ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.118–128 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.118–128*

УДК 517.95

ПРО АСИМПТОТИКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ПЛАСТИНИ З ЛОКАЛЬНИМ ЗБУРЕННЯМ КОЕФІЦІЄНТА ЖОРСТКОСТІ

Юрій Головатий, Анатолій Лавренюк
Львівський національний університет імені Івана Франка

Жорсткі задачі (цей термін запропонував Ж.Л.Ліонс [1], фр. problémes raides, англ. stiff problems) – це задачі для рівнянь із частинними похідними, коефіцієнти яких значно відрізняються в різних частинах області. Відношення коефіцієнтів описується малим параметром ε. Задачі такого типу виникають у багатьох розділах фізики та техніки: при розрахунках теплових полів у ядерних реакторах, у теорії геофільтрації, магнітостатиці та ін. Такі задачі є важливими при дослідженні сильно неоднорідних середовищ, а також як теоретичне обгрунтування наближених методів розв'язування крайових задач в областях із складною геометрією границі. У праці [1] розроблено методику дослідження такого типу задач та побудовано асимптотики розв'язків неоднорідних крайових задач. Також є значний інтерес до спектральних жорстких задач і, зокрема, вперше асимптотичне дослідження власних значень та власних функцій для жорстких спектральних задач провів Г. П. Панасенко [2] і стосувалося еліптичних операторів другого порядку. Інші спектральні жорсткі задачі вивчено в [3-9].

У праці досліджується поведінка спектра коливної системи в просторі $\mathbb{R}^2$ із збуренням жорсткості в околі одновимірного замкненого многовиду. Як коефіцієнт жорсткості, так і розмір частини, на якому вона збурюється, залежать від параметра ε. Побудовані повні асимптотики власних значень та обгрунтовано їх.

1. Формулювання задачі. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з гладкою границею, а γ – гладка замкнена крива без самоперетинів, що міститься в Ω. Вважаємо, що область ω_ε, яка є ε-околом кривої γ, міститься в Ω для всіх $\varepsilon \in (0,1)$. Нехай

$$D_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} q_0(x,y), & (x,y) \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ \varepsilon^m q_1, & (x,y) \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

де функція q_0 є додатною і гладкою, q_1 є додатною сталою і $m \in \mathbb{R}$. Розглянемо в Ω диференціальний оператор четвертого порядку

$$\mathcal{L}_\varepsilon f = 2(1-\sigma)(D_\varepsilon f_{xy})_{xy} + (D_\varepsilon(f_{xx} + \sigma f_{yy}))_{xx} + (D_\varepsilon(f_{yy} + \sigma f_{xx}))_{yy},$$

де σ є коефіцієнтом Пуассона, $-1 < \sigma \leqslant 1/2$.

Вивчатимемо задачу на власні значення

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad \mathcal{D} u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

$$[u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = [(u_\varepsilon)_n]_{\partial\omega_\varepsilon} = [\mathcal{K}_1^\varepsilon u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = [\mathcal{K}_2^\varepsilon u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0. \tag{2}$$

Через $\mathcal{D}u_\varepsilon = 0$ ми позначили крайові умови Діріхле $u_\varepsilon = (u_\varepsilon)_\nu = 0$ на границі $\partial\Omega$, де f_ν є похідною функції f в напрямі зовнішньої нормалі ν, а $[f]_\alpha$ – стрибок значень функції f при переході через криву α. Оператори

$$\mathcal{K}_1^\varepsilon f = D_\varepsilon(f_{nn} + \sigma f_{\tau\tau}),$$
$$\mathcal{K}_2^\varepsilon f = (D_\varepsilon(f_{nn} + \sigma f_{\tau\tau}))_n + 2(1-\sigma)(D_\varepsilon f_{n\tau})_\tau$$

з умов спряження (2) зручно подати в локальних координатах (n,τ) області ω_ε, де τ – натуральний параметр кривої γ, а n – орієнтована відстань до неї вздовж нормалі, $(\tau, n) \in [0,d) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, d – довжина кривої.

Лема 1. *Спектр задачі (1),(2) складається зі зліченної кількості додатних власних значень скінченної кратності з точкою скупчення на* $+\infty$.

Доведення. Задача (1),(2) пов'язана з обмеженим самоспряженим оператором B_ε у просторі Соболєва $H_0^2(\Omega)$, породженим коерцитивною ермітовою формою

$$a_\varepsilon(u,v) = \int\limits_\Omega \Big(2(1-\sigma)D_\varepsilon u_{xy}\overline{v}_{xy} + D_\varepsilon(u_{xx} + \sigma u_{yy})\overline{v}_{xx} + D_\varepsilon(u_{yy} + \sigma u_{xx})\overline{v}_{yy}\Big)dxdy,$$

а саме

$$a_\varepsilon(B_\varepsilon u, v) = (u,v)_{L_2(\Omega)}, \qquad u, v \in H_0^2(\Omega).$$

На просторі $H_0^2(\Omega)$ форма $[a_\varepsilon(u,u)]^{1/2}$ є нормою, еквівалентною стандартній. Компактність оператора B_ε є наслідком компактності вкладення $H_0^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Лема доведена.

Аналіз задачі (1),(2) свідчить про те, що існує сім різних випадків поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ^ε і власних функцій u_ε щодо значень параметра m, а саме $m < 1$, $m = 1$, $1 < m < 3$, $m = 3$, $3 < m < 4$, $m = 4$, $m > 4$. У цій праці ми розглянемо лише три з перелічених випадків. Випадки $m < 1$ і $m = 1$ вивчаються аналогічно, а ситуація, коли $m \geqslant 4$, вимагає інших методів дослідження. Тому її розглянемо в подальших публікаціях.

2. Асимптотика власних значень задачі (1),(2) при $m = 2$. Введемо "швидку" змінну $\xi = n/\varepsilon$. Асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій шукатимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots, \tag{3}$$
$$u_\varepsilon \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots, \quad x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \tag{4}$$
$$u_\varepsilon \sim w_0(\xi,\tau) + \varepsilon w_1(\xi,\tau) + \dots, \quad \xi \in (-1,1), \quad \tau \in [0,d). \tag{5}$$

В області ω_ε оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ має вигляд $\varepsilon^m q_1 \Delta^2$. У координатах (ξ,τ) бігармонічний оператор допускає формальне асимптотичне розвинення

$$\Delta^2_{\xi\tau} \backsim \varepsilon^{-4}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k, \quad \text{де} \quad A_k = \sum_{i=0}^{k} L_i L_{k-i},$$

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \quad L_i = -k^i\xi^{i-1}\frac{\partial}{\partial\xi} + (i-1)k^{i-2}\xi^{i-2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{1}{2}(i-1)(i-2)k^{i-3}k'\xi^{i-2}\frac{\partial}{\partial\tau},$$

де $i \geqslant 1$. Зокрема, $A_0 = \dfrac{\partial^4}{\partial\xi^4}$ та $A_1 = -2k\dfrac{\partial^3}{\partial\xi^3}$. Тут $k = k(\tau)$ – кривина кривої γ.

Використовуючи розвинення в ряд Маклорена за змінною n функцій v_i та їх нормальних похідних, з перших двох умов спряження (2) для рядів (4),(5) одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_{\pm}^{(l,i)}(\tau) \sim \varepsilon^{-l} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{\partial^l w_i}{\partial \xi^l}(\pm 1, \tau), \quad l = 0, 1, \tag{6}$$

де $P_+^{(l,i)}(\tau) = \sum\limits_{j=0}^{i} \frac{1}{j!} \frac{\partial^{j+l} v_{i-j}}{\partial n^{j+l}}(+0, \tau)$, $P_-^{(l,i)}(\tau) = \sum\limits_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^{j+l} v_{i-j}}{\partial n^{j+l}}(-0, \tau)$.

Для двох інших умов спряження маємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{\pm}^{(l,i)}(\tau) \sim q_1 \varepsilon^{m-l} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\frac{\partial^l w_i}{\partial \xi^l}(\pm 1, \tau) + F_{i-2}^{(l-1)}(\pm 1, \tau) \right), \quad l = 2, 3, \tag{7}$$

де використані такі позначення:

$$F_i^{(1)}(\xi, \tau) = \sigma \frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2}, \qquad F_i^{(2)}(\xi, \tau) = (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w_i}{\partial \xi \partial \tau^2},$$

$$Q_+^{(l,i)} = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j (\mathcal{K}_{l-1} v_{i-j})}{\partial n^j}\bigg|_{\gamma+}, \quad Q_-^{(l,i)} = \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j (\mathcal{K}_{l-1} v_{i-j})}{\partial n^j}\bigg|_{\gamma-}$$

Тут $f|_{\gamma-}$, $f|_{\gamma+}$ – односторонні сліди функції f на кривій γ,

$$\mathcal{K}_1 f = q_0(n, \tau)(f_{nn} + \sigma f_{\tau\tau}), \qquad \mathcal{K}_2 f = (q_0(f_{nn} + \sigma f_{\tau\tau}))_n + 2(1 - \sigma)(q_0 f_{n\tau})_\tau.$$

Крім того, позначатимемо через $\tilde{P}$ та $\tilde{Q}$ з відповідними індексами суми P і Q без доданка для $j = 0$.

Не обмежуючи загальності, асимптотичні розвинення будуватимемо для $m = 2$. Зі структури описаної нижче асимптотики видно, що головні члени рядів не залежать від значення $m \in (1, 3)$.

В області ω_ε рівняння (1) набуде вигляду

$$\{q_1(\varepsilon^{-4} A_0 + \varepsilon^{-3} A_1 + \dots) - \varepsilon^{-2}(\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots)\}(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots) \sim 0. \tag{8}$$

З цього співвідношення, умов спряження (6) для $l = 1$ та (7) для $l = 3$ одержуємо задачу

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} = 0, \ \xi \in (-1, 1), \ \tau \in [0, d), \qquad \frac{\partial w_0}{\partial \xi}(\pm 1, \tau) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(\pm 1, \tau) = 0. \tag{9}$$

Отже, $w_0(\xi, \tau) = \beta(\tau)$ для деякої функції β. Тоді з умови (6) для $l = 0$ одержуємо, що $[v_0]_\gamma = 0$ і $\beta = v_0|_\gamma$, а з (7) для $l = 2$ маємо $\mathcal{K}_1 v_0|_{\gamma\pm} = 0$. Задача для наступного коефіцієнта ряду (5) має вигляд

$$\begin{gathered} \frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad \tau \in [0, d), \\ q_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3}(\pm 1, \tau) = \mathcal{K}_2 v_0|_{\gamma\pm}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi}(\pm 1, \tau) = \frac{\partial v_0}{\partial n}\bigg|_{\gamma\pm}, \end{gathered} \tag{10}$$

а її розв'язок існує лише за умови, що $[\mathcal{K}_2 v_0]_\gamma = 0$. Щоб отримати цю умову, треба помножити рівняння на w_0 і проінтегрувати добуток частинами.

Тепер із отриманих вище рівностей складемо задачу для головних членів розвинень (3) і (4):

$$\begin{gathered}\mathcal{L}v_0 - \lambda_0 v_0(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad \mathcal{D}v_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ [v_0]_\gamma = 0, \quad \mathcal{K}_1 v_0|_\gamma = 0, \quad [\mathcal{K}_2 v_0]_\gamma = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Диференціальний оператор $\mathcal{L}$ одержуємо з оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ заміною коефіцієнта D_ε на q_0.

Нехай Ω_+ є підобластю Ω, яку обмежує крива γ, а $\Omega_- = \Omega \setminus \overline{\Omega}_+$.

Лема 2. *Спектр задачі (11) складається зі зліченної кількості додатних власних значень скінченної кратності.*

Доведення. Введемо простір $H^4(\Omega \setminus \gamma)$: функція $u \in L_2(\Omega)$ належить до цього простору, якщо $u\big|_{\Omega_+} \in H^4(\Omega_+)$ і $u\big|_{\Omega_-} \in H^4(\Omega_-)$. В просторі $L_2(\Omega)$ розглянемо оператор $\mathcal{L}$ зі щільною областю визначення

$$D(\mathcal{L}) = \{u \in H^4(\Omega \setminus \gamma) : \mathcal{D}u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [u]_\gamma = 0, \mathcal{K}_1 u|_\gamma = 0, [\mathcal{K}_2 u]_\gamma = 0\}.$$

Доведемо самоспряженість оператора $\mathcal{L}$. Для всіх $u \in D(\mathcal{L})$ виконується рівність

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \mathcal{L}u\,\overline{v}\,dx &= \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{K}_2 u\,\overline{v}\,dl - \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{K}_1 u\,\overline{v}_n\,dl + \\ &+ \int\limits_\gamma \mathcal{K}_2 u\,[\overline{v}]_\gamma\,dl + \int\limits_\gamma [u_n\,\mathcal{K}_1\overline{v}]_\gamma\,dl - \int\limits_\gamma u\,[\mathcal{K}_2\overline{v}]_\gamma\,dl + \int\limits_\Omega u\,\overline{\mathcal{L}v}\,dx.\end{aligned}$$

Очевидно, що функціонали

$$f_1(u) = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{K}_2 u\,\overline{v}\,dl, \quad f_2(u) = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{K}_1 u\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial n}\,dl, \quad g_1^+(u) = \int\limits_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} \mathcal{K}_1\overline{v}\Big|_{\gamma_+}\,dl,$$

$$g_1^-(u) = \int\limits_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} \mathcal{K}_1\overline{v}\Big|_{\gamma_-}\,dl, \quad g_2(u) = \int\limits_\gamma \mathcal{K}_2 u\,[\overline{v}]_\gamma\,dl, \quad g_3(u) = \int\limits_\gamma u\,[\mathcal{K}_2\overline{v}]_\gamma\,dl$$

є лінійно незалежними, оскільки відрізняються або носіями, або порядком диференціювання щодо змінної n в операторах $\frac{\partial}{\partial n}$, $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{K}_2$. Отже, рівність

$$\int\limits_\Omega \mathcal{L}u\,\overline{v}\,dx = \int\limits_\Omega u\,\overline{\mathcal{L}v}\,dx$$

виконується для всіх $u \in D(\mathcal{L})$ тоді і лише тоді, коли $v \in H^4(\Omega \setminus \gamma)$ і всі ці функціонали є нульовими, тобто

$$\mathcal{D}v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [v]_\gamma = 0, \quad \mathcal{K}_1 v|_\gamma = 0, \quad [\mathcal{K}_2 v]_\gamma = 0.$$

Тоді оператор $\mathcal{L}$ є симетричним і $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^*)$. Залишилось зауважити, що $D(\mathcal{L})$ із нормою графіка компактно вкладається в $L_2(\Omega)$. Лему доведено.

Нехай λ_0 є *простим* власним значенням задачі (11), а власна функція v_0 підпорядкована умові $\int_\Omega v_0^2 dx = 1$. Зауважимо, що асимптотику власних значень задачі (1),(2) можна написати і у випадку, коли λ_0 – кратне власне значення оператора $\mathcal{L}$. Проте вона не вимагає нових ідей, окрім додаткових технічних ускладнень.

Припустимо, що вже знайдені λ_j, v_j, w_j для $0 \leqslant j \leqslant i-1$. Тоді крайова задача на $(i+1)$-у поправку ряду (5) має вигляд

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 w_{i+1}}{\partial \xi^4} = h_{i+1}(\xi,\tau), \quad \xi \in (-1,1), \quad \tau \in [0,d),\\ \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \xi}(\pm 1,\tau) = P_{\pm}^{(1,i)}(\tau), \quad q_1 \frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial \xi^3}(\pm 1,\tau) = Q_{\pm}^{(3,i)}(\tau) - q_1 F_{i-1}^{(2)}(\pm 1,\tau),\end{gathered} \tag{12}$$

де $h_{i+1}(\xi,\tau) = -\sum\limits_{j=1}^{i+1} A_j w_{i+1-j} + q_1^{-1} \sum\limits_{j=0}^{i-1} \lambda_j w_{i-j-1}$. Її розв'язок має зображення

$$\begin{gathered}w_{i+1} = H_{i+1}(\xi,\tau) + \beta_0^{(i+1)}\xi^3 + \beta_1^{(i+1)}\xi^2 + \beta_2^{(i+1)}\xi + \beta_3^{(i+1)},\\ H_{i+1} = \int\limits_{-1}^{\xi} ds \int\limits_{-1}^{s} dt \int\limits_{-1}^{t} d\sigma \int\limits_{-1}^{\sigma} h_{i+1}(\xi,\tau)d\theta.\end{gathered}$$

З умови існування розв'язку задачі (12) матимемо

$$[\mathcal{K}_2 v_i]_\gamma = q_1\left(\frac{\partial^3 H_{i+1}}{\partial \xi^3}(1,\tau) + F_{i-1}^{(2)}(1,\tau) - F_{i-1}^{(2)}(-1,\tau)\right) + \tilde{Q}_-^{(3,i)}(\tau) - \tilde{Q}_+^{(3,i)}(\tau).$$

Тоді з рівності (6) для $l=0$ та (7) для $l=2$ одержуємо задачу

$$\begin{gathered}\mathcal{L}v_i - \lambda_0 v_i(x) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j v_{i-j}, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad \mathcal{D}v_i = 0, \quad x \in \partial\Omega,\\ [v_i]_\gamma = X_i(\tau), \quad \mathcal{K}_1 v_0|_{\gamma_\pm} = Y_i^\pm(\tau), \quad [\mathcal{K}_2 v_0]_\gamma = Z_i(\tau),\end{gathered} \tag{13}$$

де використані позначення

$$\begin{gathered}X_i = \tilde{P}_-^{(0,i)} - \tilde{P}_+^{(0,i)} + w_i(1,\tau) - w_i(-1,\tau),\\ Y_i^\pm = q_1\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi^2}(\pm 1,\tau) + F_{i-2}^{(1)}(\pm 1,\tau)\right),\\ Z_i = q_1\left(\frac{\partial^3 H_{i+1}}{\partial \xi^3}(1,\tau) + F_{i-1}^{(2)}(1,\tau) - F_{i-1}^{(2)}(-1,\tau)\right) + \tilde{Q}_-^{(3,i)}(\tau) - \tilde{Q}_+^{(3,i)}(\tau).\end{gathered}$$

Помноживши рівняння задачі (13) на власну функцію v_0 та проінтегрувавши за областю Ω, одержуємо умову існування розв'язку цієї задачі

$$\lambda_i = \int\limits_\gamma Z_i v_0 dl - \int\limits_{\gamma+} Y_i^+ \frac{\partial v_0}{\partial n} dl + \int\limits_{\gamma-} Y_i^- \frac{\partial v_0}{\partial n} dl - \int\limits_\gamma X_i \mathcal{K}_2 v_0 dl - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \int\limits_\Omega v_{i-j} v_0 dx. \tag{14}$$

Далі знаходимо функцію v_i, для однозначності підпорядкувавши її умові

$$\int\limits_\Omega v_i\, v_0\, dx = 0.$$

Повернувшись до задачі (12) для $i = j-1$, знаходимо w_i. Отже, ми описали алгоритм побудови всіх коефіцієнтів асимптотичних розвинень (3)-(5) для $m=2$.

Обґрунтуємо побудовані асимптотичні розвинення. Розглянемо частинні суми рядів (3)-(5)

$$\Lambda_\varepsilon^N = \lambda_0 + \cdots + \varepsilon^N \lambda_N, \qquad U_\varepsilon^N(x) = \begin{cases} v_0(x) + \cdots + \varepsilon^N v_N(x) & \text{в } \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ w_0(n/\varepsilon, \tau) + \cdots + \varepsilon^N w_N(n/\varepsilon, \tau) & \text{в } \omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай $m = 2$, а λ_0 є просте власне значення задачі (11). Тоді існує власне значення λ^ε задачі (1),(2), для якого виконується оцінка*

$$|\lambda^\varepsilon - \sum_{i=0}^N \lambda_i \varepsilon^i| \leqslant C_N \varepsilon^{N+1},$$

де λ_i обчислюють за формулою (14), а стала C_N не залежить від ε.

Доведення. Границя області ω_ε є об'єднанням двох гладких кривих, які ми позначимо γ_ε^- і γ_ε^+. Вихідні дані задачі (1)-(2) є гладкими, тому за побудовою функція U_ε^N є також гладкою в $\Omega \setminus \partial\omega_\varepsilon$ і, зокрема,

$$[U_\varepsilon^N]_{\gamma_\varepsilon^\pm} = \zeta_0^\pm(\varepsilon, \tau), \quad [(U_\varepsilon^N)_n]_{\gamma_\varepsilon^\pm} = \zeta_1^\pm(\varepsilon, \tau),$$

де $|\zeta_0^\pm(\varepsilon, \tau)| \leqslant c_N \varepsilon^{N+1}$ та $|\zeta_1^\pm(\varepsilon, \tau)| \leqslant c_N \varepsilon^N$ на кривих $\gamma_\varepsilon^\pm$. Тут стрибки пораховані в напрямі зовнішньої нормалі до ω_ε.

Отже, U_ε^N не належить до області визначення оператора B_ε з леми 1. В області $\Omega_\varepsilon^- = \Omega_- \setminus \omega_\varepsilon$ виберемо таку функцію φ_ε^- класу C^2, що $\mathcal{D}\varphi_\varepsilon^- = 0$ на $\partial\Omega$, $\varphi_\varepsilon^- = \zeta_0^-(\varepsilon, \cdot)$ і $(\varphi_\varepsilon^-)_n = \zeta_1^-(\varepsilon, \cdot)$ на кривій γ_ε^-, а також $\|\varphi_\varepsilon^-\|_{H^2(\Omega_\varepsilon^-)} \leqslant C_N \varepsilon^N$. Очевидно, що така функція існує. Аналогічно, в області $\Omega_\varepsilon^+ = \Omega_+ \setminus \omega_\varepsilon$ існує достатньо гладка функція φ_ε^+ така, що $\varphi_\varepsilon^+ = \zeta_0^+(\varepsilon, \cdot)$, $(\varphi_\varepsilon^+)_n = \zeta_1^+(\varepsilon, \cdot)$ на кривій γ_ε^+ і $\|\varphi_\varepsilon^+\|_{H^2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant C_N \varepsilon^N$. Введемо функцію

$$\Phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\varphi_\varepsilon^-(x), & \text{коли } x \in \Omega_\varepsilon^-, \\ 0, & \text{коли } x \in \omega_\varepsilon, \\ -\varphi_\varepsilon^+(x), & \text{коли } x \in \Omega_\varepsilon^+. \end{cases}$$

Тоді функція $U_\varepsilon^N + \Phi_\varepsilon$ є класу $C^1(\Omega)$ і належить $H_0^2(\Omega)$. Крім того, за побудовою U_ε^N та Λ_ε^N справджують нерівність

$$\|(B_\varepsilon - (\Lambda_\varepsilon^N)^{-1})(U_\varepsilon^N + \Phi_\varepsilon)\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{N-2},$$

а також $\|U_\varepsilon^N + \Phi_\varepsilon\|_{H_0^2(\Omega)} \to \|v_0\|_{H_0^2(\Omega)} > 0$. Згідно з лемою Вішика-Люстерника [12], існує власне значення $(\lambda^\varepsilon)^{-1}$ оператора B_ε, таке що

$$|\lambda^\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^N| \leqslant C\varepsilon^{N-2}.$$

З цієї нерівності для $N + 3$ одержуємо твердження теореми.

3. Асимптотика власних значень задачі (1),(2) для $m = 3$. Як і в попередньому випадку, асимптотику власних елементів задачі (1),(2) шукатимемо у вигляді рядів (3)-(5). Тоді функція w_0 є розв'язком рівняння $A_0 w_0 = 0$, а отже, є многочленом за змінною ξ

$$w_0 = \alpha_0(\tau) + \alpha_1(\tau)\xi + \alpha_2(\tau)\xi^2 + \alpha_3(\tau)\xi^3.$$

З відповідних умов спряження одержуємо співвідношення

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = -3\alpha_3, \quad 6\alpha_3 = q_1^{-1}\mathcal{K}_2 v_0|_\gamma, \quad \alpha_0 = v_0|_{\gamma_+} + 2\alpha_3.$$

а також спектральну задачу на головні члени рядів (3),(4)

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}v_0 - \lambda_0 v_0 = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad \mathcal{D}v_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ &[v_0]_\gamma = -2/3q_1^{-1}\mathcal{K}_2 v_0|_\gamma, \quad \mathcal{K}_1 v_0|_\gamma = 0, \quad [\mathcal{K}_2 v_0]_\gamma = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Як і у випадку задачі (11), спектр задачі (15) складається зі зліченної кількості додатних власних значень скінченної кратності.

Нехай λ_0 – просте власне значення задачі (15), а v_0 – відповідна власна функція, $\int_\Omega v_0^2 dx = 1$. Знаючи v_0, можна обчислити коефіцієнти α_k многочлена, а отже, знайти функцію w_0.

Припустимо, що знайдено $(i-1)$-у поправку λ_{i-1} ряду (3) та функції v_{i-1},w_{i-1}, а також всі попередні поправки з меншими за $(i-1)$ індексами. Зі співвідношення (8) отримаємо рівняння для w_i

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial \xi^4} = g_i(\xi, \tau),$$

де $g_i(\xi,\tau) = -\sum\limits_{j=1}^{i} A_j w_{i-j} + q_1^{-1}\sum\limits_{j=0}^{i-1} \lambda_j w_{i-j-1}$. За припущенням функція $g_i(\xi,\tau)$ є відомою, тому

$$\begin{aligned} w_i &= \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}\xi + \alpha_2^{(i)}\xi^2 + \alpha_3^{(i)}\xi^3 + G_i(\xi,\tau), \\ G_i(\xi,\tau) &= \int\limits_{-1}^{\xi} ds \int\limits_{-1}^{s} dt \int\limits_{-1}^{t} d\sigma \int\limits_{-1}^{\sigma} g_i(\xi,\tau) d\theta. \end{aligned}$$

З умов спряження (6) і (7) знаходимо співвідношення між невідомими величинами $\alpha_j^{(i)}$, $j = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(i)} &= 1/4\left(P_+^{(1,i-1)}(\tau) - P_-^{(1,i-1)}(\tau) - \frac{\partial G_i}{\partial \xi}(1,\tau)\right), \\ \alpha_3^{(i)} &= 1/6\left(q_1^{-1}\mathcal{K}_2 v_i|_{\gamma+} + q_1^{-1}\tilde{Q}_+^{(3,i)} - \frac{\partial^3 G_i}{\partial \xi^3}(1,\tau) - F_{i-2}^{(2)}(1,\tau)\right), \\ \alpha_1^{(i)} &= 1/2\left(P_+^{(1,i-1)}(\tau) + P_-^{(1,i-1)}(\tau) - \frac{\partial G_i}{\partial \xi}(1,\tau)\right) - 3\alpha_3^{(i)}, \\ \alpha_0^{(i)} &= 1/2(P_+^{(0,i)} + P_-^{(0,i)} - G_i(1,\tau)) - \alpha_2^{(i)}. \end{aligned}$$

Запишемо задачу на λ_i та v_i

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v_i - \lambda_0 v_i &= \sum_{j=1}^{i} \lambda_j v_{i-j}, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad \mathcal{D}v_i = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ [v_i]_\gamma &= -2/3q_1^{-1}\mathcal{K}_2 v_i|_{\gamma+} + M_i, \\ \mathcal{K}_1 v_i|_{\gamma\pm} &= q_1 \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial \xi^2}(\pm 1,\tau) + q_1 F_{i-3}^{(1)}(\pm 1,\tau) - \tilde{Q}_\pm^{(2,i)}, \\ [\mathcal{K}_2 v_i]_\gamma &= q_1\left(\frac{\partial^3 G_i}{\partial \xi^3}(1,\tau) + F_{i-2}^{(2)}(1,\tau) - F_{i-2}^{(2)}(-1,\tau)\right) + \tilde{Q}_-^{(3,i)} - \tilde{Q}_+^{(3,i)}, \end{aligned}$$

де

$$M_i = \tilde{P}_-^{(0,i)} - \tilde{P}_+^{(0,i)} + G_i(1,\tau) + P_+^{(1,i-1)} + P_-^{(1,i-1)} - \frac{\partial G_i}{\partial \xi}(1,\tau) - \\ - 2/3\left(q_1^{-1}\tilde{Q}_+^{(3,i)} - \frac{\partial^3 G_i}{\partial \xi^3}(1,\tau) - F_{i-2}^{(2)}(1,\tau)\right).$$

Домноживши рівняння для v_i на власну функцію v_0 задачі (15) та проінтегрувавши за областю Ω, отримаємо умову існування розв'язку задачі (16). З неї знаходимо, що

$$\lambda_i = -\int_\gamma [\mathcal{K}_1 v_i]\frac{\partial v_0}{\partial n}dl + \int_\gamma [\mathcal{K}_2 v_i v_0]dl - \int_\gamma M_i \mathcal{K}_2 v_0 dl - \sum_{j=1}^{i}\lambda_j \int_\Omega v_{i-j}v_0 dx. \quad (16)$$

Після цього знаходимо функцію v_i, яку однозначно вибираємо з умови $\int_\Omega v_i v_0 dx = 0$, а також невідомі коефіцієнти для функції w_i.

Теорема 2. *Нехай $m = 3$, а λ_0 – просте власне значення задачі (15). Тоді існує власне значення λ^ε задачі (1),(2), для якого виконується оцінка*

$$\left|\lambda^\varepsilon - \sum_{i=0}^{N}\lambda_i\varepsilon^i\right| \leqslant C_N\varepsilon^{N+1},$$

де λ_i обчислюються за формулою (16), а стала C_N не залежить від ε.

Доведення цієї теореми аналогічне проведеному для теореми 1.

4. Асимптотика власних значень задачі (1),(2) для $m = 3.5$. Асимптотичні розвинення будуватимемо для $m = 3\frac{1}{2}$. Зауважимо, що їхній вигляд на проміжку $(3,4)$ змінюється. Нехай

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_{1/2} + \varepsilon\lambda_1 + \ldots; \quad (17)$$

$$u_\varepsilon \sim v_0(x) + \varepsilon^{1/2}v_{1/2} + \varepsilon v_1 + \ldots, \quad x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \quad (18)$$

$$u_\varepsilon \sim w_0(\xi,\tau) + \varepsilon^{1/2}w_{1/2} + \varepsilon w_1 + \ldots, \quad \xi \in (-1,1),\ \tau \in [0,d). \quad (19)$$

Підставивши розвинення (17), (18) у рівняння (1), отримаємо

$$\mathcal{L}v_{s/2} - \lambda_0 v_{s/2} = \sum_{j=1}^{s}\lambda_{j/2}v_{(s-j)/2}, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad s = 0,1,2,\ldots \quad (20)$$

З іншого боку, для елементів рядів (17),(19) в області $\Omega \setminus \omega_\varepsilon$ маємо

$$\frac{\partial^4 w_{s/2}}{\partial \xi^4} = -\sum_{j=1}^{[s/2]} A_j w_{(s-2j)/2} + q_1^{-1}\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_{j/2}w_{(s-j-1)/2}, \quad s = 0,1,2,\ldots \quad (21)$$

Умови спряження (2) матимуть вигляд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}P_\pm^{(l,i)}(\tau) \sim \varepsilon^{-l}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial^l w_{i/2}}{\partial \xi^l}(\pm 1,\tau), \quad l = 0,1, \quad (22)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}P_\pm^{(l,i)}(\tau) \sim \varepsilon^{3.5-l}q_1\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\left(\frac{\partial^l w_{i/2}}{\partial \xi^l} + F_{(i-2)/2}^{(l-1)}\right)(\pm 1,\tau),\ l = 2,3, \quad (23)$$

де

$$P_{+}^{(l,i)}(\tau)=\sum_{j=0}^{[i/2]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+l}v_{(i-2j)/2}}{\partial n^{j+l}}(+0,\tau),\quad l=0,1,$$

$$P_{-}^{(l,i)}(\tau)=\sum_{j=0}^{[i/2]}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{\partial^{j+l}v_{(i-2j)/2}}{\partial n^{j+l}}(-0,\tau),\quad l=0,1,$$

$$P_{+}^{(l,i)}(\tau)=\sum_{j=0}^{[i/2]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j}(\mathcal{K}_{l-1}v_{(i-2j)/2})}{\partial n^{j}}(+0,\tau),\quad l=2,3,$$

$$P_{-}^{(l,i)}(\tau)=\sum_{j=0}^{[i/2]}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{\partial^{j}(\mathcal{K}_{l-1}v_{(i-2j)/2})}{\partial n^{j}}(-0,\tau),\quad l=2,3,$$

$$F_{i/2}^{(1)}=\sigma\frac{\partial^2 w_{i/2}}{\partial\tau^2},\quad F_{i/2}^{(2)}=(2-\sigma)\frac{\partial^3 w_{i/2}}{\partial\xi\partial\tau^2}.$$

З умов (23) для $l=2$, $l=3$ та рівняння (20) при $s=0$ одержимо спектральну задачу

$$\begin{gathered}\mathcal{L}v_0-\lambda_0 v_0(x)=0,\quad x\in\Omega\setminus\gamma,\quad \mathcal{D}v_0=0,\quad x\in\partial\Omega,\\ \mathcal{K}_1 v_0|_\gamma=\mathcal{K}_2 v_0|_\gamma=0.\end{gathered}\tag{24}$$

Насправді, це дві крайові задачі в областях Ω_1 та Ω_2 з умовами Неймана на кривій γ, де Ω_1 - це область, обмежена кривою γ, а $\Omega_2=\Omega\setminus\overline{\Omega}_2$. Спектр задачі (24) є дискретним, зліченним, додатним, а кожне власне значення має скінченну кратність.

Припустимо, що λ_0 є просте власне значення задачі (24). Приймемо, що $v_0|_{\Omega_1}=0$ і $\int_{\Omega_2}v_0^2dx=1$. Із рівняння (21) для $s=0$ маємо $A_0w_0=0$. Отже,

$$w_0=\alpha_0(\tau)\xi^3+\alpha_1(\tau)\xi^2+\alpha_2(\tau)\xi+\alpha_3(\tau).$$

З умови (22) для $l=1$ знаходимо $3\alpha_0\pm2\alpha_1+\alpha_2=0$. Звідси робимо висновок, що $\alpha_1=0$ і $\alpha_2=-3\alpha_0$. Скористаємося також умовою (22) для $l=0$, яка має вигляд $\pm\alpha_0\pm\alpha_2+\alpha_3=v_0|_{\gamma\pm}$. Додавши ці рівності, знаходимо, що $\alpha_3=1/2v_0|_{\gamma_-}$. На коефіцієнти α_i, $i=0,2$ одержуємо систему

$$\alpha_2+3\alpha_0=0,\quad \alpha_2+\alpha_0=-1/2v_0|_{\gamma_-},$$

з якої знаходимо, що $\alpha_0=1/4v_0|_{\gamma_-}$ і $\alpha_2=-3/4v_0|_{\gamma_-}$. Отже, визначено функцію w_0 – перший член ряду (19).

Припустимо, що знайдено $\lambda_{j/2}$, $v_{j/2}$, $w_{j/2}$ для $0\leqslant j\leqslant i-1$. Із співвідношень (20) при $s=i$ та умов спряження (23) одержуємо крайову задачу для функції $v_{i/2}$

$$\begin{gathered}\mathcal{L}v_{i/2}-\lambda_{0/2}v_{i/2}(x)=\sum_{j=1}^{i}\lambda_{j/2}v_{(i-j)/2}(x),\quad x\in\Omega\setminus\gamma,\\ \mathcal{D}v_{i/2}=0\quad x\in\partial\Omega,\quad \mathcal{K}_1v_{i/2}|_{\gamma\pm}=X_i^{\pm}(\tau),\quad \mathcal{K}_2v_{i/2}|_{\gamma\pm}=Y_i^{\pm}(\tau),\end{gathered}\tag{25}$$

де
$$X_i^{\pm}=q_1\left(\frac{\partial^2 w_{(i-3)/2}}{\partial\xi^2}(\pm1,\tau)+F_{(i-7)/2}^{(1)}(\pm1,\tau)-\tilde{P}_{\pm}^{(2,i)}(\tau)\right),$$

$$Y_i^{\pm}=q_1\left(\frac{\partial^3 w_{(i-1)/2}}{\partial\xi^3}(\pm1,\tau)+F_{(i-5)/2}^{(2)}(\pm1,\tau)-\tilde{P}_{\pm}^{(3,i)}(\tau)\right).$$

З умови існування розв'язку задачі (25) одержуємо

$$\lambda_{i/2} = \int_{\gamma_-} X_i^- \frac{\partial v_{0/2}}{\partial n} dl - \int_{\gamma_-} Y_i^- v_{0/2} dl - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{j/2} \int_{\Omega_2} v_{(i-j)/2} v_{0/2} dx. \qquad (26)$$

Якщо виконується умова (26), то існує єдиний розв'язок $v_{i/2}$ задачі (25) такий, що $\int_{\Omega_2} v_{i/2} v_0 \, dx = 0$. Із співвідношень (21) для $s = i$ знаходимо

$$\frac{\partial^4 w_{i/2}}{\partial \xi^4} = c_i(\xi, \tau), \quad c_i = -\sum_{j=1}^{[i/2]} A_j w_{(i-2j)/2} + q_1^{-1} \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{j/2} w_{(i-j-1)/2}.$$

Тоді

$$w_{i/2}(\xi, \tau) = \alpha_0^{(i)}(\tau)\xi^3 + \alpha_1^{(i)}(\tau)\xi^2 + \alpha_2^{(i)}(\tau)\xi + \alpha_3^{(i)}(\tau) + C_i(\xi, \tau),$$

$$C_i(\xi, \tau) = \int_{-1}^{\xi} ds \int_{-1}^{s} dt \int_{-1}^{t} d\sigma \int_{-1}^{\sigma} c_i(\theta, \tau) d\theta,$$

для деяких функцій $\alpha_i^{(i)}$. З умови спряження (22) для $l = 1$ одержимо дві рівності

$$3\alpha_0^{(i)} \pm 2\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \frac{\partial C_i}{\partial \xi}(\pm 1, \tau) = P_\pm^{(1,i-2)}(\tau).$$

Віднявши їх, матимемо

$$\alpha_1^{(i)} = 1/4\left(P_+^{(1,i-2)} - P_-^{(1,i-2)} - \frac{\partial C_i}{\partial \xi}(1, \tau)\right).$$

Далі скористаємося умовою (22) для $l = 0$, що має вигляд

$$\pm\alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \pm \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} + C_i(\pm 1, \tau) = P_\pm^{(0,i)}.$$

Додавши ці рівності, одержимо

$$\alpha_3^{(i)} = 1/2(P_+^{(0,i)} + P_-^{(0,i)} - C_i(1, \tau)) - \alpha_1^{(i)}.$$

Тепер знаходимо

$$\alpha_0^{(i)} = 1/2(P_+^{(1,i-2)} + P_-^{(0,i)} - 3\alpha_1^{(i)} - \alpha_3^{(i)}).$$

Нарешті, визначаємо величину функції $\alpha_2^{(i)}$

$$\alpha_2^{(i)} = P_+^{(1,i-2)} - \frac{\partial C_i}{\partial \xi}(1, \tau) - 3\alpha_0^{(i)} - 2\alpha_1^{(i)}.$$

Отже, знайдено i-й коефіцієнт ряду (19).

Як і в попередніх випадках, доводиться теорема.

Теорема 3. *Нехай $m = 3\frac{1}{2}$, а λ_0 є просте власне значення задачі (24). Тоді існує таке власне значення λ^ε задачі (1),(2), що виконується оцінка*

$$\left|\lambda^\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \lambda_{i/2} \varepsilon^{i/2}\right| \leqslant C_N \varepsilon^{(N+1)/2},$$

де $\lambda_{i/2}$ обчислюються за формулою (26), а стала C_N не залежить від ε.

---

1. *Lions J.L.* Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal // Springer: Lect. Notes in Math. – 1973. – Vol.323.
2. *Панасенко Г.П.* Асимптотика решений и собственных значений эллиптических уравнений с сильно изменяющимися коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 252. – С. 1320-1325.
3. *Geymonat G., Sanchez-Palencia E.* Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics// Math. Meth. Appl. Sci. – 1982. – Vol.4. – P. 291-306.
4. *Geymonat G., Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E.* Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics, Part II// Proceedings of the Centre for the Mathematical Analysis, Australian Natoinal Univ. – 1984. – Vol. 5. – P. 15-38.
5. *Санчез-Паленсия Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М., 1984.
6. *Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E.* Low and high frequency vibration in stiff problems// in De Giorgy 60th Birthday, Partial differential Equations and the Calculus of Variations. – Birkhaüser, 1990. – Vol. 2. – P. 729-742.
7. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods. – Springer-Verlag, 1989.
8. *Sanchez-Palencia E.* Asymptotic and spectral properties of a class of singular-stiff problems// J. Math. Pures Appl. – 1992. – Vol. 71. – P. 379-406.
9. *Lobo M., Perez E.* High frequency vibrations in a stiff problem// Math. Methods. Appl. Sci. – 1997. – Vol 7. – N 2. – P. 291-311.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972.
11. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., 1983.
12. *Вишик М.И., Люстерник А.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12. – N 5. – С. 3-122.

ON ASYMPTOTYCS EXPANSION OF EIGENVALUES FOR PLATE WITH LOCAL PERTURBATION OF STIFFNESS

Yu. Golovaty, A. Lavrenyuk

Ivan Franko National University of Lviv

We study the asymptotic behaviour as $\varepsilon \to 0$ of eigenvalues of a singular perturbed problem for the forth-order operator with a perturbation of the stiffness in a neighbourhood of one-dimensional closed manifold. Copmlete asymptotic expansions of the eigenvalues are constructed and justified.

Key words: *eigenvalue, singular perturbation, biharmonic operator.*

Стаття надійшла до редколегії 25.06.2000

Прийнята до друку 28.12.2000