ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.109–117

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.109–117

УДК 517.95

ПЕРША МІШАНА ЗАДАЧА, ЗАДАЧІ КОШІ ТА ФУР'Є ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ БЕЗ УМОВ НА БЕЗМЕЖНОСТІ

Микола Бокало
Львівський національний університет імені Івана Франка

У цій праці досліджено крайові задачі для напівлінійних параболічних рівнянь загального вигляду, які задані в необмежених областях. Отримано умови на коефіцієнти рівняння, за яких є правильними твердження про єдиність та існування класичного розв'язку цих задач без будь-яких припущень на геометрію області, поведінку розв'язку та зростання вихідних даних при $|x| \to +\infty$ і $t \to -\infty$. Знайдено оцінку розв'язку та доведено деякі його властивості. Відзначимо, що аналогічні результати подібним способом для вужчих класів напівлінійних параболічних рівнянь одержані в [1-3]. У цих працях можна знайти детальнішу бібліографію стосовно досліджуваних проблем.

1. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай Q – необмежена область у просторі $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, яка лежить у смузі $\{T_0 < t < T_1\}$, де $T_0 \geqslant -\infty, T_1 \leqslant +\infty$, і її перетини гіперплощинами $\{t = \tau\}$ непорожні для будь-яких $\tau \in (T_0, T_1)$. Припустимо, що $\partial Q = \Sigma \cup \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_1}$, де Σ – поверхня, яка лежить у смузі $\{T_0 < t < T_1\}$, а Ω_0 (Ω_1) – область на гіперплощині $\{t = T_0\}$ ($\{t = T_1\}$), якщо $T_0 > -\infty$ ($T_1 < +\infty$), і $\Omega_0 = \varnothing$ ($\Omega_1 = \varnothing$), якщо $T_0 = -\infty$ ($T_1 = +\infty$). Нехай $\Gamma(Q) = \overline{\Sigma} \cup \overline{\Omega_0}$ – параболічна частина межі ∂Q області Q.

Розглянемо задачу

$$u_t - a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t,u) = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q \ , \tag{1}$$

$$u = h \quad \text{на} \quad \Gamma(Q) \ . \tag{2}$$

Тут і далі припускатимемо, що за індексами, які повторюються, ведеться підсумовування від 1 до n, а на вихідні дані накладено такі умови:

(A) $a_{ij} \in C(Q)$ $(i,j = \overline{1,n})$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$ $(i,j = \overline{1,n}; (x,t) \in Q)$; $a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant 0$ для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^n$ і всіх $(x,t) \in Q$;

(B) $b_i \in C(Q)$ $(i = \overline{1,n})$ і $b_i(x,t)x_i \geqslant 0$ для всіх $(x,t) \in Q$;

(C) функція $c(x,t,s)$ – неперервна на $Q \times \mathbb{R}$ і $c(x,t,0) = 0$;

(D) $f \in C(Q)$, $h \in C(\Gamma(Q))$.

Означення 1. *Класичним розв'язком задачі (1),(2) назвемо функцію* $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, *яка при підстановці її в рівняння (1) перетворює його в тотожність та задовольняє умову (2).*

Відзначимо, що задача (1),(2) є:

(a) першою мішаною задачею, якщо $T_0 > -\infty$ і $\Sigma \neq \varnothing$;

(б) задачею Коші, якщо $T_0 > -\infty$ і $\Sigma = \varnothing$;
(в) задачею Фур'є (задачею без початкових умов), якщо $T_0 = -\infty$.

Спочатку сформулюємо теорему про єдиність розв'язку.

Теорема 1. *Нехай для будь-яких s_1 , $s_2 \in \mathbb{R}$ і всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність*

$$(c(x,t,s_1) - c(x,t,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant \mu(x,t)|s_1 - s_2|^{\gamma+1}, \tag{3}$$

де $\gamma > 1$, а μ - додатна на Q функція, яка для будь-якого числа $t_0 \in (T_0, T_1]$ задовольняє умову

$$\sup_{Q\cap P_{R,t_0}} [1 + \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|]\mu^{-1}(x,t) = o(1)R^2 \quad \text{при} \quad R \to +\infty \ , \tag{4}$$

де

$$P_{R,t_0} = \{(x,t) : |x|^2 + |t - t_0| < R^2, t \leqslant t_0\}$$

- обмежений параболоїд.

Тоді класичний розв'язок задачі (1),(2) єдиний.

Зауваження 1. Умови теореми 1 виконуються, коли функція $c(x,t,s)$ - диференційовна за s і $c'_s(x,t,s) \geqslant k|s|^{\gamma-1}$ для будь-яких $s \in \mathbb{R}$ і всіх $(x,t) \in Q$, де $\gamma > 1$, $k = \text{const} > 0$, наприклад, $c(x,t,s) = k|s|^{\gamma-1}s$ (доведення див. в [4, с.15]).

Зауваження 2. Умова $\gamma > 1$ суттєва. Це засвідчує приклад задачі Коші для рівняння $u_t - \Delta u + u = f$, для якого виконуються всі умови теореми 1, крім умови $\gamma > 1$, замість якої маємо $\gamma = 1$. Як випливає з [5], ця задача має нескінченну кількість розв'язків, якщо не накласти додаткових умов на поведінку розв'язків на безмежності.

Перейдемо до теореми існування розв'язку. Спочатку введемо потрібні нам позначення . Нехай $\alpha \in (0,1)$, D – область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Під $\overline{C}_\alpha(D)$ розуміємо (див. [6, с. 83]) простір функцій, які визначені на D і задовольняють умову Гельдера в D з показниками α за змінною x і $\alpha/2$ за змінною t, а під $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ – простір функцій, які належать $\overline{C}_\alpha(D)$ разом із своїми похідними першого порядку за t і до другого порядку за x включно. Через $\overline{C}_{\alpha,\text{loc}}(Q)$ ($\overline{C}_{2+\alpha,\text{loc}}(Q)$) позначимо простір функцій, звуження яких на будь-яку обмежену (не обов'язково строго внутрішню) підобласть D області Q належить $\overline{C}_\alpha(D)$ ($\overline{C}_{2+\alpha}(D)$). Під $\overline{C}_{1-0}(D)$ розумітимемо (див. [6, с.237]) простір функцій, які визначені та задовольняють умову Ліпшиця в D, а під $\overline{C}_{2-0}(D)$ – простір функцій, які належать $\overline{C}_{1-0}(D)$ разом зі своїми похідними першого порядку за x. Через $\overline{C}_{1-0,\text{loc}}(Q)$ ($\overline{C}_{2-0,\text{loc}}(Q)$) позначимо простір визначених на Q функцій, звуження яких на будь-яку обмежену підобласть D області Q належить $\overline{C}_{1-0}(D)$ ($\overline{C}_{2-0}(D)$).

Скажемо, що поверхня Σ, яка лежить в просторі $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, належить класу $\overline{C}_{2+\alpha}$ ($\overline{C}_{2-0}$), якщо для будь-якої точки $(x^0, t_0) \in \Sigma$ існує її повний окіл $V(x^0, t_0)$ і число $k \in \{1, ..., n\}$ таке, що кусок поверхні $\Sigma \cap V(x^0, t_0)$ зображається у вигляді

$$x_k = g_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n, t), \quad (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n, t) \in B_k,$$

де B_k – область на гіперплощині $\{x_k = 0\}$, $g_k \in \overline{C}_{2+\alpha}(B_k)$ ($g_k \in \overline{C}_{2-0}(B_k)$).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і*

(E1) для довільних $(x,t) \in Q$ *і всіх* $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(t)|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda^{-1}(t)|\xi|^2,$$

де $\lambda \in C([T_0,T_1]), \lambda(t) > 0$ *для всіх* $t \in [T_0,T_1]$ *(якщо* $T_0 = -\infty$*, то може бути* $\lambda(t) \to 0$ *при* $t \to -\infty$ *) ;*

(E2) $a_{ij}, b_i,\ f \in \overline{C}_{\alpha,\mathrm{loc}}(Q)$ *для деякого* $\alpha \in (0;1)$ *і, крім того,* $a_{ij} \in \overline{C}_{1-0,\mathrm{loc}}(Q)$ $(i,j = \overline{1,n})$*;*

(E3) для довільної обмеженої підобласті D *області* Q *і довільного відрізка* $[a,b]$ *числової осі звуження функції* $c(x,t,s)$ *на* $D \times [a,b]$ *є неперервним за Гельдером;*

(E4) функцію h *можна неперервно продовжити на* Q *так, щоб це продовження належало простору* $\overline{C}_{2+\delta,\mathrm{loc}}(Q)$*, де* $\alpha < \delta < 1$*, і, якщо* $T_0 > -\infty$*, то виконувалася умова узгодження першого порядку, тобто*

$$h_t - a_{ij}h_{x_ix_j} + b_ih_{x_i} + c(x,t,h) = f, \quad x \in \partial\Omega_0,\ t = T_0;$$

(E5) $\Sigma \in C_{2-0} \cap \overline{C}_{2+\alpha}$ *і* $\cos(\nu,t) \neq \pm$*, де* ν *– зовнішня одинична нормаль до* Σ*.*

Тоді існує (єдиний) класичний розв'язок задачі (1),(2) і він належить простору $\overline{C}_{2+\beta,\mathrm{loc}}(Q)$ *при деякому* $\beta \in (0,1)$*. Крім того, для довільного компакта* $K \subset \overline{Q}$ *існує компакт* $K_* \subset \overline{Q}$ *такий, що* $K \subset K_*$ *і*

$$\max\nolimits_{(x,t)\in K} |u(x,t)| \leqslant L,$$

де L *– додатна стала, яка залежить від* n, γ, K, K_* *і звужень вихідних даних на* K_**.*

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 2 і*

$$f(x,t) \geqslant 0 \quad \forall (x,t) \in Q, \quad h(x,t) \geqslant 0 \quad \forall (x,t) \in \Gamma(Q).$$

Тоді розв'язок задачі (1), (2), про який йдеться в теоремі 2, невід'ємний.

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 2 і*

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma(Q)} |h(x,t)| \leqslant C_1, \quad \sup_{(x,t)\in Q} |f(x,t)|/\mu(x,t) \leqslant C_2,$$

де $C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0$*.*

Тоді розв'язок задачі (1),(2), про який йдеться в теоремі 2, обмежений на Q*, причому*

$$|u(x,t)| \leqslant \max\{ \sup_{(x,t)\in\Gamma(Q)} |h(x,t)|; \quad \sup_{(x,t)\in Q} [\,|f(x,t)|/\mu(x,t)\,]^{1/\gamma}\}.$$

Позначимо через e^k вектор простору $\mathbb{R}^n$, k-а компонента якого дорівнює 1, а решта – дорівнюють нулю.

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 та існують числа* $\omega > 0$ *і* $k \in \{1,...,n\}$ *такі, що*

1) якщо $(x,t) \in Q$*, то* $(x \pm \omega e^k, t) \in Q$*;*

2) $c(x+\omega e^k,t,s) = c(x,t,s)$ *для всіх* $(x,t,s) \in Q \times \mathbb{R}^1$*;*

3)$f(x+\omega e^k,t) = f(x,t), \quad h(x+\omega e^k,t) = h(x,t)$ *для всіх* $(x,t) \in Q$*.*

Тоді розв'язок задачі (1),(2), про який йдеться в теоремі 2, є періодичним за змінною x_k *з періодом* ω*.*

Наслідок 4. *Нехай виконуються умови теореми 2 і* $T_0 = -\infty, T_1 = +\infty$. *Крім того, існує число* $\sigma > 0$ *таке, що*

1) $c(x, t + \sigma, s) = c(x, t, s)$ *для всіх* $(x, t, s) \in Q \times \mathbb{R}^1$;

2) $f(x, t + \sigma) = f(x, t)$, $h(x, t + \sigma) = h(x, t)$ *для всіх* $(x, t) \in Q$.

Тоді розв'язок задачі (1),(2), про який йдеться в теоремі 2, є періодичним за змінною t *з періодом* σ.

2. Допоміжне твердження. Важливу роль при доведенні теорем 1 і 2 відіграватиме така лема.

Лема 1. *Нехай* $R > 0, t_0 \in (T_0, T_1]$ *– довільні числа, а функції* $u_1, u_2 \in C(\overline{Q} \cap P_{R,t_0}) \cap C^{2,1}(Q \cap P_{R,t_0})$ *перетворюють рівняння (1) в тотожність на* $Q \cap P_{R,t_0}$ *і збігаються на* $\Gamma(Q) \cap P_{R,t_0}$. *Тоді*

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant V(x,t;t_0,R) \quad \forall (x,t) \in Q \cap P_{R,t_0}, \tag{5}$$

де

$$V(x,t;t_0,R) = \frac{\eta(t_0,R)R^{\varkappa}}{[R^2 - |x|^2 - |t-t_0|]^{\varkappa}}, \varkappa = 2/(m-1), \tag{6}$$

$$\eta(t_0,R) = \sup_{P_{R,t_0} \cap Q} \left(\frac{\varkappa[1 + 2\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ii}(x,t)| + 4(\varkappa+1)\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|]}{\mu(x,t)} \right)^{\varkappa/2}.$$

Доведення. (Ідея доведення взята з праць [1,2].) Підставляючи в рівняння (1) по черзі u_1 та u_2 замість u і віднімаючи отримані рівності, матимемо рівність

$$w_t - a_{ij}(x,t)w_{x_i x_j} + b_i(x,t)w_{x_i} + (c(x,t,u_1) - c(x,t,u_2)) = 0, \quad (x,t) \in Q \cap P_{R,t_0}, \tag{7}$$

де $w = u_1 - u_2$.

Із (7) випливає

$$w_t - a_{ij}w_{x_i x_j} + b_i w_{x_i} + \mu|w|^{m-1}w +$$
$$+[(c(x,t,u_1) - c(x,t,u_2)) - \mu|w|^{m-1}w] = 0, \quad (x,t) \in Q \cap P_{R,t_0}. \tag{8}$$

Функція V, що легко безпосередньо перевірити, задовольняє нерівність

$$V_t - a_{ij}V_{x_i x_j} + b_i V_{x_i} + \mu V^m \geqslant 0, \quad (x,t) \in Q \cap P_{R,t_0}. \tag{9}$$

Далі, якщо це не буде сумнівним, писатимемо P і V замість відповідно P_{R,t_0} и $V(x,t;t_0,R)$.

Віднімаючи від рівності (8) нерівність (9), одержимо

$$(w-V)_t - a_{ij}(w-V)_{x_i x_j} + b_i(w-V)_{x_i} + \mu(|w|^{m-1}w - |V|^{m-1}V) +$$
$$+[(c(x,t,u_1) - c(x,t,u_2)) - \mu|w|^{m-1}w] \leqslant 0, \quad (x,t) \in Q \cap P. \tag{10}$$

Покажемо, що з (10) випливає нерівність $w(x,t) \leqslant V(x,t;t_0,R)$ на $Q \cap P$. Справді, припустимо, що це не так. Позначимо через M множину точок $(x,t) \in Q \cap P$ таких, що $w(x,t) > V(x,t;t_0,R)$. Оскільки w неперервна на $\overline{Q \cap P}$, $w = 0$ на $\Gamma(Q) \cap P$, а $V(x,t) > 0$ на P і $V(x,t) \to +\infty$, коли $\mathrm{dist}((x,t),S) \to 0$, де $S = \partial P \bigcap \{t < t_0\}$, то множина M перебуває на додатній відстані від поверхні $\sigma = \partial(Q \bigcap P) \bigcap \{t < t_0\}$. Звідси випливає, що функція $w - V$ є неперервною на

$\overline{M}$ і приймає найбільше на $\overline{M}$ значення в деякій точці $(x_1, t_1) \in Q \cap P$. Міркуючи аналогічно, як при доведенні принципу максимуму для параболічних рівнянь (див.[6]), отримаємо

$$(w-V)_t|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0, \quad (w-V)_{x_i}|_{(x_1,t_1)} = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \quad a_{ij}(w-V)_{x_ix_j}|_{(x_1,t_1)} \leqslant 0. \tag{11}$$

Оскільки

$$w(x_1,t_1) > V(x_1,t_1;t_0,R) > 0 \tag{12}$$

і функція $|\lambda|^{m-1}\lambda$ строго зростаюча, то

$$\mu(|w|^{m-1}w - |V|^{m-1}V)|_{(x_1,t_1)} > 0. \tag{13}$$

Враховуючи нерівності (3) і $u_1(x_1,t_1) > u_2(x_1,t_1)$ (оскільки $u_1(x_1,t_1) - u_2(x_1,t_1) > V(x_1,t_1;t_0,R) > 0$), маємо

$$[(c(x,t,u_1) - c(x,t,u_2)) - \mu|w|^{m-1}w]|_{(x_1,t_1)} =$$

$$= [\frac{(c(x,t,u_1)-c(x,t,u_2))}{u_1-u_2} - \mu|w|^{m-1}]|_{(x_1,t_1)}w(x_1,t_1) \geqslant 0. \tag{14}$$

З (11)-(14) випливає, що ліва частина нерівності (10) в точці (x_1,t_1) приймає додатне значення. Ми прийшли до протиріччя. Отже, виконується нерівність

$$w(x,t) \leqslant V(x,t;t_0,R) \quad \text{на} \quad Q \cap P. \tag{15}$$

Цілком аналогічно доводиться, що

$$-w(x,t) \leqslant V(x,t;t_0,R) \quad \text{на} \quad Q \cap P. \tag{16}$$

З (15) і (16) очевидно випливає (5). Отже, лему 1 доведено.

3. Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. Нехай u_1, u_2 – два класичних розв'язки задачі (1),(2), а (x_0,t_0) – довільна точка області Q. З леми 1 випливає, враховуючи (6), що для довільних $R > |x_0|$

$$|u_1(x_0,t_0) - u_2(x_0,t_0)| \leqslant V(x_0,t_0;t_0,R) = \eta(t_0,R)\,R^\alpha\,[R^2 - |x_0|^2]^{-\alpha}. \tag{17}$$

З (4) випливає, що $\eta(t_0,R) = o(1)R^\varkappa$ при $R \to +\infty$. Врахувавши це, перейдемо в (17) до границі при $R \to +\infty$. Одержимо $|u_1(x_0,t_0) - u_2(x_0,t_0)| = 0$ звідки і випливає наше твердження. Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Нехай $\{Q_m\}$ – послідовність обмежених підобластей Q_m області Q , яка задовольняє такі умови:

(F1) для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ виконується включення $Q_m \subset Q_{m+1}$ і $\operatorname{dist}(\partial Q_m \setminus \partial Q, \partial Q_{m+1} \setminus \partial Q) > 0$, $\operatorname{dist}(\partial Q_m \setminus \partial Q, O) \to +\infty$ при $m \to +\infty$, де O – початок координат;

(F2) $\partial Q_m = \Sigma_m \cup \overline{\Omega_{m,0}} \cup \overline{\Omega_{m,1}}$, де Σ_m – поверхня класу $\overline{C}_{2+\alpha} \cap \overline{C}_{2-0}$ така, що $\cos(\nu,t) \neq \pm 1$ на Σ_m, де ν – зовнішня одинична нормаль до Σ_m; $\Omega_{m,0}$ – область на гіперплощині $\{t = t_m\}$, де $t_m = T_0$, якщо $T_0 > -\infty$, і $t_m > -\infty$, якщо $T_0 = -\infty$; $\Omega_{m,1}$ – область на гіперплощині $\{t = \tau_m\}$, де $\tau_m = T_1$, якщо $T_1 < +\infty$, і $\tau_m < +\infty$, якщо $T_1 = +\infty$;

(F3) $Q = \bigcup\limits_{m\in N} Q_m$.

Для кожного $m \in N$ приймемо $\Gamma(Q_m) = \overline{\Sigma_m} \cup \overline{\Omega_{m,0}}$. Виберемо послідовності функцій $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що $f_m \in \overline{C}_\alpha(Q_{m+1})$, $f_m(x,t) = f(x,t)$ на Q_m і $h_m \in \overline{C}_{2+\delta}(Q_{m+1})$, $h_m(x,t) = h(x,t)$ на $\Gamma(Q) \cap \Gamma(Q_m)$, причому

$$h_{mt} - a_{ij}h_{mx_ix_j} + b_ih_{mx_i} + c(x,t,h_m) = f_m, \quad x \in \partial\Omega_{m+1,0}, \ t = t_{m+1},$$

$$\sup_{\Gamma(Q_{m+1})} |h_m| \leqslant \sup_{\Gamma(Q)\cap\Gamma(Q_m)} |h|, \quad \sup_{Q_{m+1}} |f_m| \leqslant \sup_{Q_{m+1}} |f|$$

для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо сім'ю задач

$$u_{mt} - a_{ij}(x,t)u_{mx_ix_j} + b_i(x,t)u_{mx_i} + c(x,t,u_m) = f_m(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{m+1}\ , \tag{1_m}$$

$$u_m = h_m \quad \text{на} \quad \Gamma(Q_{m+1})\ . \tag{2_m}$$

Означення 2. *Класичним розв'язком задачі* $(1_m),(2_m)$ *назвемо функцію* $u_m \in C(\overline{Q_{m+1}}) \cap C^{2,1}(Q_{m+1})$, *яка задовольняє рівняння* (1_m) *в* Q_{m+1} *та умову* (2_m).

Існування класичного розв'язку u_m задачі $(1_m),(2_m)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$ випливає з теореми 4.9 [6, розд. VII], зауваження 1 [6, с.252] і твердження, доведення якого наведено нижче.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для довільного* $m \in \mathbb{N}$ *розв'язок* u_m *задачі* $(1_m),(2_m)$ *задовольняє оцінку*

$$\min\{0; \inf_{\Gamma(Q_{m+1})} h_m(x,t); -\sup_{Q_{m+1}} [(f_m(x,t))^-/\mu(x,t)]^{1/\gamma}\} \leqslant u_m(x,t) \leqslant$$

$$\leqslant \max\{0; \sup_{\Gamma(Q_{m+1})} h_m(x,t); \sup_{Q_{m+1}} [(f_m(x,t))^+/\mu(x,t)]^{1/\gamma}\} \tag{18}$$

(тут використано позначення $(s)^+ = \max\{0; s\}$, $(s)^- = -\min\{0; s\}$.)

Довизначимо u_m нулем на множині $\overline{Q} \setminus \overline{Q}_{m+1}$ і отримані функції позначимо знову через u_m. Покажемо, що послідовність $\{u_m\}$ збігається рівномірно на довільному компакті з $\overline{Q}$.

Нехай K – будь-який компакт, який належить $\overline{Q}$. Тоді існують числа $t_0 \in (T_0, T_1]$ і $r > 0$ такі, що $K \subset P_{r,t_0}$. Виберемо число $l \in \mathbb{N}$, для якого справджується включення $Q \cap P_{2r,t_0} \subset Q_l$. Для довільних $m, k \in \mathbb{N}$ таких, що $m > l$, $k > l$, функції u_m , u_k перетворюють рівняння (1) в рівність на Q_l і збігаються на $\Gamma(Q) \cap \partial Q_l$. Як випливає з леми 1, правильна нерівність

$$|u_m(x,t) - u_k(x,t)| \leqslant V(x,t;t_0,R), \quad (x,t) \in Q \cap P_{R,t_0}, \tag{19}$$

для всіх R , $0 < R < R_l$, де R_l – найбільше з чисел R таких, що $Q \cap P_{R,t_0} \subset Q_l$. З (6) і (19) одержуємо оцінку

$$|u_m(x,t) - u_k(x,t)| \leqslant \eta(t_0,R)R^{\varkappa}[R^2 - r^2]^{-\varkappa} \tag{20}$$

для всіх $(x,t) \in K$ і $R \in (r, R_l)$. Праву частину нерівності (20) можна зробити як завгодно малою, вибравши досить велику величину R. Отже (див. (F1),(F2)), для довільного наперед вибраного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти $l \in \mathbb{N}$ таке, що при $m > l$, $k > l$, правильна нерівність

$$|u_m(x,t) - u_k(x,t)| \leqslant \varepsilon \tag{21}$$

для всіх $(x,t) \in K$. Це означає, що послідовність $\{u_m\}$ фундаментальна в просторі $C(K)$ і, отже, збігається рівномірно на K. Отже, існує неперервна на $\overline{Q}$ функція u, до якої збігається послідовність $\{u_m\}$ рівномірно на довільному компакті, що належить $\overline{Q}$.

Покажемо, що u належить простору $C^{2,1}(Q)$ і задовольняє рівняння (1). Нехай Q' – довільна внутрішня обмежена підобласть області Q. З обмеженості послідовності $\{u_m\}$ на довільному компакті з $\overline{Q}$ і результатів праці [6] випливає оцінка

$$\|u_m\|_{\overline{C}_{2+\beta}(Q')} \leqslant C_1, \tag{22}$$

де m – будь-яке натуральне число таке, що $\overline{Q'} \subset Q_m$, $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від m. З (22) і теореми Арцела-Асколі випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}$, яка збігається до u за нормою $C^{2,1}(\overline{Q'})$. Отож, функція $u(x,t)$ належить (див. [6]) простору $\overline{C}_{2+\beta}(Q')$ і задовольняє (див. (1_m)) рівняння (1) в Q'. Звідси та з довільності Q' випливає, що u є класичним розв'язком рівняння (1) в Q.

Виконання умови (2) для u очевидне. Єдиність отриманого розв'язку випливає з теореми 1. Звідси, зокрема, випливає, що вся послідовність $\{u_m\}$ разом з похідними до другого порядку за x і першого порядку за t рівномірно збігається до u на довільній внутрішній обмеженій підобласті Q' області Q. Оцінку розв'язку u одержимо з нерівності (21), переходячи в ній до границі при $k \to +\infty$ і враховуючи (18). Теорему 2 доведено.

Доведення леми 2. Нехай (x_0,t_0) – точка глобального максимуму функції u_m на $\overline{Q_{m+1}}$, тобто $u_m(x_0,t_0) = \sup\limits_{\overline{Q}_{m+1}} u_m(x,t)$. Може бути один з трьох випадків: 1) $u_m(x_0,t_0) \leqslant 0$; 2)$(x_0,t_0) \in \Gamma(Q_{m+1})$; 3) $(x_0,t_0) \in Q_{m+1} \bigcup \Omega_{(m+1)1}$ і $u(x_0,t_0) > 0$.

У перших двох випадках друга з нерівностей (18) очевидна. Розглянемо третій випадок. Міркуючи аналогічно, як при доведенні принципу максимуму (див., наприклад, [6, с.52]), одержимо

$$u_{mt}(x_0,t_0) \geqslant 0, \quad u_{mx_i}(x_0,t_0) = 0 \ (\ i = \overline{1,n}), \quad a_{ij}(x_0,t_0)u_{mx_ix_j}(x_0,t_0) \leqslant 0. \tag{23}$$

Зауваживши, що згідно з (3)

$$c(x,t,s) \geqslant \mu(x,t)s^\gamma \quad \forall s > 0,$$

приходимо до нерівності

$$c(x_0,t_0,u_m(x_0,t_0)) \geqslant \mu(x_0,t_0)u^\gamma(x_0,t_0). \tag{24}$$

З (1_m), (23) і (24) одержимо

$$0 \leqslant \mu(x_0,t_0)u_m^\gamma(x_0,t_0) \leqslant f_m(x_0,t_0),$$

звідки

$$u_m(x_0,t_0) \leqslant [f_m(x_0,t_0)/\mu(x_0,t_0)]^{1/\gamma}.$$

Отже, друга з нерівностей (18) (в третьому випадку) доведена.

Нехай (x_1,t_1) – точка глобального мінімуму функції u_m на $\overline{Q_{m+1}}$, тобто $u_m(x_1,t_1) = \min\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{m+1}} u_m(x,t)$. Можливий один з випадків: 1)$u_m(x_1,t_1) \geqslant 0$;2)$(x_1,t_1) \in \Gamma(Q_{m+1})$; 3) $(x_1,t_1) \in Q_{m+1} \bigcup \Omega_{(m+1)1}$ і $u(x_1,t_1) < 0$.

У випадках 1 і 2 перша з нерівностей (18) очевидна. Розглянемо випадок 3. Міркуючи аналогічно як вище, одержуємо

$$u_{mt}(x_1,t_1) \leqslant 0, \quad u_{mx_i}(x_1,t_1) = 0 \ (i=\overline{1,n}), \quad a_{ij}(x_1,t_1)u_{mx_ix_j}(x_1,t_1) \geqslant 0. \tag{25}$$

В силу (3)

$$c(x,t,s) \leqslant -\mu(x,t)(-s)^\gamma \quad \forall s<0,$$

звідки

$$c(x_1,t_1,u_m(x_1,t_1)) \leqslant -\mu(x_1,t_1)(-u_m(x_1,t_1))^\gamma. \tag{26}$$

З (1_m), (25) і (26) одержуємо

$$0 \geqslant -\mu(x_1,t_1)(-u_m(x_1,t_1))^\gamma \geqslant f(x_1,t_1),$$

тобто

$$(-u_m(x_1,t_1))^\gamma \leqslant -f(x_1,t_1)/\mu(x_1,t_1).$$

Звідси випливає нерівність

$$u_m(x_1,t_1) \geqslant -[-f(x_1,t_1)/\mu(x_1,t_1)]^{1/\gamma}.$$

Отже, першу нерівність (у третьому випадку) доведено.

Доведення наслідку 1. Відбираючи послідовності функцій $\{f_m\},\{h_m\}$, простежимо за тим, щоб виконувались нерівності $f_m(x,t) \geqslant 0 \ \forall (x,t) \in Q, h_m(x,t) \geqslant 0 \forall (x,t) \in \Gamma(Q_{m+1})$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тоді з леми 2 випливає, що $u_m(x,t) \geqslant 0$ на Q. Звідси і з того факту, що розв'язок u є границею рівномірно збіжної на будь-якому компакті з $\overline{Q}$ послідовності $\{u_m\}$, випливає нерівність $u(x,t) \geqslant 0$ на Q. Наслідок 1 доведено.

Доведення наслідку 2. Це твердження безпосередньо випливає з леми 2 і того факту, що розв'язок u є границею рівномірно збіжної на довільному компакті з $\overline{Q}$ послідовності $\{u_m\}$.

Доведення наслідку 3. Нехай u – розв'язок задачі (1), (2), про який йдеться в теоремі 2. Підставимо його в рівняння (1) і зробимо в одержаній нерівності заміну змінної x_k на $x_k+\omega e^k$. В результаті, враховуючи умови 1)-3) і рівність $c(x+\omega e^k,t,u(x+\omega e^k,t)) = c(x,t,u(x+\omega e^k,t))$ для довільних $(x,t) \in Q$, отримуємо, що $u(x+\omega e^k,t)$ є класичним розв'язком задачі (1),(2). На підставі теореми 1 матимемо рівність $u(x+\omega e^k,t) = u(x,t)$ на Q.

Доведення наслідку 4. Доводиться аналогічно як наслідок 3.

---

1. *Brezis H.* Semilinear equations in R^N without condition at infinity // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol.12. – P.271-282.
2. *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости задачи без начальных условий для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т.34. – N 4. – С.33-40.
3. *Бокало Н.М.* Краевые задачи для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности// Сиб. мат. журн. – 1996. – Т.37. – N 5. – С.977-985.

4. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. М., – 1989. – Вып.14. – С.3-40.
5. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – N 2. – С.199-216.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.

THE FIRST MIXED PROBLEM, THE CAUCHY PROBLEM AND THE FOURIER PROBLEM FOR SEMI-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITHOUT ANY CONDITIONS AT INFINITY

M. Bokalo

Ivan Franko National University of Lviv

We established the conditions on the coefficients of semi-linear parabolic equations defined in unbounded domains under which the unique classic solutions of corresponding boundary problems for these equations exist. No conditions on geometry of domain, behaviour of solution and increasing of data-in at the infinity. We found the estimates and proved some properties of the solutions of investigating problems.

Key words: *parabolic equation, boundary problems.*

Стаття надійшла до редколегії 26.06.2000

Прийнята до друку 28.12.2000