ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.97–108

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.97–108

УДК 517.927.25

АСИМПТОТИКА НИЗЬКОЧАСТОТНИХ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ У ЖОРСТКІЙ ЗАДАЧІ

Наталія Бабич

Львівський національний університет імені Івана Франка

У праці вивчено поведінку спектра крайової задачі з малим параметром при старших похідних, причому коефіцієнти диференціального оператора залежать від параметра лише на частині області. Задачі для диференціальних операторів із суттєво різними значеннями коефіцієнтів на частинах області отримали назву жорстких (stiff problems) [1]. Асимптотичну поведінку розв'язків таких задач, а також власних значень і власних функцій, вивчало багато авторів [2–11]. Відомо, що більшість жорстких коливних систем володіє так званими низькочастотними та високочастотними власними коливаннями.

У праці [12] досліджували жорстку задачу для звичайного диференціального оператора четвертого порядку. Коливна система складалася з м'якої та жорсткої частини, причому на кожній з них ставились умови Діріхле. У цій праці розглядаємо ситуацію, коли жорстка частина розташована всередині системи. На відміну від попереднього випадку одержано три види асимптотик, оскільки в першому наближенні на жорсткій частині виникає крайова задача з умовами Неймана. Залежно від вигляду диференціального оператора ця задача може мати ядро різної вимірності. У кожному з цих випадків побудовані асимптотичні розвинення низькочастотних власних коливань.

1. Формулювання задачі. Нехай точки $x = c_1$ і $x = c_2$ дійсної прямої розбивають інтервал (a_1, a_2) на три частини $I_1 = (a_1, c_1)$, $I = (c_1, c_2)$, $I_2 = (c_2, a_2)$. Розглянемо диференціальний вираз L, де

$$Lv = (k(x)v'')'' - (k_1(x)v')' + k_0(x)v.$$

Функції k, k_1 і k_0 є нескінчено диференційовними і обмеженими в $\Omega = I_1 \cup I \cup I_2$. Припускаємо, що $k > 0$, а k_0, $k_1 \geqslant 0$ на $[a_1, a_2]$. Нехай диференціальний вираз L_ε такий

$$L_\varepsilon = \varepsilon L \quad \text{для} \quad x \in I_1 \cup I_2, \qquad \text{і} \qquad L_\varepsilon = L \quad \text{для} \quad x \in I,$$

де ε – малий додатний параметр.

Розглядаємо задачу на власні значення

$$L_\varepsilon u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon \rho(x) u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B_{11}u_\varepsilon = B_{12}u_\varepsilon = 0, \quad B_{21}u_\varepsilon = B_{22}u_\varepsilon = 0. \tag{2}$$

Вважаємо, що функція ρ є неперервною і обмеженою в Ω, а також $\rho > 0$ на $[a_1, a_2]$. У точках $x = a_j$, $j = 1, 2$ ставимо крайові умови $B_{j1}v = B_{j2}v = 0$

одного з перелічених типів: $v(a_j) = v'(a_j) = 0$, $v(a_j) = v''(a_j) = 0$, $(kv'')(a_j) = ((kv'')' - k_1 v')(a_j) = 0$.

Введемо позначення $l_2 v = kv''$, $l_3 v = (kv'')' - k_1 v'$. Оскільки коефіцієнти рівняння (1) є розривними в точках $x = c_1, c_2$, то вимагаємо виконання умов спряження

$$u_\varepsilon(c_j - 0) = u_\varepsilon(c_j + 0), \quad u'_\varepsilon(c_j - 0) = u'_\varepsilon(c_j + 0), \quad j = 1, 2, \tag{3}$$

$$\varepsilon\,(l_i u_\varepsilon)(c_1 - 0) = (l_i u_\varepsilon)(c_1 + 0), \quad (l_i u_\varepsilon)(c_2 - 0) = \varepsilon\,(l_i u_\varepsilon)(c_2 + 0), \quad i = 2, 3. \tag{4}$$

Вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε і власних функцій u_ε задачі (1) – (4).

Нехай $L_2(\rho, \Sigma)$ є ваговим L_2–простором функцій на Σ зі скалярним добутком $(u, v)_{L_2(\rho,\Sigma)} = \int\limits_{\Sigma} \rho\, uv\, dx$.

Лема 1. *Для кожного фіксованого $\varepsilon \in (0, 1)$ задача (1) – (4) має зліченну множину власних значень $0 \leqslant \lambda_1^\varepsilon \leqslant \lambda_2^\varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \lambda_i^\varepsilon \leqslant \ldots$, занумерованих з урахуванням кратності. Власні значення λ_i^ε прямують до нескінченості при $i \to \infty$.*

Доведення. У просторі $L_2(\rho, \Omega)$ розглянемо оператор $\mathcal{L}_\varepsilon = \rho^{-1} L_\varepsilon$ із областю визначення

$$\begin{gathered} D(\mathcal{L}_\varepsilon) = \{v \in L_2(\rho, \Omega): \quad v\big|_{I_1} \in H^4(I_1), \quad v\big|_{I} \in H^4(I), \quad v\big|_{I_2} \in H^4(I_2), \\ B_{j1} v = B_{j2} v = 0, \quad v(c_j - 0) = v(c_j + 0), \quad v'(c_j - 0) = v'(c_j + 0), \quad j = 1, 2, \\ \varepsilon\,(l_i v)(c_1 - 0) = (l_i v)(c_1 + 0), \quad (l_i v_2)(c_2 - 0) = \varepsilon\,(l_i v_3)(c_2 + 0), \quad i = 2, 3\,\}, \end{gathered}$$

де $v\big|_\Sigma$ є звуженням функції v на множину Σ.

Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ є самоспряжений і додатний, а область визначення $D(\mathcal{L}_\varepsilon)$ з нормою графіка компактно вкладається в $L_2(\rho, \Omega)$. Отже, оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ має компактну резольвенту. Лему доведено.

Не обмежуючи загальності, систему $\{u_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ власних функцій задачі (1) – (4) вважаємо ортонормованою базою в $L_2(\rho, \Omega)$.

Асимптотичні розвинення власних значень $\lambda_\varepsilon = \lambda_i^\varepsilon$ і власних функцій $u_\varepsilon = u_i^\varepsilon$ задачі (1) – (4) шукатимемо у вигляді

$$\begin{gathered} \lambda_\varepsilon \sim \varepsilon(\lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \cdots + \lambda_i \varepsilon^i + \ldots), \\ u_\varepsilon(x) \sim u_0(x) + u_1(x)\varepsilon + \cdots + u_i(x)\varepsilon^i + \ldots, \quad x \in I_1 \cup I_2, \\ u_\varepsilon(x) \sim w_0(x) + w_1(x)\varepsilon + \cdots + w_i(x)\varepsilon^i + \ldots, \quad x \in I. \end{gathered} \tag{5}$$

Підставивши ряди (5) у рівності (1) – (4), зокрема отримуємо, що функція w_0 є розв'язком крайової задачі

$$L w_0 = 0, \quad x \in I, \qquad l_2 w_0(c_j) = 0, \quad l_3 w_0(c_j) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Задача (6) може мати ядро, вимірність якого залежить від оператора L. Якщо коефіцієнт k_0 відмінний від нуля на інтервалі I, то задача (6) має лише тривіальний розв'язок $w_0 = 0$. Якщо $k_0 = 0$, а k_1 відмінний від нуля на I, то $w_0 = A_0$, де A_0 – довільна стала. Якщо ж $k_0 = k_1 = 0$, то кожна функція вигляду $w_0 = A_0 + B_0 x$ є розв'язком задачі (6). Вимірність простору розв'язків задачі (6) позначатимемо r, де r може приймати значення 0,1 і 2.

2. Асимптотика у випадку $r = 0$. Оскільки задача (6) має лише тривіальний розв'язок $w_0 = 0$, то з умов спряження (3) отримуємо $u_0(c_1) = u_0(c_2) = 0$ і $u_0'(c_1) = u_0'(c_2) = 0$. Тоді

$$Lu_0 - \lambda_0 \rho u_0 = 0, \ x \in I_1, \quad B_{11}u_0 = B_{12}u_0 = 0, \quad u_0(c_1) = u_0'(c_1) = 0, \tag{7}$$

$$Lu_0 - \lambda_0 \rho u_0 = 0, \ x \in I_2, \quad u_0(c_2) = u_0'(c_2) = 0, \quad B_{21}u_0 = B_{22}u_0 = 0, \tag{8}$$

тобто λ_0 має бути власним значенням системи двох спектральних задач із власним вектором $(u_0\big|_{I_1}, u_0\big|_{I_2})$. Обмежимось випадком, коли λ_0 є простим власним значенням системи задач (7), (8). Тоді функція u_0 є нульовою на одному з інтервалів I_1 або I_2. Не обмежуючи загальності, вважаємо λ_0 простим власним значенням задачі (7). Тоді $u_0 = 0$ на інтервалі I_2. Нехай виконується умова нормування $\|u_0\|_{L_2(\rho, I_1)} = 1$.

Тоді функцію w_1 знаходимо з крайової задачі

$$Lw_1 = 0, \quad x \in I, \qquad l_i w_1(c_1) = l_i u_0(c_1), \quad l_i w_1(c_2) = 0, \quad i = 2, 3.$$

Крім того,

$$\begin{gathered} Lu_1 - \lambda_0 \rho u_1 = \lambda_1 \rho u_0, \quad x \in I_1, \\ B_{11}u_1 = B_{12}u_1 = 0, \quad u_1(c_1) = w_1(c_1), \quad u_1'(c_1) = w_1'(c_1). \end{gathered} \tag{9}$$

Оскільки λ_0 є власним значенням задачі (7), то задача (9) має розв'язок лише у разі виконання умови $\lambda_1 = (l_2 u_0'' \cdot w_1' - l_3 u_0 \cdot w_1)(c_1)$, а функцію u_1 можна визначити з точністю до доданка Cu_0, де C – довільна стала. Виберемо u_1 з умови $(u_1, u_0)_{L_2(\rho, I_1)} = 0$. На інтервалі I_2 коефіцієнт u_1 знаходимо як розв'язок задачі

$$\begin{gathered} Lu_1 - \lambda_0 \rho u_1 = 0, \quad x \in I_2, \\ u_1(c_2) = w_1(c_2), \quad u_1'(c_2) = w_1'(c_2), \quad B_{21}u_1 = B_{22}u_1 = 0. \end{gathered}$$

Аналогічно визначаємо інші коефіцієнти розвинень (5). Зокрема, маємо

$$Lw_i = \rho \sum_{j=1}^{i} \lambda_{j-1} w_{i-j}, \quad x \in I, \qquad l_s w_i(c_j) = l_s u_{i-1}(c_j), \quad j = 1, 2, \quad s = 2, 3,$$

звідки знаходимо w_i.

З умови існування розв'язку задачі

$$\begin{gathered} Lu_i - \lambda_0 \rho u_i = \lambda_i \rho u_0 + \rho \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_{i-j}, \quad x \in I_1, \\ B_{11}u_i = B_{12}u_i = 0, \qquad u_i(c_1) = w_i(c_1), \quad u_i'(c_1) = w_i'(c_1) \end{gathered}$$

знаходимо $\lambda_i = (l_2 u_0 \cdot w_i' - l_3 u_0 \cdot w_i)(c_1)$. Функцію u_i, яка знайдена з точністю до доданка Cu_0, підпорядковуємо умові $(u_i, u_0)_{L_2(\rho, I_1)} = 0$. На інтервалі I_2 коефіцієнт u_i є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} Lu_i - \lambda_0 \rho u_i = \rho \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_{i-j}, \quad x \in I_2, \\ u_i(c_2) = w_i(c_2), \quad u_i'(c_2) = w_i'(c_2), \qquad B_{21}u_i = B_{22}u_i = 0. \end{gathered}$$

Отже, ми знайшли усі коефіцієнти розвинень (5). Розглянемо часткові суми цих рядів

$$\Lambda_N^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \lambda_j, \qquad U_N^\varepsilon(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} u_j(x)\,\varepsilon^j, & x \in I_1 \cup I_2, \\ \sum\limits_{j=0}^{N} w_j(x)\,\varepsilon^j, & x \in I. \end{cases}$$

Лема 2. *Нехай $\{\lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – послідовності власних значень та відповідних власних функцій задачі (1)-(4). Якщо $\lambda_\varepsilon \leqslant C\varepsilon$ і $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} = 1$, то існує підпослідовність $u_{\varepsilon'}$, яка збігається в $L_2(\rho,\Omega)$. Крім того, якщо $\varepsilon^{-1}\lambda_\varepsilon \to \lambda_0$ і $u_{\varepsilon'} \to v$, то $(v\big|_{I_1}, v\big|_{I_2})$ є власним вектором системи (7), (8), який відповідає власному значенню λ_0.*

Доведення. Розглянемо білінійні форми

$$\alpha(u,v) = \int\limits_I (ku''v'' + k_1u'v' + k_0uv)dx, \quad \beta(u,v) = \int\limits_{I_1\cup I_2} (ku''v'' + k_1u'v' + k_0uv)dx.$$

Оскільки $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$, то задачі (1)–(4) відповідає тотожність

$$\alpha(u_\varepsilon,\varphi) + \varepsilon\beta(u_\varepsilon,\varphi) = \lambda_\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi)_{L_2(\rho,\Omega)}, \qquad \varphi \in H^2(\Omega). \tag{11}$$

Безпосередньо з (11) отримуємо оцінки

$$\alpha(u_\varepsilon,u_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon, \quad \beta(u_\varepsilon,u_\varepsilon) \leqslant C, \quad \|u_\varepsilon\|_{H^2(I_1\cup I_2)} \leqslant C_1, \quad \|u_\varepsilon\|_{H^2(I)} \leqslant C_2.$$

Тобто послідовність u_ε є обмежена в $H^2(\Omega)$, а отже, передкомпактна в $L_2(\rho,\Omega)$. Якщо ж $u_{\varepsilon'} \to v$, то $\alpha(v,v) = 0$ і

$$\beta(v,\varphi) = \lambda_0(v,\varphi)_{L_2(\rho,\Omega)}$$

для усіх $\varphi \in H^2(\Omega)$. Отож, $v = 0$ на інтервалі I і задовольняє інтегральну тотожність для задачі (7), (8). Зауважимо, що функція v є ненульовою, оскільки $\|v\|_{L_2(\rho,\Omega)} = 1$. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай $k_0 \neq 0$ на інтервалі I, а λ_0 є простим власним значенням задачі (7), (8). Тоді існують власне значення λ_ε та власна функція u_ε задачі (1)-(4) такі, що виконуються оцінки*

$$|\lambda^\varepsilon - \Lambda_N^\varepsilon| \leqslant C_1(N)\varepsilon^{N+1}, \quad \|u^\varepsilon - U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \leqslant C_2(N)\varepsilon^{N+1},$$

де $\|u^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} = \|U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Сталі $C_1(N)$ і $C_2(N)$ не залежать від ε.

Доведення. Покажемо, що при достатньо малому ε число Λ_N^ε і функція $U_N^\varepsilon(x)$ є майже власним значенням і майже власною функцією оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ з леми 1. Для цього так "підправимо" $U_N^\varepsilon(x)$, щоб вона належала області визначення $\mathcal{L}_\varepsilon$. Функція U_N^ε не задовольняє умови спряження другої і третьої похідної, але залишки є обмеженими ε^{N+1}. Існує такий многочлен ψ_N, що $V_N^\varepsilon = U_N^\varepsilon + \varepsilon^{N+1}\psi_N \cdot \chi(I)$ належить до $D(\mathcal{L}_\varepsilon)$, де $\chi(I)$ – характеристична функція відрізка I.

Функція U_N^ε задовольняє нерівність $\max\limits_{x\in\Omega}|L_\varepsilon U_N^\varepsilon(x) - \Lambda_N^\varepsilon U_N^\varepsilon(x)| \leqslant C_0(N)\varepsilon^{N+1}$, де стала $C_0(N)$ не залежить від ε. Тому виконується оцінка

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon V_N^\varepsilon - \Lambda_N^\varepsilon V_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \leqslant C_1(N)\varepsilon^{N+1}.$$

Тоді [13, с. 134] існує власне значення λ_ε оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$, яке задовольняє оцінку

$$|\lambda_\varepsilon - \Lambda_N^\varepsilon| \leqslant C_1(N)\varepsilon^{N+1}. \tag{10}$$

Нехай для як завгодно малих значень параметра ε сумарна кратність тих власних значень λ_ε, які задовольняють нерівність (10), перевищує 1. Тоді їм відповідають принаймні дві послідовності власних функцій $u_{(1)}^\varepsilon$ і $u_{(2)}^\varepsilon$ такі, що

$$(u_{(1)}^\varepsilon, u_{(2)}^\varepsilon)_{L_2(\rho,\Omega)} = 0, \quad \|u_{(1)}^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} = \|u_{(2)}^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} = 1.$$

Згідно з лемою 2 $u_{(1)}^\varepsilon \to v_1$ і $u_{(2)}^\varepsilon \to v_2$ в $L_2(\rho,\Omega)$ (можливо на підпослідовностях), причому v_1 і v_2 є власними функціями системи задач (7), (8), які відповідають λ_0. Тоді $(v_1, v_2)_{L_2(\rho,\Omega)} = 0$, $v_k = 0$ на множині I, а отже, і $(v_1, v_2)_{L_2(\rho, I_1\cup I_2)} = 0$, що суперечить припущенню про простоту λ_0. Тому для достатньо малих ε оцінку (10) задовольняє лише одне просте власне значення λ_ε задачі (1)–(4). Тоді відповідна власна функція u_ε задовольняє нерівність $\|u_\varepsilon - V_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \leqslant C_2(N)\varepsilon^N$. Звідси одержуємо $\|u_\varepsilon - U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \leqslant C_3(N)\varepsilon^{N+1}$. Теорему доведено.

3. Асимптотика у випадку $r = 1$. У цьому випадку $w_0 = A_0$, причому стала A_0 загалом є відмінною від нуля. З умов спряження (3) одержуємо $u_0(c_1) = u_0(c_2) = A_0$, $u_0'(c_1) = u_0'(c_2) = 0$. Введемо позначення

$$\{v\}_- = v(c_2) - v(c_1), \quad \{v\}_+ = v(c_2) + v(c_1), \quad \rho_i = \int\limits_I \rho(x)x^i\,dx.$$

Тоді функція u_0 задовольняє умови $\{u_0\}_- = 0$, $u_0'(c_1) = u_0'(c_2) = 0$. Маємо також рівність

$$A_0 = \frac{1}{2}\{u_0\}_+. \tag{12}$$

Розглянемо крайову задачу для w_1

$$Lw_1 = \lambda_0\rho w_0, \quad x \in I, \quad l_i w_1(c_j) = l_i u_0(c_j), \quad j = 1,2, \quad i = 2,3, \tag{13}$$

яка має розв'язок лише при виконанні умови $\lambda_0\rho_0\{u_0\}_+ = 2\{l_3u_0\}_-$. Тоді число λ_0 має бути власним значенням, а u_0 – відповідною власною функцією задачі

$$\begin{gathered} Lu_0 - \lambda_0\rho u_0 = 0, \quad x \in I_1 \cup I_2, \\ B_{11}u_0 = B_{12}u_0 = 0, \quad B_{21}u_0 = B_{22}u_0 = 0, \\ \{u_0\}_- = 0, \quad u_0'(c_1) = u_0'(c_2) = 0, \quad \{l_3u_0\}_- - \frac{1}{2}\lambda_0\rho_0\{u_0\}_+ = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Лема 3. *Задача (14) має зліченну множину невід'ємних власних значень* $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_i \leqslant \ldots$, *занумерованих з урахуванням кратності. Власні значення* μ_i *прямують до нескінченості при* $i \to \infty$.

Доведення. Розглянемо простір $\mathcal{H}_1 = L_2(\rho, I_1 \cup I_2) \times \mathbb{R}$ із скалярним добутком $(V,\Phi)_{\mathcal{H}_1} = (v_1,\phi_1)_{L_2(\rho,I_1\cup I_2)} + \rho_0 v_2\phi_2$, де $V = (v_1, v_2)$, $\Phi = (\phi_1,\phi_2) \in \mathcal{H}_1$. Розглянемо матричний оператор $\mathcal{L}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$,

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \rho^{-1}L & 0 \\ \delta \circ l_3 & 0 \end{pmatrix},$$

із областю визначення

$$D(\mathcal{L}_1) = \{V \in \mathcal{H}_1 : v_1\big|_{I_j} \in H^4(I_j), \quad B_{j1}v_1 = B_{j2}v_1 = 0, \quad j = 1,2,$$
$$v_1(c_1) = v_1(c_2), \quad v_1'(c_1) = v_1'(c_2) = 0, \quad v_2 = \frac{1}{2}\{v_1\}_+ \},$$

де $\delta(f) = \rho_0^{-1}(f(c_2) - f(c_1))$.

Якщо λ_0 є власним значенням, а u_0 – відповідною власною функцією задачі (14), то λ_0 і вектор $(u_0, \frac{1}{2}\{u_0\}_+)$ є власним значенням і власним вектором оператора $\mathcal{L}_1$. І навпаки, якщо $\mu \in \sigma(\mathcal{L}_1)$, а U є відповідним власним вектором оператора $\mathcal{L}_1$, то μ і перша компонента U є відповідно власним значенням і власною функцією задачі (14).

Оператор $\mathcal{L}_1$ є самоспряжений і додатний. Крім того, $D(\mathcal{L}_1)$ з нормою графіка компактно вкладається в $\mathcal{H}_1$. Тому оператор $\mathcal{L}_1$ має компактну резольвенту. Отже, спектр оператора $\mathcal{L}_1$ є дискретним. Лему доведено.

Введемо позначення $\mathcal{J}_1 v = \left(v, \frac{1}{2}\{v\}_+\right)$. Нехай λ_0 є простим власним значенням задачі (14), власна функція u_0 є нормована так $\|\mathcal{J}_1 u_0\|_{\mathcal{H}_1} = 1$. Тоді з рівності (12) знаходимо сталу A_0, а отже, і функцію w_0.

Знайдемо u_1. Для цього виберемо розв'язок $\mathcal{W}_1$ задачі (13), який задовольняє умову $(\mathcal{W}_1, 1)_{L_2(\rho,I)} = 0$. Тоді $w_1 = \mathcal{W}_1 + A_1$, де A_1 – довільна стала. З умов спряження (3) отримуємо $u_1(c_j) = \mathcal{W}_1(c_j) + A_1$, $u_1'(c_j) = \mathcal{W}_1'(c_j)$, $j = 1,2$. Зокрема, маємо рівності

$$A_1 = \frac{1}{2}\{u_1\}_+ - \frac{1}{2}\{\mathcal{W}_1\}_+, \quad \{u_1\}_- = \{\mathcal{W}_1\}_-. \tag{15}$$

Розглянемо задачу з невідомою функцією w_2

$$Lw_2 = \rho(\lambda_0 w_1 + \lambda_1 w_0), \quad x \in I, \qquad l_i w_2(c_j) = l_i u_1(c_j), \quad j = 1,2, \quad i = 2,3. \tag{16}$$

Кожна стала функція задовольняє відповідну однорідну задачу (6), тому умова розв'язності для (16) має вигляд $\lambda_0 A_1 \rho_0 + \lambda_1 A_0 \rho_0 = \{l_3 u_1\}_-$.

Оскільки λ_0 є власним значенням задачі (14), то задача

$$\begin{gathered} Lu_1 - \lambda_0 \rho u_1 = \lambda_1 \rho u_0, \quad x \in I_1 \cup I_2, \\ B_{11}u_1 = B_{12}u_1 = 0, \quad B_{21}u_1 = B_{22}u_1 = 0, \\ \{u_1\}_- = \{\mathcal{W}_1\}_-, \qquad u_1'(c_j) = \mathcal{W}_1'(c_j), \quad j = 1,2, \\ \{l_3 u_1\}_- - \frac{1}{2}\lambda_0\rho_0\{u_1\}_+ = \lambda_1 \rho_0 A_0 - \frac{1}{2}\lambda_0\rho_0\{\mathcal{W}_1\}_+. \end{gathered} \tag{17}$$

має розв'язок лише при

$$\lambda_1 = 4^{-1}\lambda_0\rho_0\{\mathcal{W}_1\}_+\{u_0\}_+ + \{\mathcal{W}_1 \cdot l_3 u_0 - \mathcal{W}_1' \cdot l_2 u_0\}_-.$$

Тоді u_1 можна визначити з точністю до доданка Cu_0. Виберемо u_1 з умови $(\mathcal{J}_1 u_1, \mathcal{J}_1 u_0)_{\mathcal{H}_1} = 0$. Сталу A_1 одержуємо з рівності (15). Знайдемо такий розв'язок $\mathcal{W}_2$ задачі (16), що $(\mathcal{W}_2, 1)_{L_2(\rho,I)} = 0$. Тоді функція $w_2 = \mathcal{W}_2 + A_2$, де A_2 – довільна стала.

Припустимо, що w_m, λ_m, u_m відомі для $m = 0, 1, \ldots, i-1$. Крім того, функції u_m задовольняють умови $(\mathcal{J}_1 u_m, \mathcal{J}_1 u_0)_{\mathcal{H}_1} = 0$, а коефіцієнт w_i знайдений з точністю до сталої A_i: $w_i = \mathcal{W}_i + A_i$, де $(\mathcal{W}_i, 1)_{L_2(\rho,I)} = 0$. Тоді можна знайти A_i, λ_i та u_i.

З умов спряження (3) отримуємо $u_i(c_j) = \mathcal{W}_i(c_j) + A_i$, $u_i'(c_j) = \mathcal{W}_i'(c_j)$, $j = 1, 2$. Зокрема, маємо рівності

$$A_i = \frac{1}{2}\{u_i\}_+ - \frac{1}{2}\{\mathcal{W}_i\}_+, \quad \{u_i\}_- = \{\mathcal{W}_i\}_-. \tag{18}$$

Крім того, функція u_i задовольняє умову розв'язності задачі

$$Lw_{i+1} = \rho\sum_{j=0}^{i}\lambda_j w_{i-j}, \ x \in I, \quad l_s w_{i+1}(c_j) = l_s u_i(c_j), \quad j = 1, 2, \quad s = 2, 3. \tag{19}$$

Тобто $\{l_3 u_i\}_- = \lambda_i \rho_0 A_0 + \sum\limits_{j=1}^{i-1}\lambda_j \mathcal{B}_{i-j} + \lambda_0\rho_0 A_i$, де $\mathcal{B}_m = (w_m, 1)_{L_2(\rho, I)}$. Тоді маємо

$$\begin{gathered}
Lu_i - \lambda_0\rho u_i = \lambda_i \rho u_0 + \rho\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j u_{i-j}, \quad x \in G,\\
B_{11}u_i = B_{12}u_i = 0, \quad B_{21}u_i = B_{22}u_i = 0,\\
\{u_i\}_- = \{\mathcal{W}_i\}_-, \quad u_i'(c_j) = \mathcal{W}_i'(c_j), \quad j = 1, 2,\\
\{l_3 u_i\}_- - \frac{1}{2}\lambda_0\rho_0\{u_i\}_+ = \lambda_i\rho_0 A_0 - \frac{1}{2}\lambda_0\rho_0\{\mathcal{W}_i\}_+ + \sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j \mathcal{B}_{i-j}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Задача (20) має розв'язок лише за умови $\lambda_i = \frac{1}{4}\rho_0\{u_0\}_+ \cdot \sum_{j=0}^{i-1}\lambda_j\{\mathcal{W}_{i-j}\}_+ + \{\mathcal{W}_i \cdot l_3 u_0 - \mathcal{W}_i' \cdot l_2 u_0\}_-$. А функцію u_i можна визначити з точністю до доданка Cu_0, підпорядкуємо її умові $(\mathcal{J}_1 u_i, \mathcal{J}_1 u_0)_{\mathcal{H}_1} = 0$. З рівності (20) одержуємо сталу A_i. Вибираємо розв'язок $\mathcal{W}_{i+1}$ задачі (19) такий, що $(\mathcal{W}_{i+1}, 1)_{L_2(\rho, I)} = 0$. Тоді $w_{i+1} = \mathcal{W}_{i+1} + A_{i+1}$, де A_{i+1} – довільна стала. Методом математичної індукції отримуємо, що послідовність задач (19), (20) для $i = 1, 2, \ldots$ є розв'язною.

Отже, ми знайшли усі коефіцієнти розвинень (5) у випадку $r = 1$. Розглянемо часткові суми цих рядів

$$\Lambda_N^\varepsilon = \varepsilon\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\lambda_j, \qquad U_N^\varepsilon(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} u_j(x)\,\varepsilon^j, & x \in I_1 \cup I_2,\\ \sum\limits_{j=0}^{N} w_j(x)\,\varepsilon^j, & x \in I. \end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай $k_0 = 0$, $k_1 \neq 0$ на інтервалі I, а λ_0 є простим власним значенням задачі (14). Тоді існують власне значення λ_ε та власна функція u_ε задачі (1)–(4) такі, що*

$$|\lambda^\varepsilon - \Lambda_N^\varepsilon| \leqslant C_1(N)\varepsilon^{N+1}, \quad \|u^\varepsilon - U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \leqslant C_2(N)\varepsilon^{N+1},$$

де $\|u^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} = \|U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Сталі $C_1(N)$ і $C_2(N)$ не залежать від ε.

Доведення є подібним до доведення теореми 1.

3. Асимптотика у випадку $r = 2$. У цьому випадку $w_0 = A_0 x + B_0$, причому сталі A_0, B_0 загалом відмінні від нуля. З умов спряження (3) одержуємо $u_0(c_j) = A_0 c_j + B_0$, $u_0'(c_j) = A_0$, $j = 1, 2$. Тоді функція u_0 задовольняє умови $2\{u_0\}_- = (c_2 - c_1)\{u_0'\}_+$, $\{u_0'\}_- = 0$, а сталі A_0, B_0 є такими:

$$A_0 = \frac{1}{2}\{u_0'\}_+, \qquad B_0 = \frac{1}{2}\{u_0\}_+ - \frac{c_1 + c_2}{4}\{u_0'\}_+. \tag{21}$$

Крім того, задача з невідомою функцією w_1

$$Lw_1 = \lambda_0 \rho w_0, \quad x \in I, \qquad l_s w_1(c_j) = l_s u_0(c_j), \quad j = 1, 2, \quad s = 2, 3, \tag{22}$$

має розв'язок лише при виконанні умов

$$\{l_3 u_0\}_- = \frac{\lambda_0}{2}\left(\rho_1\{u_0'\}_+ + \rho_0\left(\{u_0\}_+ - \frac{c_1+c_2}{2}\{u_0'\}_+\right)\right),$$
$$\{l_2 u_0\}_- - \{x \cdot l_3 u_0\}_- = -\frac{\lambda_0}{2}\left(\rho_2\{u_0'\}_+ + \rho_1\left(\{u_0\}_+ - \frac{c_1+c_2}{2}\{u_0'\}_+\right)\right).$$

Зауважимо, що виконується рівність $2\{x \cdot l_3 v\}_- = (c_1+c_2)\{l_3 v\}_- + (c_2 - c_1)\{l_3 v\}_+$.

Тоді число λ_0 і функція u_0 є відповідно власним значенням і власною функцією задачі

$$\begin{gathered} Lu_0 = \lambda_0 \rho u_0, \quad x \in I_1 \cup I_2, \\ B_{11} u_0 = B_{12} u_0 = 0, \quad B_{11} u_0 = B_{12} u_0 = 0, \quad \{u_0'\}_- = 0, \\ \{u_0\}_- = \frac{c_2-c_1}{2}\{u_0'\}_+, \quad \{l_2 u_0\}_- - \frac{c_1+c_2}{2}\{l_3 u_0\}_- - \frac{c_2-c_1}{2}\{l_3 u_0\}_+ = \\ = -\frac{\lambda_0}{2}\left(\rho_2\{u_0'\}_+ + \rho_1\left(\{u_0\}_+ - \frac{c_1+c_2}{2}\{u_0'\}_+\right)\right), \\ \{l_3 u_0\}_- = \frac{\lambda_0}{2}\left(\rho_1\{u_0'\}_+ + \rho_0\left(\{u_0\}_+ - \frac{c_1+c_2}{2}\{u_0'\}_+\right)\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Лема 4. *Задача (23) має зліченну множину невід'ємних власних значень $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots \leqslant \eta_i \leqslant \ldots$, занумерованих з урахуванням кратності. Власні значення η_i прямують до нескінченості при $i \to \infty$.*

Доведення. Розглянемо матрицю

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{pmatrix},$$

яка додатно визначена, оскільки функція ρ є додатна. Розглянемо простір $\mathcal{H}_2 = L_2(I_1 \cup I_2) \times \mathbb{R}^2$ зі скалярним добутком

$$(V, Y)_{\mathcal{H}_2} = (v_1, y_1)_{L_2(\rho, I_1 \cup I_2)} + (\Upsilon v_2, y_2)_{\mathbb{R}^2},$$

де $V = (v_1, v_2)$, $Y = (y_1, y_2) \in \mathcal{H}_2$. Розглянемо матричний оператор $\mathcal{L}_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$,

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} \rho^{-1} L & 0 \\ \Upsilon^{-1} F & 0 \end{pmatrix},$$

з областю визначення

$$\begin{gathered} D(\mathcal{L}_2) = \{V \in \mathcal{H}_2 : \quad v_1\big|_{I_j} \in H^4(I_j), \quad B_{j1} v_1 = B_{j2} v_1 = 0, \quad j = 1, 2, \\ \{v_1\}_- = \frac{c_2-c_1}{2}\{v_1'\}_+, \quad \{v_1'\}_- = 0, \quad v_2 = \mathcal{F} v_1 \}, \end{gathered}$$

де

$$Fv = \left(-\{l_2 v\}_- + \frac{c_1+c_2}{2}\{l_3 v\}_- + \frac{c_1-c_2}{2}\{l_3 v\}_+, \ \{l_3 v\}_-\right),$$
$$\mathcal{F} v = \left(\frac{1}{2}\{v'\}_+, \quad \frac{1}{2}\{v\}_+ - \frac{c_1+c_2}{4}\{v'\}_+\right).$$

Якщо λ_0 є власним значенням, а u_0 – відповідною власною функцією задачі (23), то λ_0 і вектор $(u_0, \mathcal{F}u_0)$ є власним значенням і власним вектором оператора $\mathcal{L}_2$. І навпаки, якщо $\eta \in \sigma(\mathcal{L}_2)$, а U є власним вектором, то η і перша компонента вектора U є власним значенням і власною функцією задачі (23).

Оператор $\mathcal{L}_2$ є самоспряженим і додатним. Оскільки $D(\mathcal{L}_2)$ з нормою графіка компактно вкладається в $\mathcal{H}_2$, то $\mathcal{L}_2$ має компактну резольвенту. Тому спектр оператора $\mathcal{L}_2$ дискретний. Лему доведено.

Введемо позначення $\mathcal{J}_2 v = (u_0, \mathcal{F}u_0)$. Нехай λ_0 є простим власним значенням задачі (23), власна функція u_0 є нормована так $\|\mathcal{J}_2 u_0\|_{\mathcal{H}_2} = 1$. Тоді з рівностей (21) знаходимо сталі A_0, B_0, а отже і функцію w_0.

Знайдемо функцію u_1. Для цього виберемо розв'язок $\mathcal{W}_1$ задачі (22), який задовольняє умови $(\mathcal{W}_1, 1)_{L_2(\rho,I)} = 0$ і $(\mathcal{W}_1, x)_{L_2(\rho,I)} = 0$. Тоді $w_1 = \mathcal{W}_1 + A_1 x + B_1$ з деякими сталими A_1, B_1. З умов спряження (3) отримуємо $u_1(c_j) = \mathcal{W}_1(c_j) + A_1 c_j + B_1$, $u_1'(c_j) = \mathcal{W}_1'(c_j) + A_1$, $j = 1, 2$. Тому функція u_1 задовольняє умови

$$\{u_1\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{u_1'\}_+ = \{\mathcal{W}_1\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{\mathcal{W}_1'\}_+, \qquad \{u_1'\}_- = \{\mathcal{W}_1'\}_+,$$

а сталі A_1, B_1 є такими:

$$A_1 = \frac{1}{2}\{u_1'\}_+ - \frac{1}{2}\{\mathcal{W}_1'\}_+, \qquad B_1 = \frac{1}{2}\{u_1 - \mathcal{W}_1\}_+ - \frac{c_1 + c_2}{4}\{u_1' - \mathcal{W}_1'\}_+. \tag{24}$$

Крім того, крайова задача

$$Lw_2 = \lambda_0 \rho w_1 + \lambda_1 \rho w_0, \quad x \in I, \qquad l_i w_2(c_j) = l_i u_1(c_j), \quad j = 1, 2, \quad i = 2, 3, \tag{25}$$

має розв'язок лише за умови

$$Fu_1 - \lambda_0 \Upsilon \mathcal{F} u_1 = \Upsilon(\lambda_1 \mathcal{F} u_0 - \lambda_0 \mathcal{F} \mathcal{W}_1).$$

Отже, функцію u_1 знаходимо з задачі

$$\begin{gathered} Lu_1 - \lambda_0 \rho u_1 = \lambda_1 \rho u_0, \quad x \in I_1 \cup I_2, \\ B_{11} u_1 = B_{12} u_1 = 0, \quad B_{21} u_1 = B_{22} u_1 = 0, \\ \{u_1'\}_- = \{\mathcal{W}_1'\}_-, \quad \{u_1\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{u_1'\}_+ = \{\mathcal{W}_1\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{\mathcal{W}_1'\}_+, \\ Fu_1 - \lambda_0 \Upsilon \mathcal{F} u_1 = \Upsilon(\lambda_1 \mathcal{F} u_0 - \lambda_0 \mathcal{F} \mathcal{W}_1). \end{gathered} \tag{26}$$

Оскільки λ_0 є власним значенням (23), то умова розв'язності задачі (26) така:

$$\lambda_1 = \lambda_0 (\Upsilon \mathcal{F} \mathcal{W}_1, \mathcal{F} u_0)_{\mathbb{R}^2} + \frac{1}{2}\left(\{\mathcal{W}_1\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{\mathcal{W}_1'\}_+\right)\{l_3 u_0\}_+ - \frac{1}{2}\{\mathcal{W}_1'\}_- \{l_2 u_0\}_+.$$

Функцію u_1 знаходимо з точністю до доданка Cu_0 і підпорядковуємо умові $(\mathcal{J}_2 u_1, \mathcal{J}_2 u_0)_{\mathcal{H}_2} = 0$. Сталі A_1, B_1 отримуємо з (24). Фіксуємо розв'язок $\mathcal{W}_2$ задачі (25), який задовольняє умови $(\mathcal{W}_2, 1)_{L_2(\rho,I)} = 0$ і $(\mathcal{W}_2, x)_{L_2(\rho,I)} = 0$. Тоді $w_2 = \mathcal{W}_2 + A_2 x + B_2$, де A_2, B_2 – довільні сталі.

Методом математичної індукції знайдемо коефіцієнти λ_i, u_i, w_i $(i \geqslant 2)$ асимптотичних розвинень (5). Припустимо, що відомі w_m, λ_m, u_m, $m = 0, 1, \ldots, i-1$. Нехай, крім того, функції u_m є такі, що $(\mathcal{J}_2 u_m, \mathcal{J}_2 u_0)_{\mathcal{H}_2} = 0$, $m = 1, 2, \ldots, i-1$. Нехай також коефіцієнт w_i визначений з точністю до сталих A_i, B_i: $w_i = \mathcal{W}_i + A_i x + B_i$, де $(\mathcal{W}_i, 1)_{L_2(\rho,I)} = 0$, $(\mathcal{W}_i, x)_{L_2(\rho,I)} = 0$. Знайдемо A_i, B_i, λ_i і u_i.

З умов спряження (3) одержуємо $u_i(c_j) = \mathcal{W}_i(c_j) + A_i c_j + B_i$, $u_i'(c_j) = \mathcal{W}_i'(c_j) + A_i$, $j = 1, 2$. Тоді функція u_i задовольняє умови

$$\{u_i\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{u_i'\}_+ = \{\mathcal{W}_i\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{\mathcal{W}_i'\}_+, \qquad \{u_i'\}_- = \{\mathcal{W}_i'\}_+,$$

а сталі A_i, B_i є такими:

$$A_i = \frac{1}{2}\{u_i'\}_+ - \frac{1}{2}\{\mathcal{W}_i'\}_+, \qquad B_i = \frac{1}{2}\{u_i - \mathcal{W}_i\}_+ - \frac{c_1 + c_2}{4}\{u_i' - \mathcal{W}_i'\}_+. \tag{27}$$

Задача

$$Lw_{i+1} = \rho \sum_{j=0}^{i} \lambda_j w_{i-j}, \quad x \in I, \quad l_s w_{i+1}(c_j) = l_s u_i(c_j), \quad j = 1, 2, \ s = 2, 3. \tag{28}$$

має розв'язок лише за умови

$$Fu_i - \lambda_0 \Upsilon \mathcal{F} u_i = \lambda_i \Upsilon \mathcal{F} u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \Upsilon \mathcal{F} u_{i-j} - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \Upsilon \mathcal{F} \mathcal{W}_{i-j},$$

де $\mathcal{W}_m = w_m - A_m x - B_m$, а сталі A_m, B_m є компонентами вектора

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \Upsilon^{-1} \begin{pmatrix} (w_m, 1)_{L_2(\rho, I)} \\ (w_m, x)_{L_2(\rho, I)} \end{pmatrix}.$$

Тоді функцію u_i знаходимо з задачі

$$\begin{gathered}
Lu_i - \lambda_0 \rho u_i = \lambda_i \rho u_0 + \rho \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_{i-j}, \quad x \in I_1 \cup I_2, , \\
B_{11} u_i = B_{12} u_i = 0, \quad B_{21} u_i = B_{22} u_i = 0, \\
\{u_i'\}_- = \{\mathcal{W}_i'\}_-, \qquad \{u_i\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{u_i'\}_+ = \{\mathcal{W}_i\}_- - \frac{c_2 - c_1}{2}\{\mathcal{W}_i'\}_+, \\
Fu_i - \lambda_0 \Upsilon \mathcal{F} u_i = \lambda_i \Upsilon \mathcal{F} u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \Upsilon \mathcal{F} u_{i-j} - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \Upsilon \mathcal{F} \mathcal{W}_{i-j}.
\end{gathered} \tag{29}$$

Рівність

$$\begin{aligned}
\lambda_i = \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j (\Upsilon \mathcal{F} \mathcal{W}_{i-j}, \mathcal{F} u_0)_{\mathbb{R}^2} &+ 2^{-1}\left(\{\mathcal{W}_i\}_- \right.\\
&\left. -2^{-1}(c_2 - c_1)\{\mathcal{W}_i'\}_+\right)\{l_3 u_0\}_+ - 2^{-1}\{\mathcal{W}_i'\}_-\{l_2 u_0\}_+
\end{aligned}$$

є умовою існування розв'язку задачі (29). Тоді функцію u_1 підпорядковуємо умові $(\mathcal{J}_2 u_i, \mathcal{J}_2 u_0)_{\mathcal{H}_2} = 0$. Сталі A_i, B_i одержуємо з (27). Фіксуємо розв'язок $\mathcal{W}_{i+1}$ задачі (28), який задовольняє умови $(\mathcal{W}_{i+1}, 1)_{L_2(\rho, I)} = 0$, $(\mathcal{W}_{i+1}, x)_{L_2(\rho, I)} = 0$. Тоді $w_{i+1} = \mathcal{W}_{i+1} + A_{i+1} x + B_{i+1}$, де A_{i+1}, B_{i+1} – довільні сталі. Індукцію закінчено.

Отже, ми знайшли усі коефіцієнти розвинень (5) у випадку $r = 2$. Розглянемо часткові суми цих рядів

$$\Lambda_N^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \lambda_j, \qquad U_N^\varepsilon(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} u_j(x)\, \varepsilon^j, & x \in I_1 \cup I_2, \\ \sum\limits_{j=0}^{N} w_j(x)\, \varepsilon^j, & x \in I. \end{cases}$$

Теорема 3. *Нехай $k_0 = k_1 = 0$ на інтервалі I, а λ_0 є простим власним значенням задачі (23). Тоді існують власне значення λ_ε та власна функція u_ε задачі (1)-(4) такі, що виконуються оцінки*

$$|\lambda_n^\varepsilon - \Lambda_N^\varepsilon| \leqslant C_1(N)\varepsilon^{N+1}, \quad \|u_n^\varepsilon - U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \leqslant C_2(N)\varepsilon^{N+1},$$

де $\|u_n^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} = \|U_N^\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Omega)} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Сталі $C_1(N)$ і $C_2(N)$ не залежать від ε.

---

1. *J. L. Lions* Perturbations singulières dans les problèmes aus limites et en contrôle optima. – Lect. Notes in Math. – Springer. – 1973. – Vol. 323.
2. *Г. П. Панасенко* Асимптотика решений и собственных значений эллиптических уравнений с сильно изменяющимися коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 252.– С. 1320–1324.
3. *P. Gibert* Less basses et les moyennes fréquencies dans des structures fortement hétérogenes // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser II. – 1982. – Vol. 295. – P. 951-954.
4. *G. Geymonat, E. Sanchez-Palencia* Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics // Math. Meth. Appl. Sci. – 1982. – Vol.4. – P. 291-306.
5. *G. Geymonat, M. Lobo Hidalgo, E. Sanchez-Palencia* Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics, Part II // Proc. of the Centre for the Mathematical Analysis, Australian National Univ. – 1984. – Vol. 5. – P. 15–38.
7. *J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia* Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods. – Springer-Verlag, 1989.
8. *E. Sanchez-Palencia* Asymptotic and spectral properties of a class of singular – stiff problems // J. Math. Pures Appl. – 1992. – Vol. 71. – P. 379–406.
9. *M. Lobo Hidalgo, E. Sanchez-Palencia* Low and high frequency vibration in stiff problems // Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, in De Giorgi 60th Birthday. – Birkhaüser. – 1990. – Vol.2. – P. 729–742.
10. *M. Lobo, E. Perez* High frequency vibrations in a stiff problem // Math. Methods. Appl. Sci. – 1997. – Vol 7. – N 2. – P. 291–311.
11. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Докл. АН. – 1993 – Т. 133. – N 1. – С. 13-15.
12. *N. O. Babych, Yu. D. Golovaty* Complete WKB asymptotics of high frequency vibrations in a stiff problem // Матем. студії. – 2000. – Т.14. – N 1. – С. 59–72.
13. *Г. В.Розенблюм, М. З. Соломяк, М. А. Шубин* Спектральная теория дифференциальных операторов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. – 1989. – Т. 64. – С. 1–242.

DECOMPOSITION OF LOW FREQUENCY EIGENVIBRATIONS IN STIFF PROBLEM

N. Babych

Ivan Franko National University of Lviv

The stiff problem here considered models vibrations of a non-homogeneous rod. One of the parts is very stiff with respect to the others. We study the asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem. We construct and justify complete asymptotic expansions of low frequency eigenvibrations.

Key words: *spectral problem, asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions.*

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2000

Прийнята до друку 28.12.2000