Ріманів простір V_{2n} називатимемо *параболічно келеровим*, якщо в ньому поряд з метричним тензором $g_{ij}(x)$ існує структура $F_i^h(x)$, яка задовольняє такі умови:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0; \tag{1a}$$

$$F_{i,j}^h = 0; \tag{1b}$$

$$F_i^\alpha g_{\alpha i} = e F_j^\alpha g_{\alpha i}, e = \pm 1; \tag{1c}$$

$$\operatorname{rank} \|F_j^h\| = n, \tag{1d}$$

де кома в (1b) позначає коваріантне диференціювання в просторі V_{2n}.

Випадок $e = -1$ детально вивчено в [1]. У цій праці досліджено параболічно келерові простори, для яких $e = 1$.

Нехай вибрано адаптовану систему координат (x), в якій структурний афінор має вигляд

$$F_b^{a+n} = \delta_b^a; \; F_b^a = F_{b+n}^{a+n} = F_{b+n}^a = 0, \text{ де } a, b = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Для компонент метричного тензора, символів Крістоффеля першого і другого роду в адаптованій системі координат виконуються умови

$$g_{ab+n} = g_{ba+n}, \; g_{a+nb+n} = 0; \tag{3}$$

$$\Gamma_{ab,c+n} = \Gamma_{a+nb,c}, \; \Gamma_{a+nb+n,c} = \Gamma_{ab+n,c+n} = \Gamma_{a+nb+n,c+n} = 0 \tag{4}$$

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{bc+n}^{a+n}, \; \Gamma_{bc+n}^a = \Gamma_{b+nc+n}^a = \Gamma_{b+nc+n}^{a+n} = 0, \tag{5}$$

де $a, b, c = 1, 2, \ldots, n$.

Неважко показати, що в адаптованій системі координат метричний тензор задовольняє співвідношення:

$$\partial_{c+n} g_{ab+n} = 0; \tag{6}$$

$$\partial_{b+n} g_{ac} - \partial_b g_{ac+n} = 0, \tag{7}$$

де $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Проаналізуємо останні умови. З тотожності (6) випливає, що

$$g_{ab+n} = g_{ab+n}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{8}$$

а з (7) випливає таке співвідношення:

$$g_{ab} = x^{c+n}\partial_c g_{ab+n} + \Phi_{ab}(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{9}$$

Легко перевірити, що ріманів простір, метричний тензор якого в деякій системі координат задовольняє умови (3), (6), (7), (8), (9) є параболічно келеровим простором, структура якого в цій системі координат визначається формулами (2).

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Метричний тензор параболічно келерового простору* V_{2n} *має в адаптованій системі координат таке зображення:*

$$g_{ab} = x^{c+n}\partial_c g_{ab+n} + \Phi_{ab}(x^1, x^2, \ldots, x^n);$$
$$g_{ab+n} = g_{ba+n} = g_{ab+n}(x^1, x^2, \ldots, x^n); \;\; g_{a+nb+n} = 0. \tag{10}$$

При цьому правильне і зворотне твердження, оскільки метричний тензор вигляду (10) задовольняє умови (3), (6) і (7).

2. Перетворення координат $y^h = y^h(x)$ називається *аналітичним* [2], якщо зберігається канонічний вигляд структури (2).

У праці [2] доведено, що аналітичними перетвореннями адаптованих координат є тільки перетворення вигляду

$$y^a = y^a(x^1, x^2, \ldots, x^n);$$
$$y^{a+n} = y^{a+n}(x^1, x^2, \ldots, x^n) + x^{b+n}\partial_b y^a,$$

де y^a, y^{a+n} – функції зазначених змінних, які задовольняють умову $\det \|\partial_a y^b\| \neq 0$.

Векторне поле $\xi^h(x)$ називається *аналітичним* [1], якщо виконується умова

$$L_\xi F_i^h(x) = 0, \tag{11}$$

де L_ξ – похідна Лі у напрямі ξ^h.

На підставі (1b) аналітичні векторні поля в параболічно келеровому просторі характеризуються умовами

$$\xi^\alpha_{,i} F^h_\alpha - \xi^h_{,i} F^\alpha_i = 0. \tag{12}$$

За аналогією з [1] можна довести, що для заданого ненульового аналітичного векторного поля ξ^h в параболічно келеровому просторі існує адаптована система координат, в якій компоненти цього векторного поля мають таке зображення:

$$\xi^h = \delta^h_1 \text{ або } \xi^h = \delta^h_{1+n}. \tag{13}$$

Домовимося операцію згортки з афінором позначати так:

$$A_{\overline{\beta}} = A_\alpha F^\alpha_\beta, \quad A^{\overline{\beta}} = A^\alpha F^\beta_\alpha.$$

Зауважимо, що тоді умови інтегровності (1b) матимуть вигляд

$$R^h_{i\bar{j}k} = R^h_{ij\bar{k}}. \tag{14}$$

3. Простір називається *еквідистантним* [3], якщо в ньому існує векторне поле $\xi^h \neq 0$, що задовольняє умови

$$\xi^h_{,i} = \rho\delta^h_i. \tag{15}$$

При $\rho \neq 0$ еквідистатний простір належить основному типу.

Вивчаючи умови інтегровності (15), та використовуючи умови (14), легко переконатись, що в параболічно келеровому просторі $\rho = \mathrm{const}$. Після нормалізації вектора ξ^h можемо вважати, що $\rho = 0$ або $\rho = 1$.

Розглянемо еквідистантний, основного типу параболічно келеровий простір V_{2n}. Не зменшуючи загальності, умови (15) матимуть вигляд

$$\xi^h_{,i} = \delta^h_i. \tag{16}$$

Очевидно, векторне поле ξ^h є аналітичним. Отже, існує адаптована система координат, в якій

$$\xi^h = e_1\delta^h_1 + e_2\delta^h_{1+n}, \;\; e_1, e_2 = 0, 1, \;\; e_1 + e_2 = 1.$$

У цій системі координат умови (16) запишемо так: $e_1\Gamma^h_{1i} + e_2\Gamma^h_{1+ni} = \delta^h_i$ або, що еквівалентно

$$e_1\Gamma^h_{1i,j} + e_2\Gamma^h_{1+ni,j} = g_{ij}. \tag{17}$$

Прийнявши в (17) $i = a$, $j = b + n$, та враховуючи умови (4), знаходимо $e_1\Gamma_{1a,b+n} = g_{ab+n}$. Оскільки $\|g_{ab+n}\| \neq 0$, то $e_1 = 1$, а, отже, $e_2 = 0$. Тоді умови (17) набувають вигляду $\Gamma_{1i,j} = g_{ij}$, звідки

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{ab+n} + \partial_a g_{1b+n} - \partial_{b+n} g_{1a} &= 2g_{ab+n} \\ \partial_1 g_{ab} + \partial_a g_{1b} - \partial_b g_{1a} &= 2g_{ab}. \end{aligned} \tag{18}$$

Нехай в (18) $a = b = 1$, тоді

$$\partial_1 g_{1\,1+n} = 2g_{1\,1+n}; \;\; \partial_1 g_{1\,1} = 2g_{1\,1}.$$

Проінтегрувавши останнє співвідношення, одержимо

$$g_{1\,1+n} = e^{2x^1}G(x^2, x^3, \ldots, x^n), \;\; g_{1\,1} = e^{2x^1}H(x^2, x^3, \ldots, x^{2n}). \tag{19}$$

Прийнявши в рівності (18) $b = 1$, $a > 1$ і враховуючи (19), знайдемо

$$g_{1+na} = \frac{1}{2}e^{2x^1}\partial_a G, \;\; g_{1a} = \frac{1}{2}e^{2x^1}\partial_a H. \tag{20}$$

Для $a, b > 1$ умови (18), в силу рівностей (19) набувать вигляду

$$\partial_1 g_{ab} = 2g_{ab}, \partial_1 g_{ab+n} = 2g_{ab+n},$$

звідки

$$g_{ab+n} = e^{2x^1}f_{ab+n}(x^2, x^3, \ldots, x^n); g_{ab} = e^{2x^1}f_{ab}(x^2, x^3, \ldots, x^{2n}), \tag{21}$$

де $f_{ab+n} = f_{a+nb}$.

Приймемо в зображенні (10) $a = b = 1$. Враховуючи (7) і (20), одержуємо:

$$\Phi_{1\,1} = e^{2x^1}(H - x^{c+n}\partial_{c+n}H),$$

і, відповідно,

$$\Phi_{1\,1} = e^{2x^1} S_{1\,1}(x^2, x^3, \ldots, x^n). \tag{22}$$

Аналогічно з (7), (10), (20) при $b = 1$, $a > 1$ знайдемо

$$\Phi_{1\,a} = e^{2x^1} S_{1\,a}(x^2, x^3, \ldots, x^n). \tag{23}$$

На підставі (10), (20), (22) і (23) неважко отримати рівність

$$F_{1a} = \frac{1}{2}\partial_a f_{1\,1}.$$

Прийнявши в (10) $a, b > 1$, матимемо

$$\Phi_{ab} = e^{2x^1} S_{ab}(x^2, x^3, \ldots, x^n).$$

Тому правильна теорема.

Теорема 2. *У довільному еквідистантному, основного типу параболічно келеровому просторі V_{2n} існує система координат, в якій афінор F_i^h зображається формулами (2), а ненульові компоненти метричного тензора g_{ij} – формулами*

$$g_{1\,1} = e^{2x^1}(x^{s+n}\partial_s G + S_{1\,1});\ g_{1\,r} = \frac{1}{2}e^{2x^1}(x^{s+n}\partial_s(\partial_r G) + \partial_r S_{1\,1});$$
$$g_{r\,t} = e^{2x^1}(x^{s+n}\partial_s f_{rt+n} + S_{r\,t});\ g_{1\,1+n} = e^{2x^1} G;$$
$$g_{1\,r+n} = \frac{1}{2}e^{2x^1}\partial_r G;\ g_{r\,t+n} = e^{2x^1} f_{r\,t+n},$$

де $r, s, t = 2, 3, \ldots, n$, G, $S_{1\,1}$, $S_{r\,t}$, $f_{r\,t+n}$ — деякі функції змінних $x^2, x^3, \ldots, x^n$.

4. Простір називатимемо *узагальнено еквідистантним*, якщо в ньому існує векторне поле Ψ^h, що задовольняє умови

$$\Psi_j^h = \rho_1\delta_j^h + \rho_2 F_j^h,\quad \rho_1 \neq 0,\ \rho_2 \neq 0, \tag{24}$$

де ρ_1, ρ_2 – деякі інваріанти.

Умови інтегровності (24) з врахуванням тотожності Річчі набувають вигляду

$$\Psi^\alpha R_{\alpha jk}^h = \rho_{1,k}\delta_j^h - \rho_{1,j}\delta_k^h + \rho_{2,k}F_j^h - \rho_{2,j}F_k^h. \tag{25}$$

Розглянемо узагальнено еквідистантний параболічно келерів простір $V_{2n}(g_{ij}, F_j^h, \Psi^h, \rho_1, \rho_2)$. Використовуючи умови інтегровності (14), з формули (25) одержуємо

$$F_j^h(\rho_{1,k} - \rho_{2,\overline{k}}) + F_k^h(\rho_{1,j} - \rho_{2,\overline{j}}) - \delta_j^h\rho_{1,\overline{k}} - \delta_k^h\rho_{1,\overline{j}}. \tag{26}$$

Після нескладних алгебраїчних перетворень тотожність (26) набуде вигляду

$$F_j^h(\rho_{1,h} - \rho_{2,\overline{h}}) - \delta_j^k\rho_{1,\overline{h}} = 0. \tag{27}$$

Застосувавши операцію згортки за індексами k і j, отримаємо $2n\rho_{1,\overline{h}} = 0$, а, отже,

$$\rho_{1,\overline{h}} = 0. \tag{28}$$

Тоді співвідношення (27) записуються так: $F^h_j(\rho_{1,h} - \rho_{2,\bar{h}}) = 0$, звідки

$$\rho_{2,\bar{h}} = \rho_{1,h}. \tag{29}$$

З тотожності (28) випливає, що $\rho_{1,a+n} = 0$, де $a = 1, 2, \ldots, n$, відповідно $\rho_1 = \rho_1(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. З рівності (29) випливає, що $\rho_{2,a+n} = \rho_{1,a}$. Отже, $\rho_2 = x^{a+n}\partial_a\rho_1 + \rho_0(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Використовуючи умови (12), легко переконатись, що векторне поле $\varphi^h = \rho^{-1}\Psi^h - \rho_2\rho_1^{-2}\Psi^h$ є аналітичним. Виберемо адаптовану систему координат, в якій

$$\varphi^h = e_1\delta^h_1 + e_2\delta^h_{1+n}, \quad e_1, e_2 = 0, 1, \quad e_1 + e_2 = 1.$$

Відповідно $\Psi^{\bar{h}} = \rho_1 e_1 F^h_1$, а $\Psi^h = \rho_1 e_1 \delta^h_1 + \rho_1 e_2 \delta^h_{1+n} + \rho_2 e_1 F^h_1$. Тоді умови $\varphi^h_{,j} = e_1\Gamma^h_{1j} + e_2\Gamma^h_{1+nj}$ можна записати, нехтуючи індексом h, так:

$$\begin{aligned} e_1\Gamma_{1j,h} + e_2\Gamma_{1+nj,h} = \rho_{1,j}\rho_1^{-2}(\rho_1 e_1 g_{h1} + \rho_1 e_2 g_{h1+n} + \rho_2 e_1 F_{h1}) + \\ + g_{hj} - \rho_{2,j}\rho_1^{-1}e_1 F_{h1} + 2\rho_{1,j}\rho_2\rho_1^{-2}F_{h1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Тут $F_{h1} = F^\alpha_1 g_{\alpha h}$.

Прийнявши в тотожності (30) $j = a$, $h = b + n$ та враховуючи умови (4), одержимо

$$e_1\Gamma_{1a,b+n} = -\rho_{1,a}\rho_1^{-1}e_1 g_{b+n1} + g_{b+na}.$$

Оскільки $g_{b+na} \neq 0$, то $e_1 = 1$, а, отже, $e_2 = 0$. Тоді умови (30) матимуть вигляд

$$\Gamma_{1j,h} = -\rho_{1,j}\rho_1^{-2}(\rho_1 g_{h1} + \rho_2 F_{h1}) + g_{hj} - \rho_{2,j}\rho_1^{-1}F_{h1} + 2\rho_{1,j}\rho_2\rho_1^{-2}F_{h1},$$

або

$$\begin{aligned} \partial_b g_{1a} + \partial_1 g_{ab} - \partial_a g_{1b} = -2\rho_{1,b}\rho_1^{-1}g_{a1} + \rho_{1,b}\rho_2\rho_1^{-2}g_{a1+n} + \\ + 2g_{ab} - 2\rho_{2,b}\rho_1^{-1}g_{a1+n}; \end{aligned} \tag{31}$$

$$\partial_b g_{1a+n} + \partial_1 g_{a+nb} - \partial_{a+n} g_{1b} = -2\rho_{1,b}\rho_1^{-1}g_{a+n1} + 2g_{a+nb}. \tag{32}$$

При $a = b = 1$ одержуємо $\partial_1 g_{1\,1+n} = 2g_{1\,1+n} - 2\rho_1^{-1}g_{1\,1+n}\partial_1\rho_1$, звідки

$$g_{1,1+n} = e^{2x^1}\rho_1^{-2}B(x^2, x^3, \ldots, x^n). \tag{33}$$

Знову, прийнявши в тотожності (32) $a = 1$, $b > 1$ та враховуючи (33), матимемо

$$g_{1b+n} = \frac{1}{2}e^{2x^1}\rho_1^{-2}\partial_b B. \tag{34}$$

Якщо ж в тотожності (32) прийняти, що $b = 1$, $a > 1$, то враховуючи (33) і (34), одержуємо

$$\rho_{1,a} = \frac{1}{2}\rho_{1,1}\partial_a \ln B. \tag{35}$$

Проаналізуємо формулу (35). Оскільки $B = B(x^2, x^3, \ldots, x^n)$, то

$$\rho_{1,a} = A(x^1)M_a(x^2, x^3, \ldots, x^n); \tag{36}$$

$$\rho_{1,1} = A(x^1)D(x^2, x^3, \ldots, x^n). \tag{37}$$

Диференціюючи першу тотожність за x_1, а другу за x^a, одержимо $\partial_1 \ln A = M^{-1} - a\partial_a D$, звідки $\partial_1 \ln A = c$ і $M_a^{-1}\partial_a = c$, де $c = \text{const}$. Отже, $A = c_1 e^{cx^1}$, де $c_1 = \text{const}$, а $M_a = c^{-1}\partial_a D$. Звідси

$$\rho_{1,a} = c_1 c^{-1} e^{cx^1} \partial_a D; \tag{38}$$

$$\rho_{1,1} = c_1 e^{cx^1} D. \tag{39}$$

Відповідно

$$\rho_1 = c_1 c^{-1} e^{cx^1} D + c_2, \tag{40}$$

де $c_2 = \text{const}$.

Таким чином, формули (39), (40) і (35) набувають вигляду $c\partial_a \ln B = 2\partial_a \ln D$, звідки $D = c_0^{-1} B^{\frac{c}{2}}$, де $c_0 = \text{const}$.

Повернемось до рівності (32). Нехай $a, b > 1$. Використовуючи зображення (34) і (35), отримаємо

$$\partial_1 (e^{-2x^1} g_{a+nb}) = \frac{1}{4} \partial_1 \rho_1^{-2} \partial_a B \partial_b \ln B,$$

звідки, після інтегрування, знайдемо

$$g_{a+nb} = e^{2x^1} \left(\frac{1}{4} \rho_1^{-2} \partial_a B \partial_b \ln B + K_{ab}(x^2, x^3, \ldots, x^n) \right). \tag{41}$$

Нехай у рівності (31) $a = b = 1$, тоді, враховуючи зображення (10) і (33), одержимо

$$\partial_1 \left(e^{2x^1} \rho_1^2 \Phi_{1\,1} \right) = -2B \partial_1 \left(\rho_0 \rho_1^{-1} \right),$$

і відповідно

$$\Phi_{1\,1} = e^{2x^1} \left(-2\rho_0 \rho_1^{-3} B + S_{1\,1}(x^2, x^3, \ldots, x^n) \right). \tag{42}$$

Приймаючи в (31) $a = 1, b > 1$ та враховуючи (10), (33), (34) і (42), знайдемо

$$\Phi_{1b} = e^{2x^1} \left(-\rho_0 \rho_1^{-3} \partial_b B + \frac{1}{2} \partial_b S_{1\,1} + S_{1\,1} \right) \rho_1^{-1} \partial_b \rho_1. \tag{43}$$

Нехай в (31) $b = 1$, $a > 1$, тоді

$$\partial_a \left(\rho_0 \rho_1^{-3} \right) = \frac{1}{2} B^{-1} (\partial_a B \left(\rho_0 \rho^{-3} - 1 \right) +$$

$$+ 2S_{1\,1} \left(\partial_a \ln \rho_1 - \rho_1^{-1} \partial_a (\partial_1 \rho_1) \right) + \partial_a S_{1\,1} (1 - \partial_1 \ln \rho_1)). \tag{44}$$

Якщо в (31) прийняти $a, b > 1$, то отримаємо

$$\partial_1 \left(e^{-2x^1} \Phi_{ab} \right) = -\partial_a \left(\rho_0 \rho_1^{-3} \right) \partial_b B - \frac{1}{2} \partial_a \rho_1^{-2} \partial_b \left(\rho_1^2 S_{1\,1} \right). \tag{45}$$

Використовуючи (33), (44) і (45), неважко знайти вираз для Φ_{ab}.

Отже, доведена така теорема.

Теорема 3. *У довільному узагальнено еквідистантному параболічно келеровому просторі* $V_{2n}\left(g_{ij}, F_i^h, \Psi^h, \rho_1, \rho_2\right)$ *існує система координат, в якій афінор* F_i^h *виражається формулами (2), а ненульові компоненти метричного тензора* g_{ij} *– формулами*

$$g_{ab} = x^{c+n}\partial_c g_{ab+n} + \Phi_{ab},$$

причому

$$\begin{aligned}
\Phi_{1\,1} &= e^{2x^1}\left(-2\rho_0\rho_1^{-3}B + S_{1\,1}\right);\\
\Phi_{1t} &= e^{2x^1}\left(-\rho_0\rho_1^{-3}\partial_t B + \frac{1}{2}\partial_t S_{1\,1} + \frac{1}{2}S_{1\,1}\partial_1 \ln\rho_1 \partial_t \ln B\right);\\
\Phi_{rt} &= e^{2x^1}(-\frac{1}{2}\rho_0\rho_1^{-3}\partial_r B\partial_t \ln B + \frac{1}{2}S_{1\,1}\partial_r \ln B\partial_t \ln B\left(\partial_1 \ln\rho_1 - ln\rho_1\right) +\\
&\quad + \partial_r S_{1\,1}\partial_t \ln B\left(x^1 + \frac{1}{2}\ln\rho_1\right) - \frac{1}{2}\ln\rho_1\partial_r \ln B\partial_t S_{1\,1});\\
g_{1\,a+n} &= \frac{1}{2}\rho_1^{-2}\partial_a\left(e^{2x^1}B\right);\ g_{r\,t+n} = e^{2x^1}\left(\frac{1}{4}\rho_1^{-2}\partial_r B\partial_t \ln B + K_{rt}\right),
\end{aligned}$$

де $a, b, c = 1, 2, \ldots, n$, $r, t = 2, 3, \ldots, n$, ρ_0 *і* ρ_1 *– функції змінних* $x^1, x^2, \ldots, x^n$, C_0, C_1, C_2, $C = \text{const}$, $\rho_2 = C^{-1}C_1e^{cx^1}D + C_2$, $D = C_0^{-1}b^{\frac{c}{2}}$, B, D, $S_{1\,1}$, K_{rt} *– функції, залежні від* $x^2, x^3, \ldots, x^n$.

---

1. *Шиха М.* Геодезические и голоморфно-проективные отображения параболически келеровых пространств: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1993.
2. *Широков А.П.* Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров// Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 102. – С.461–464.
3. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М., 1979.

ABOUT EQUIDISTANT AND GENERALIZE-EQUIDISTANT PARABOLIC-KELLER'S SPASES

T. Grigorieva

State Pedagogic University of Odesa

Parabolic-Keller's spaces, equidistant and generalize–equidistant parabolic-Keller's spaces are considered. In special systems of coordinates, metrics of the indicated spapces are found.

Key words: *parabolic-Keller's spaces, equidistant.*

Стаття надійшла до редколегії 25.04.2000

Прийнята до друку 28.12.2000