ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.83–87

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.83–87

УДК 512.546

СКІНЧЕННІ РЕГУЛЯРНІ НАПІВГРУПИ УЛЬТРАФІЛЬТРІВ

Євген Зеленюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача

Нехай G – група, βG – стоун-чехівська компактифікація G як дискретного простору. Елементами βG є всілякі ультрафільтри на G, підмножина головних ультрафільтрів ототожнюється з G, а базу топології утворюють підмножини $\overline{A} = \{p \in \beta G\colon A \in p\}$, де $A \subseteq G$. Для кожного фільтра φ на G підмножина $\overline{\varphi} = \bigcap\{\overline{A}\colon A \in \varphi\}$ в βG непорожня і замкнена. Навпаки, кожна непорожня замкнена підмножина в βG однозначно зображається в такому вигляді.

Множення на G природно індукує множення на βG з неперервними лівими зсувами на елементи з G та неперервними правими зсувами. Для довільних ультрафільтрів $p, q \in \beta G$

$$p \cdot q = \lim_{x \to p} \lim_{y \to q} x \cdot y,$$

де $x, y \in G$. Продовжене множення залишається асоціативним, перетворюючи βG у компактну правотопологічну напівгрупу зі щільним топологічним центром. Напівгрупа називається *правотопологічною*, якщо всі її праві зсуви неперервні. *Топологічним центром* правотопологічної напівгрупи T називається піднапівгрупа $\Lambda(T)$ всіх елементів T, ліві зсуви на які неперервні (про напівгрупу βG див. [1]).

Топологія на G з неперервними лівими зсувами називається *лівоінваріантною.* Усі топології вважаються T_1-топологіями. Для кожної недискретної лівоінваріантної топології τ на G підмножина τ^* всіх неголовних ультрафільтрів на G, що збігаються в топології τ до одиниці, є замкненою піднапівгрупою в $G^* = \beta G \setminus G$, яка називається напівгрупою ультрафільтрів τ [2]. Піднапівгрупа в G^* називається *рівномірною*, якщо вона є напівгрупою ультрафільтрів деякої лівоінваріантної топології. Кожна рівномірна напівгрупа $\overline{\varphi}$ в G^* однозначно визначає на G лівоінваріантну топологію τ таку, що $\tau^* = \overline{\varphi}$. Фільтр околів одиниці (G, τ) складається з підмножин $F \cup \{e\}$, де $F \in \varphi$. Рівномірна напівгрупа в G^* називається *регулярною* (*локально регулярною*), якщо визначена нею лівоінваріантна топологія на G регулярна (має регулярний окіл одиниці). Нагадаємо, що простір називається *регулярним*, якщо кожна його точка має базу з замкнених околів. Зліченний регулярний простір нульвимірний – кожна його точка має базу з відкрито-замкнених околів. Підмножина простору називається *регулярною*, якщо вона регулярна як підпростір. Під регулярністю напівгрупи ультрафільтрів ми розумітимемо лише цю топологічну властивість.

Кожна скінченна напівгрупа в G^* рівномірна, проте загалом нерегулярна. Скінченна напівгрупа $\overline{\varphi}$ в G^* регулярна тоді і лише тоді, коли $p\overline{\varphi} \cap \overline{\varphi} = \varnothing$ для будь-якого $p \in \beta G \setminus (\overline{\varphi} \cup \{e\})$. Якщо G зліченна, то кожна скінченна регулярна напівгрупа в G^* є напівгрупою ідемпотентів [3]. Наша праця присвячена такій проблемі.

Нехай S – скінченна напівгрупа ідемпотентів. Чи існує в G^* регулярна напівгрупа, ізоморфна S?

Відомо таке: якщо S – сингулярна напівгрупа (напівгрупа лівих нулів чи напівгрупа правих нулів) або ланцюг ідемпотентів ($x \leqslant y \Leftrightarrow xy = yx = x$), то відповідь позитивна в припущенні аксіоми Мартіна **MA** [4], а якщо S одноелементна, то відповідь позитивна і без додаткових теоретико-множинних припущень [5].

У вирішенні цієї проблеми важливу роль відіграють гомоморфізми напівгруп ультрафільтрів. Нехай φ – фільтр на G, T – напівгрупа. Відображенння $f\colon G \to T$ називається φ-гомоморфізмом, якщо існують $A \in \varphi$ та $A \ni x \longmapsto B_x \in \varphi$ такі, що $f(xy) = f(x)f(y)$ для будь-яких $x \in A$, $y \in B_x$. Якщо $\overline{\varphi}$ – напівгрупа в βG, T – компактна правотопологічна напівгрупа, f – φ-гомоморфізм такий, що $f(C) \subseteq \Lambda(T)$, для деякого $C \in \varphi$, а $\overline{f}\colon \beta G \to T$ – неперервне продовження f, то $\overline{f}|_{\overline{\varphi}}\colon \overline{\varphi} \to T$ – гомоморфізм. Такі гомоморфізми називаються *власними*.

Послідовність $< x_n >_{n<\omega}$ в G називається FP-незалежною, якщо кожен елемент із

$$FP\,(< x_n >_{n<\omega}) = \{x_{n_0} \dots x_{n_k} \mid n_0 < \dots < n_k < \omega, k < \omega\}$$

однозначно зображається у вигляді $x_{n_0} \dots x_{n_k}$, $n_0 < \dots < n_k$. Кожна FP-незалежна послідовність $< x_n >_{n<\omega}$ визначає на G лівоінваріантну топологію з базою околів e з підмножин $X_n \cup \{e\}$, де $X_n = FP\,(< x_n >_{n\leqslant i<\omega})$. Ця топологія загалом навіть не гаусдорфова, проте в ній підмножина $X_0 \cup \{e\}$ регулярна. FP-незалежна послідовність $< x_n >_{n<\omega}$ називається *сильно FP-незалежною*, якщо для будь-якого $x \in G \setminus X_0$, $x \neq e$ знайдеться $n < \omega$ таке, що $xX_n \cap X_0 = \varnothing$. FP-незалежна послідовність сильно FP-незалежна тоді і тільки тоді, коли визначена нею лівоінваріантна топологія регулярна.

Нехай $\mathbb{B} = \bigoplus_\omega \mathbb{Z}(2)$ – зліченна булева група, розкладена в пряму суму ω копій групи порядку 2, b_n – елемент $\mathbb{B}$ з єдиною ненульовою координатою – n-ю. Очевидно, послідовність $< b_n >_{n<\omega}$ сильно FS- незалежна (в адитивному випадку замість FP пишемо FS), а визначена нею топологія є звичайною топологією прямої суми на $\mathbb{B}$ – позначатимемо її $\mathcal{T}$. Кожне відображення підмножини $\{b_n \mid n < \omega\}$ в напівгрупу T продовжується до φ-гомоморфізму $\mathbb{B} \to T$, де $\overline{\varphi} = \mathcal{T}^*$. Отже, для кожної скінченної напівгрупи S існує власний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S.

Відкритий окіл одиниці лівотопологічної групи називається *локальною лівотопологічною групою*. Відображення $f\colon X \to S$ локальної лівотопологічної групи X у часткову напівгрупу S називається *локальним гомоморфізмом*, якщо для будь-якого $x \in X$, $x \neq e$ знайдеться окіл одиниці V_x такий, що $f(xy) = f(x)f(y)$ для кожного $y \in V_x$, $y \neq e$. Для скінченної напівгрупи S локальний гомоморфізм $f\colon X \to S$ називається *правильним*, якщо $f\,(X \setminus \{e\}) = f\,(U \setminus \{e)$ для будь-якого околу одиниці U. Бієктивний гомоморфізм називається *ізоморфізмом.*

Характером фільтра називається найменша з потужностей його баз. *Характером підмножини простору* називається характер фільтра її околів. Характер підмножини $\overline{\varphi}$ в βG дорівнює характеру фільтра φ. *Характером однорідного простору* називається характер фільтра околів його точки.

Наступний результат узагальнює теорему з [6].

Теорема 1. *Нехай S – скінченна напівгрупа така, що $a \in aS$ для кожного $a \in S$, X, Y – зліченні регулярні локальні лівотопологічі групи зліченного ха-*

рактеру, $f: X \to S$, $g: Y \to S$ – сюр'єктивні правильні локальні гомоморфізми. Тоді існує топологічний локальний ізомоморфізм $h: X \to Y$ такий, що $f = g \circ h$.

Скрізь далі нехай G зліченна.

Наслідок 1. *Кожна локально регулярна напівгрупа в G^* зліченного характеру власне ізоморфна $\mathcal{T}^*$*

Лема. *Нехай у зліченній лівотопологічній групі (G, τ_0) задані зліченні родина $\mathcal{A}$ відкритих підмножин і родина $\mathcal{B}$ регулярних підмножин. Тоді топологію τ_0 можна послабити до лівоінваріантної топології зліченного характеру, в якій підмножини з $\mathcal{A}$ залишаються відкритими, а підмножини з $\mathcal{B}$ – регулярними.*

Наслідок 2. *Кожна локально регулярна напівгрупа в G^* власне ізоморфна деякій регулярній напівгрупі в G^*.*

Наслідок 3. *Нехай τ^* – локально регулярна напівгрупа в G^* зліченного характеру, S – скінченна напівгрупа така, що $a \in aS$ для кожного $a \in S$. Для будь-яких сюр'єктивних власних гомоморфізмів $\pi: \tau^* \to S$, $\mu: \mathcal{T}^* \to S$ існує власний ізоморфізм $\nu: \tau^* \to \mathcal{T}^*$ такий, що $\pi = \mu \circ \nu$.*

Гомоморфізм $f: T \to S$ напівгрупи T на напівгрупу S називається *ретракцією*, якщо існує ін'єктивний гомоморфізм $g: S \to T$ такий, що $f \circ g = \mathrm{id}_S$.

Наслідок 4. *Нехай S – скінченна напівгрупа така, що $a \in aS$ для кожного $a \in S$. Якщо хоча б один власний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S є ретракцією, то і кожен власний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S є ретракцією.*

Твердження 1. *Нехай S – скінченна напівгрупа ідемпотентів. Якщо в G^* існує регулярна напівгрупа ізоморфна S, то власний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S є ретракцією.*

Напівгрупа S з класу напівгруп $\mathcal{K}$ називається *абсолютним ретрактом в $\mathcal{K}$*, якщо кожен гомоморфізм з $\mathcal{K}$ на S є ретракцією.

Твердження 2. *Нехай S – скінченна напівгрупа така, що $a \in aS$ для кожного $a \in S$. Якщо власний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S є ретракцією, то S – абсолютний ретракт у класі скінченних напівгруп.*

Нехай $< x_n >_{n<\omega}$ – FP-незалежна послідовність в G, $X = FP(< x_n >_{n<\omega})$. Для кожного $x \in X$, $x = x_{n_0} \ldots x_{n_k}$, $n_0 < \cdots < n_k$ приймемо, що $l(x) = n_0$, $r(x) = n_k$. Послідовність $< y_n >_{n<\omega}$ в X називається *$< x_n >_{n<\omega}$-правильною*, якщо $r(y_n) < l(y_{n+1})$.

Скінченна напівгрупа $\overline{\varphi}$ в G^* називаєтся *FP-напівгрупою*, якщо існують сильно FP-незалежна послідовність $< x_n >_{n<\omega}$ в G та відображення $f: \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\varphi}$ такі, що

1) $F_p = \{x_{n_0} \ldots x_{n_k} : n_0 < \cdots < n_k, f(x_{n_0}) \ldots f(x_{n_k}) = p\} \in p$ для кожного $p \in \overline{\varphi}$;
2) для довільного $U \in \varphi$ існує $< x_n >_{n<\omega}$-правильна послідовність $< y_n >_{n<\omega}$ така, що $\{y_n : n < \omega\} \bigcap F_p$ нескінченна для кожного $p \in \overline{\varphi}$ і $U \supseteq FP(< y_n >_{n<\omega}) \in \varphi$.

Очевидно, кожна FP-напівгрупа регулярна, а якщо $G = \mathbb{B}$, то визначена нею топологія навіть групова. З існування скінченної FP-напівгрупи випливає існування P-точки в ω^*. Цей результат аналогічний теоремі про P-точку для групової топології на $\mathbb{B}$ зі скінченною напівгрупою ультрафільтрів [4].

Теорема 2 (МА). *Нехай S – скінченна напівгрупа ідемпотентів, $\overline{\varphi}$ – підмножина в G^* характеру $< \mathfrak{c}$, що містить ідемпотент. Якщо власний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S є ретракцією, то в $\overline{\varphi}$ існує регулярна FP-напівгрупа, ізоморфна S.*

Як відомо [7, с.49], кожна напівгрупа ідемпотентів однозначно розкладається в напівгратку прямокутних напівгруп ($x_{i\lambda}x_{j\mu} = x_{i\mu}$).

Теорема 3. *Якщо скінченна напівгрупа ідемпотентів є абсолютним ретрактом у класі скінченних напівгруп, то вона розкладається в ланцюг прямокутних напівгруп з сингулярною верхньою компонентою.*

Розглянемо напівгрупу ідемпотентів $S = S[m_1, \ldots, m_k; n_1, \ldots, n_k]$, $1 \leqslant m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k < \omega$ усіх пар слів вигляду $(i_1 \ldots i_p, \lambda_1 \ldots \lambda_p)$, де $1 \leqslant i_q \leqslant m_q$, $1 \leqslant \lambda_q \leqslant n_q$, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant k$ з множенням

$$(i_1 \ldots i_p, \lambda_1 \ldots \lambda_p)\cdot(j_1 \ldots j_q, \mu_1 \ldots \mu_q) = \begin{cases} (i_1 \ldots i_p, \mu_1 \ldots \mu_p), & \text{якщо } p = q; \\ (i_1 \ldots i_p j_{p+1} \ldots j_q, \mu_1 \ldots \mu_q), & \text{якщо } p < q; \\ (i_1 \ldots i_p, \mu_1 \ldots \mu_q \lambda_{q+1} \ldots \lambda_p), & \text{якщо } p > q. \end{cases}$$

Вона розкладється в спадний ланцюг своїх прямокутних компонент S_p, $1 \leqslant p \leqslant k$, всіх пар слів довжини p. Нехай для кожного p, $1 \leqslant p \leqslant k$ принаймні одне з чисел m_p, n_p дорівнює 1.

Теорема 4. *Неперервний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S є ретракцією.*

З теореми 4 випливає, що в $\beta\mathbb{N}$ існує чотириелементна прямокутна напівгрупа ідемпотентів. Така напівгрупа існує навіть у мінімальному ідеалі $\beta\mathbb{N}$, що позитивно розв'язує відповідне питання з [8]. Проте вона нерегулярна.

---

1. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in Stone-Čech compactification – theory and applications. – Berlin, de Gruyter, 1998.
2. *Протасов И. В.* Ультрафильтры и топологии на группах// Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34. – N 5. – С.163–180.
3. *Зеленюк Е. Г.* Экстремальні ультрафільтри й топології на групах// Матем. студії. – 2000. –Т.14. – N 2. – С.121-140.
4. *Зеленюк Е. Г.* Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров// Матем. студії. – 1996. – N 6. – С.41–52.
5. *Протасов И. В.* Максимальные топологии на группах// Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39. – N 6. – С.1368–1381.
6. *Зленюк Е. Г.* Конечные группы в $\beta\mathbb{N}$ тривиальны// Київ. 1996. 12с. (Препр. НАН Ураины. Ин-т математики, 96.3).
7. Общая алгебра. Под редакцией Скорнякова Л. А.– М., 1991. – Т. 2.
8. *Hindman N.* Algebra in βS and its applications to Ramsey Theory// Math. Japonica. – 1996. – Vol.44. – P.581–625.

FINITE REGULAR SEMIGROUPS OF ULTRAFILTRES

Ye. Zelenyuk

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Meckanics and Mathematics

The note is devoted to the problem of description of finite semigroups of ultrafilters on a countable group determining a regular left invariant topology.

Key words: *finite semigroups of ultrafilters.*

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2000

Прийнята до друку 28.12.2000