ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.129–138

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.129–138

УДК 517.927

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

Юрій Жерновий
Львівський національний університет імені Івана Франка

Питання існування та єдиності розв'язків задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням старшої похідної розглядали в працях [1-3]. Узагальнюючи результати статті [2] щодо умов розв'язності деяких двоточкових крайових задач для системи звичайних диференціальних рівнянь $x'' = f(t,x,x',x'')$ з неперервною та обмеженою правою частиною f, у цій праці розглянуто випадок необмеженої векторної функції f. Дослідження розв'язності двоточкових задач як з лінійними, так і з нелінійними крайовими умовами для скалярного рівняння $x'' = f(t,x,x',x'')$ проведено за допомогою методу верхніх та нижніх функцій, який у [4, гл.3] був застосований для вивчення двоточкових крайових задач для рівняння $x'' = f(t,x,x')$.

1. Система рівнянь з лінійними крайовими умовами загального вигляду. Для системи рівнянь

$$x'' = f(t,x,x',x''), \qquad t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

з неперервною векторною функцією $f : I \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ розглянемо крайову задачу

$$A_{i1}x(a) + A_{i2}x'(a) + B_{i1}x(b) + B_{i2}x'(b) = c_i, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

де $c_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1,2)$, A_{ik} і B_{ik} $(i,k = 1,2)$ – дійсні $n \times n$-матриці такі, що крайова задача

$$x'' = 0, \quad A_{i1}x(a) + A_{i2}x'(a) + B_{i1}x(b) + B_{i2}x'(b) = 0, \quad i = 1,2 \tag{3}$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G(t,s)$ матрицю Гріна задачі (3) і приймемо

$$h_1 = \max_{t\in I}\int_a^b |G(t,s)|\,ds, \quad h_2 = \max_{t\in I}\int_a^b \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right| ds \quad \left(|G| = \Big(\sum_{i,j=1}^n G_{ij}^2\Big)^{1/2}\right).$$

Теорема 1. *Нехай функція $f(t,x,y,z)$ неперервна для $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$, задовольняє умову Ліпшиця стосовно z зі сталою Ліпшиця $L \in (0,1)$ і нехай існують сталі $L_i \geqslant 0$ $(i = 0,1,2)$ такі, що*

$$|f(t,x,y,0)| \leqslant L_0 + L_1|x| + L_2|y| \quad \forall (t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^{2n}, \tag{4}$$

причому $0 < L_1h_1 + L_2h_2 + L < 1$. *Тоді крайова задача (1), (2) має хоча б один розв'язок.*

Доведення. Оскільки виконання для $f(t,x,y,z)$ умови Ліпшиця стосовно z зі сталою L $(0 < L < 1)$ гарантує існування і єдиність неперервної векторної функції $f_0 : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ такої, що $f\big(t,x,y,f_0(t,x,y)\big) \equiv f_0(t,x,y)$, то рівняння (1) еквівалентне рівнянню $x'' = f_0(t,x,x')$. Записавши умову Ліпшиця

$$|f(t,x,y,0) - f\big(t,x,y,f_0(t,x,y)\big)| = |f(t,x,y,0) - f_0(t,x,y)| \leqslant L|f_0(t,x,y)|$$

і взявши до уваги нерівність $|f_0| - |f| \leqslant |f - f_0|$ та оцінку (4), одержимо оцінку

$$|f_0(t,x,y)| \leqslant (L_0 + L_1|x| + L_2|y|)/(1-L) \quad \forall (t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^{2n}. \tag{4'}$$

Задача (1), (2) еквівалентна рівнянню

$$x(t) = x_0(t) + \int\limits_a^b G(t,s)f_0\big(s,x(s),x'(s)\big)\,ds, \tag{5}$$

де $x_0(t)$ – лінійна векторна функція, яка залежить від A_{ik}, B_{ik}, c_i $(i,k = 1,2)$. Далі розглядаємо банахів простір неперервних функцій $h(t) : I \to \mathbb{R}^n$ з нормою $\|h\| = \max\big(\beta \max\limits_{t\in I}|h(t)|, \alpha \max\limits_{t\in I}|h'(t)|\big)$, де $\alpha = \big(L_0h_1 + p_1(1-L-L_2h_2) + p_2L_2h_1\big)/P$, $\beta = \big(L_0h_2 + p_2(1-L-L_1h_1) + p_1L_1h_2\big)/P$, $P = 1 - L - L_1h_1 - L_2h_2 > 0$, $p_1 = \max\limits_{t\in I}|x_0(t)|$, $p_2 = \max\limits_{t\in I}|x_0'(t)|$. Для функцій $h(t)$ з кулі $\|h\| \leqslant \alpha\beta$ розглядаємо оператор $T_0(h) = x$, де $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f_0\big(t,h(t),h'(t)\big)$, який задовольняє умови (2). Завершення доведення зводиться до перевірки виконання умов теореми Шаудера [5, c.291] для оператора $T_0(h)$: з використанням оцінки (4′) та оцінок для $|x(t)|$, $|x'(t)|$, одержаних за допомогою (5), показується, що оператор $T_0(h)$ неперервний, відображає кулю $\|h\| \leqslant \alpha\beta$ в себе і область його значень має компактне замикання, оскільки містить функції $x(t)$ такі, що $x(t)$, $x'(t)$ обмежені і одностайно неперервні.

2. Метод верхніх і нижніх функцій для скалярної крайової задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{gathered} x'' = f(t,x,x',x''), \qquad l_0\big(x(a),x'(a)\big) \equiv a_0x(a) - b_0x'(a) - A = 0, \\ l_1\big(x(b),x'(b)\big) \equiv a_1x(b) + b_1x'(b) - B = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

де $f(t,x,y,z) \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, a, b, a_0, b_0, a_1, b_1, A, $B \in \mathbb{R}$,

$$a_i, b_i \geqslant 0 \quad (i = 0,1), \quad a_0 + b_0 > 0, \quad a_1 + b_1 > 0, \quad (a_0a - b_0)a_1 \neq (a_1b + b_1)a_0. \tag{7}$$

Оскільки при виконанні умов (7) однорідна крайова задача, що відповідає задачі (6), має лише тривіальний розв'язок, то як наслідок з теореми 1 (при $L_1 = L_2 = 0$) отримаємо таке допоміжне твердження.

Лема. *Якщо функція $f(t,x,y,z)$ неперервна і обмежена для $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3$ і задовольняє умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L \in (0,1)$, то крайова задача (6) має хоча б один розв'язок.*

Будемо казати, що функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умову (L), якщо $f \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, і $f(t,x,y,z)$ задовольняє умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L \in (0,1)$.

Зауваження 1. Функція $f(t,x,y,z)$ може задовольняти умову (L), будучи необмеженою за всіма змінними. Наприклад,

$$f(t,x,y,z)=g(t,x,y)\ln\left(\frac{z}{g(t,x,y)}+\sqrt{\frac{z^2}{g^2(t,x,y)}+\lambda_0}\right),$$

де $\lambda_0=\mathrm{const}>1$, $g\in C(I\times\mathbb{R}^2)$, $g(t,x,y)\neq 0\ \forall\ (t,x,y)\in I\times\mathbb{R}^2$. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial z}=1/\sqrt{\frac{z^2}{g^2(t,x,y)}+\lambda_0}<1,$$

тобто f задовольняє умову (L).

Проведемо дослідження крайової задачі (6) у випадку необмеженої функції f.

Теорема 2. *Нехай функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умову (L) і нехай існують функції α, $\beta\in C^2(I)$, φ, ψ, λ, $\mu\in C(I)$ такі, що*

1) $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$ $\forall t\in I$;

*2) $\alpha''(t)\geqslant f\big(t,\alpha(t),\alpha'(t),v(t)\big)$ $\forall t\in I$, $\forall v\in C(I):\lambda(t)\leqslant v(t)\leqslant\mu(t)$, $t\in I$;
$\beta''(t)\leqslant f\big(t,\beta(t),\beta'(t),w(t)\big)$ $\forall t\in I$, $\forall w\in C(I):\lambda(t)\leqslant w(t)\leqslant\mu(t)$, $t\in I$;*

3) $l_0\big(\alpha(a),\alpha'(a)\big)\leqslant 0\leqslant l_0\big(\beta(a),\beta'(a)\big)$, $\quad l_1\big(\alpha(b),\alpha'(b)\big)\leqslant 0\leqslant l_1\big(\beta(b),\beta'(b)\big)$;

4) $\varphi(t)\leqslant\psi(t)$, $\quad\lambda(t)\leqslant\mu(t)$ $\forall t\in I$;

5) $\varphi(t)\leqslant\alpha'(t)\leqslant\psi(t)$, $\quad\varphi(t)\leqslant\beta'(t)\leqslant\psi(t)$ $\forall t\in I$;

6) для будь-якого $x(t)\in C^2(I)$ з умов

$$x''=f\big(t,x(t),\delta\big(\varphi(t),x'(t),\psi(t)\big),\delta\big(\lambda(t),x''(t),\mu(t)\big)\big),\quad\forall t\in I,$$
$$\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)\quad\forall t\in I,$$

де

$$\delta(x,y,z)=\begin{cases}x, & y<x,\\ y, & x\leqslant y\leqslant z,\\ z, & z<y,\end{cases}$$

випливає, що $\varphi(t)\leqslant x'(t)\leqslant\psi(t)$, $\lambda(t)\leqslant x''(t)\leqslant\mu(t)$ $\forall t\in I$. Тоді існує хоча б один розв'язок $x(t)$ задачі (6), причому є оцінки

$$\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t),\quad\varphi(t)\leqslant x'(t)\leqslant\psi(t),\quad\lambda(t)\leqslant x''(t)\leqslant\mu(t)\quad\forall t\in I.$$

Доведення. Визначимо для $(t,x,x',x'')\in I\times\mathbb{R}^3$ функцію $F(t,x,x',x'')$ так:

$$F(t,x,x',x'')=f\big(t,\delta\big(\alpha(t),x,\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),x',\psi(t)\big),\delta\big(\lambda(t),x'',\mu(t)\big)\big)+$$
$$+\delta\big(0,x-\beta(t),1\big)-\delta\big(0,\alpha(t)-x,1\big).$$

Покажемо, що функція $F(t,x,y,z)$ задовольняє умову (L). Ввівши позначення $\tilde{x}=\delta(\alpha,x,\beta)$, $\tilde{y}=\delta(\varphi,y,\psi)$, $\tilde{F}(z)=F(t,x,y,z)$, $\tilde{f}(z)=f(t,\tilde{x},\tilde{y},z)$, запишемо очевидну рівність

$$\tilde{F}(z_1) - \tilde{F}(z_2) = \begin{cases} \tilde{f}(z_1) - \tilde{f}(z_2), & \lambda \leqslant z_i \leqslant \mu, \ i = 1,2; \\ \tilde{f}(\lambda) - \tilde{f}(z_2), & z_1 < \lambda, \ \lambda \leqslant z_2 \leqslant \mu; \\ \tilde{f}(\lambda) - \tilde{f}(\mu), & z_1 < \lambda, \ z_2 > \mu; \\ \tilde{f}(z_1) - \tilde{f}(\lambda), & \lambda \leqslant z_1 \leqslant \mu, \ z_2 < \lambda; \\ \tilde{f}(z_1) - \tilde{f}(\mu), & \lambda \leqslant z_1 \leqslant \mu, \ z_2 > \mu; \\ 0, & z_i < \lambda, \ i = 1,2; \\ 0, & z_i > \mu, \ i = 1,2. \end{cases}$$

Враховуючи, що функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умову (L) у випадку, коли $\lambda \leqslant z_i \leqslant \mu$ $(i = 1,2)$, відразу одержимо нерівність $|\tilde{F}(z_1) - \tilde{F}(z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, $L \in (0,1)$. Для $z_1 < \lambda$, $\lambda \leqslant z_2 \leqslant \mu$ матимемо $|\tilde{F}(z_1) - \tilde{F}(z_2)| \leqslant L|\lambda - z_2| < L|z_1 - z_2|$. Аналогічно одержимо виконання умови Ліпшиця для всіх інших випадків. Оскільки функція $F(t,x,x',x'')$ неперервна і обмежена для $(t,x,x',x'') \in I \times \mathbb{R}^3$, то крайова задача

$$x'' = F(t,x,x',x''), \quad l_0\big(x(a),x'(a)\big) = 0, \quad l_1\big(x(b),x'(b)\big) = 0 \tag{8}$$

має розв'язок згідно з лемою. Позначимо його через $u(t)$. Покажемо, що $\alpha(t) \leqslant u(t)$ $\forall t \in I$.

Припустимо протилежне. Нехай $t_0 \in I$ – точка, в якій $\alpha(t_0) > u(t_0)$, $\alpha'(t_0) = u'(t_0)$. Тоді

$$\begin{gathered} u''(t_0) = f\big(t_0, \delta\big(\alpha(t_0), u(t_0), \beta(t_0)\big), \delta\big(\varphi(t_0), u'(t_0), \psi(t_0)\big), \delta\big(\lambda(t_0), u''(t_0), \mu(t_0)\big)\big) + \\ + \delta\big(0, u(t_0) - \beta(t_0), 1\big) - \delta\big(0, \alpha(t_0) - u(t_0), 1\big) = \\ = f\big(t_0, \alpha(t_0), \alpha'(t_0), \delta\big(\lambda(t_0), u''(t_0), \mu(t_0)\big)\big) - \delta\big(0, \alpha(t_0) - u(t_0), 1\big) \leqslant \\ \leqslant \alpha''(t_0) - \delta\big(0, \alpha(t_0) - u(t_0), 1\big) < \alpha''(t_0). \end{gathered}$$

Одержана нерівність засвідчує, що різниця $\alpha(t) - u(t)$ не може мати додатного максимуму всередині інтервалу I. Тому в крайній точці $t = a$ з припущень $\alpha(a) > u(a)$, $\alpha(a) - u(a) > \alpha(b) - u(b)$ необхідно випливає $\alpha'(a) < u'(a)$. Аналогічно в точці $t = b$ з припущень $\alpha(b) > u(b)$, $\alpha(b) - u(b) > \alpha(a) - u(a)$ необхідно випливає нерівність $\alpha'(b) > u'(b)$.

Покажемо, що нерівність $\alpha(a) > u(a)$ не може виконуватися. Справді, використовуючи умови 3), нерівність $\alpha'(a) < u'(a)$ і крайові умови (8), одержимо

$$\begin{gathered} 0 \geqslant a_0\alpha(a) - b_0\alpha'(a) - A = a_0\alpha(a) - b_0\alpha'(a) - \\ -a_0u(a) + b_0u'(a) = a_0\big(\alpha(a) - u(a)\big) - b_0\big(\alpha'(a) - u'(a)\big) > 0. \end{gathered}$$

Ця суперечність засвідчує, що необхідно $u(a) \geqslant \alpha(a)$. Аналогічно доводиться нерівність $u(b) \geqslant \alpha(b)$. Отже, оцінка $\alpha(t) \leqslant u(t)$ $\forall t \in I$ доведена. Так само доводиться нерівність $u(t) \leqslant \beta(t)$ $\forall t \in I$.

З одержаних оцінок для $u(t)$ і означення функцій δ і F випливає, що $u(t)$ задовольняє рівняння

$$u''(t_0) = f\big(t, u(t), \delta\big(\varphi(t), u', \psi(t)\big), \delta\big(\lambda(t), u'', \mu(t)\big)\big),$$

причому $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$ $\forall t \in I$. Тоді з умови 6) випливає, що $\varphi(t) \leqslant u'(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda(t) \leqslant u''(t) \leqslant \mu(t)$ $\forall t \in I$, і тому $u(t)$ є розв'язком задачі (6). Теорему доведено.

Доведемо дві теореми, які дають достатні умови для виконання вимог 4)–6) теореми 2.

Теорема 3. *Функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умови 4)–6) теореми 2, якщо існують функції α, $\beta \in C^2(I)$ і неперервні функції $k(x) \geqslant 0$, $\omega(y) > 0$, $\gamma(z) \geqslant 0$, $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, $t \in I$, $y \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}$ такі, що*

$$|f(t,x,x',x'')| \leqslant k(x)\omega(|x'|)\gamma(x''), \quad t \in I, \quad \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t), \quad x', \ x'' \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

причому рівняння

$$\nu = \gamma_0\big(k_0\omega_0(M(\nu))\nu\big) \tag{10}$$

має хоча б один додатний розв'язок ν і

$$\int_\rho^\infty \frac{y\,dy}{\omega(y)} > \nu_0[\max_{t\in I} K\big(\beta(t)\big) - \min_{t\in I} K\big(\alpha(t)\big)], \tag{11}$$

де $\nu = \nu_0$ – найменший додатний розв'язок рівняння (10),

$$K'(x) = k(x), \quad \rho = \max\big\{|\alpha(b) - \beta(a)|/(b-a), \, |\alpha(a) - \beta(b)|/(b-a)\big\},$$
$$\gamma_0(\overline{N}) = \max_{z\in[-\overline{N},\overline{N}]} \gamma(z), \quad k_0 = \max_{x\in[\alpha(t),\beta(t)],\, t\in I} k(x), \quad \omega_0(M) = \max_{|y|\leqslant N(M)} \omega(|y|),$$
$$N(M) = \max\big\{M, \max_{t\in I}|\alpha'(t)|, \max_{t\in I}|\beta'(t)|\big\} + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0,$$

а $M = M(\nu)$ знаходимо з рівності

$$\int_\rho^M \frac{y\,dy}{\omega(y)} = \nu[\max_{t\in I} K\big(\beta(t)\big) - \min_{t\in I} K\big(\alpha(t)\big)]. \tag{12}$$

Зауваження 2. Якщо $\gamma(0) = 0$ і, отже, $\gamma_0(0) = 0$, то з (9) випливає, що $f(t,x,y,0) \equiv 0$, а це означає, що крайова задача (6) має розв'язок у вигляді лінійної функції t. Надалі цей тривіальний випадок не будемо брати до уваги, вважаючи, що $f(t,x,y,0) \not\equiv 0$.

Доведення теореми 3. Нехай $\nu = \nu_0$ – найменший додатний розв'язок рівняння (10),

$$N = \max\big\{M, \max_{t\in I}|\alpha'(t)|, \max_{t\in I}|\beta'(t)|\big\} + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0,$$

$\overline{N} = k_0\omega_0(M)\nu_0$, де M знаходимо з рівності (12) при $\nu = \nu_0$. Прийнявши, що $\varphi \equiv -N$, $\psi \equiv N$, $\lambda \equiv -\overline{N}$, $\mu \equiv \overline{N}$, бачимо, що умови 4) і 5) теореми 2 виконуються. Доведемо, що виконується також умова 6).

Нехай $u(t)$, $t \in I$ – розв'язок рівняння

$$u'' = f\big(t, u(t), \delta(-N, u'(t), N), \delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big), \tag{13}$$

який задовольняє нерівність

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t) \quad \forall t \in I. \tag{14}$$

Покажемо, що є оцінки

$$-N < u'(t) < N, \quad -\overline{N} \leqslant u''(t) \leqslant \overline{N} \quad \forall t \in I. \tag{15}$$

Відзначимо, що знайдеться така точка $t_0 \in I$, що $|u'(t_0)| \leqslant \rho$. Справді, припустивши, наприклад, що $|u'(t)| > \rho \; \forall t \in I$, одержимо,

$$u(b) - u(a) > \rho \int_a^b dt = \rho(b-a) = \max\{|\alpha(b) - \beta(a)|, |\alpha(a) - \beta(b)|\},$$

а це неможливо з врахуванням припущення (14). Аналогічну суперечність одержуємо, якщо $|u'(t)| < -\rho \; \forall t \in I$.

Доведемо нерівність

$$|u'(t)| < N \quad \forall t \in I. \tag{16}$$

Припустимо протилежне. Оскільки $|u'(t_0)| \leqslant \rho < N$, то необхідно існує така точка $t_* \in I$, що $u'(t_*) = N$, а також точка $t_1 \in I$, де $u'(t_1) = \rho$. Можемо вважати, що $t_1 < t_*$ (інакше ми зробили б заміну t на $-t$, від чого умови (9)–(11) не змінюються). Крім того, вважатимемо, що $u'(t) \in [\rho, N]$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_*$ (інакше ми взяли б менший інтервал, який володіє цією властивістю). Тоді на відрізку $[t_1, t_*]$ з (13), з врахуванням властивостей функції δ та умови (9), маємо

$$u'' = f\big(t, u(t), u'(t), \delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big) \leqslant k\big(u(t)\big)\omega\big(u'(t)\big)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big)$$

або

$$\frac{u''(t)u'(t)}{\omega\big(u'(t)\big)} \leqslant k\big(u(t)\big)u'(t)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big). \tag{17}$$

Інтегруючи (17) від $t = t_1$ до $t = t_*$ і роблячи в першому інтегралі заміну $u'(t) = y$, а в другому $u(t) = z$, одержимо

$$\int_\rho^N \frac{y\,dy}{\omega(y)} \leqslant \int_{t_1}^{t_*} k\big(u(t)\big)u'(t)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big)\,dt \leqslant \gamma_0(\overline{N}) \int_{t_1}^{t_*} k\big(u(t)\big)u'(t)\,dt =$$

$$= \gamma_0(\overline{N}) \int_{u(t_1)}^{u(t_*)} k(z)\,dz \leqslant \gamma_0(\overline{N})[\max_{t\in I} K\big(\beta(t)\big) - \min_{t\in I} K\big(\alpha(t)\big)] =$$

$$= \nu_0[\max_{t\in I} K\big(\beta(t)\big) - \min_{t\in I} K\big(\alpha(t)\big)].$$

Оскільки $N > M$, то це суперечить умові (12). Отже, оцінку (16) доведено. Аналогічно одержуємо нерівність $u'(t) > -N \; \forall\, t \in I$. Враховуючи, що $u'(t) \in (-N, N)$, запишемо рівняння (13) у вигляді

$$u'' = f\big(t, u(t), u'(t), \delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big) \quad \forall\, t \in I,$$

звідки з врахуванням умов (9) і (10) одержимо

$$|u''(t)| \leqslant k(u)\omega(|u'|)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big) \leqslant k_0\omega_0(M)\gamma_0(\overline{N}) = k_0\omega_0(M)\nu_0 = \overline{N} \; \forall t \in I.$$

Отже, доведення оцінок (15) і теореми 3 завершено.

Теорема 4. *Функція $f(t,x,x',x'')$ задовольняє умови 4)–6) теореми 2, якщо існують функції α, $\beta \in C^2(I)$ і неперервні функції $R(t) \geqslant 0$ $\forall t \in I$, $\omega(y) > 0$ $\forall y \geqslant 0$, $\gamma(z) \geqslant 0$ $\forall z \in \mathbb{R}$ такі, що*

$$|f(t,x,x',x'')| \leqslant R(t)\omega(|x'|)\gamma(x''), \quad t \in I, \quad \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t), \quad x', \ x'' \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

причому рівняння

$$\nu = \gamma_0\big(A_0\omega_0(M(\nu))\nu\big) \quad (19)$$

має хоча б один додатний розв'язок ν і

$$\int_\rho^\infty \frac{dy}{\omega(y)} > \nu_0 \int_a^b R(t)\,dt,$$

де $\nu = \nu_0$ – найменший додатний розв'язок рівняння (19), $A_0 = \max\limits_{t\in I} a(t)$, ρ, $\gamma_0(\overline{N})$, $\omega_0(M)$, $N(M)$ – ті самі, що в теоремі 3, а $M = M(\nu)$ знаходимо з рівності

$$\int_\rho^M \frac{dy}{\omega(y)} = \nu \int_a^b R(t)\,dt. \quad (20)$$

Доведення. Нехай ν_0 – найменший додатний розв'язок рівняння (19),

$$N = \max\big\{M, \max_{t\in I}|\alpha'(t)|, \max_{t\in I}|\beta'(t)|\big\} + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \text{const} > 0,$$

$\overline{N} = A_0\omega_0(M)\nu_0$, де M знаходимо з рівності (20) при $\nu = \nu_0$. Прийнявши $\varphi \equiv -N$, $\psi \equiv N$, $\lambda \equiv -\overline{N}$, $\mu \equiv \overline{N}$, бачимо, що умови 4) і 5) теореми 2 виконуються. Покажемо, що виконується умова 6). Припускаючи протилежне і міркуючи як у доведенні теореми 3, знайдемо відрізок $[t_1, t_*] \subseteq I$, де $u'(t) \in [\rho, N]$ при $t \in [t_1, t_*]$.

Тоді з умови (18) випливає

$$\frac{u''(t)}{\omega\big(u'(t)\big)} \leqslant R(t)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big).$$

Інтегруючи цю нерівність від $t = t_1$ до $t = t_*$, одержимо нерівність

$$\int_\rho^N \frac{dy}{\omega(y)} \leqslant \int_{t_1}^{t_*} R(t)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big)\,dt \leqslant \gamma_0(\overline{N}) \int_a^b R(t)\,dt = \nu_0 \int_a^b R(t)\,dt,$$

яка суперечить рівнянню (20), і доводить оцінку $u'(t) < N$ $\forall t \in I$. Аналогічно одержуємо нерівність $u'(t) > -N$ $\forall$ $t \in I$. Міркуючи як в доведенні теореми 3, одержимо оцінку

$$|u''(t)| \leqslant a(t)\omega(|u'|)\gamma\big(\delta(-\overline{N}, u''(t), \overline{N})\big) \leqslant A_0\omega_0(M)\gamma_0(\overline{N}) = A_0\omega_0(M)\nu_0 = \overline{N}\,\forall t \in I,$$

яка завершує доведення теореми 4.

Зауваження 3. Будемо казати, що функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умову (A), якщо існує число $h \geqslant 0$, таке, що

$$xf(t,x,0,z) \geqslant 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant h. \quad (A)$$

Якщо в крайовій задачі (6) $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ і функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умову (A), то умови 1)–3) теореми 2 виконуються для будь-яких $\lambda(t)$, $\mu(t) \in C(I)$. Щоб переконатися в правильності цього твердження, достатньо прийняти $\alpha \equiv -c_1$, $\beta \equiv c_1$, де $c_1 = \max\{h, |A|/a_0, |B|/a_1\}$.

Сформулюємо наслідки, які випливають з теорем 2, 3 і зауваження 3.

Наслідок 1. *Якщо функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умови (L), (A) і для будь-якого $\overline{M} \geqslant 0$ існують стала $c \geqslant 0$ $\left(c = c(\overline{M})\right)$ та неперервна функція $\gamma(z) \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}$ такі, що виконується умова*

$$|f(t,x,y,z)| \leqslant c(1+y^2)\gamma(z) \quad \forall (t,x,y,z) \in I \times [-\overline{M}, \overline{M}] \times \mathbb{R}^2, \tag{21}$$

причому рівняння

$$\nu = \gamma_0\left(c[1 + \left(\varepsilon_0 + \sqrt{(1+\rho^2)e^{4\overline{M}\nu} - 1}\right)^2]\nu\right) \tag{22}$$

має хоча б один додатний розв'язок ν, де $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$, $\rho = 2\overline{M}/(b-a)$, $\gamma_0(\tau) = \max\limits_{z \in [-\tau,\tau]} \gamma(z)$, то розв'язок задачі (6) існує для $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ і будь-яких A, $B \in \mathbb{R}$.

Справді, згідно з зауваженням 3, умови 1)–3) теореми 2 виконуються. Умова (21) забезпечує розбіжність інтеграла в (11). Рівність (12) записується у вигляді

$$\int\limits_{\rho}^{M} \frac{y\,dy}{1+y^2} = 2\overline{M}\nu,$$

звідки $M = M(\nu) = \sqrt{(1+\rho^2)e^{4\overline{M}\nu} - 1}$, тому рівняння (10) набуває вигляду (22), і з теореми 3 випливає виконання умов 4)–6) теореми 2.

Наслідок 2. *Якщо функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє умови (L), (A) і для будь-якого $\overline{M} \geqslant 0$ існує неперервна функція $\gamma(z) \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}$ така, що виконується умова*

$$|f(t,x,y,z)| \leqslant \gamma(z) \quad \forall (t,x,y,z) \in I \times [-\overline{M}, \overline{M}] \times \mathbb{R}^2,$$

причому рівняння $\nu = \gamma_0(\nu)$, де $\gamma_0(\tau) = \max\limits_{z \in [-\tau,\tau]} \gamma(z)$, має хоча б один додатний розв'язок ν, то розв'язок задачі (6) існує для $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ і будь-яких A, $B \in \mathbb{R}$.

Щоб переконатися в правильності цього твердження, треба використати зауваження 3, теорему 3 при $k(x) = \omega(|y|) \equiv 1$, коли рівняння (10) записується як $\nu = \gamma_0(\nu)$, і теорему 2.

Зазначимо, що рівняння $\nu = \gamma_0(\nu)$ має єдиний додатний розв'язок, якщо $\gamma(0) \neq 0$ і функція $\gamma_0(\tau)$ (визначена і неперервна для $\tau \geqslant 0$) задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L \in (0,1)$. Тому, наприклад, функція

$$f(t,x,y,z) = g(t,x,y)\ln\left((x^2+1)|z| + \sqrt{(x^2+1)^2(z^2+1) + \lambda_0}\right), \quad (t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3,$$

де $\lambda_0 = \mathrm{const} > 0$, $g(t,x,y) \in C(I \times \mathbb{R}^2)$, $xg(t,x,0) \geqslant 0$ $\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}$, $|g(t,x,y)| \leqslant 1$ $\forall (t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^2$, задовольняє умови наслідку 2. Справді, $xf(t,x,0,z) \geqslant 0$

$\forall(t,x,z)\in I\times\mathbb{R}^2,$

$$\forall\overline{M}>0\quad |f(t,x,y,z)|\leqslant\ln\left((\overline{M}^2+1)|z|+\sqrt{(\overline{M}^2+1)^2(z^2+1)+\lambda_0}\right)$$
$$\forall(t,x,y,z)\in I\times[-\overline{M},\overline{M}]\times\mathbb{R}^2,$$
$$\gamma_0(z)=\gamma(z)=\ln\left((\overline{M}^2+1)|z|+\sqrt{(\overline{M}^2+1)^2(z^2+1)+\lambda_0}\right)\geqslant 0.$$

Оскільки $|\partial f/\partial z|<1$, $|\gamma_0'(z)|<1$ для $z\neq 0$, то міркуючи як в п.6 праці [2], доходимо висновку, що функції $f(t,x,y,z)$ і $\gamma_0(z)$ задовольняють умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L\in(0,1)$.

Використовуючи запропонований в [4, с.40–42] метод, який дає змогу доводити існування розв'язку задач з нелінійними крайовими умовами за допомогою розв'язків простіших крайових задач, одержимо теорему існування розв'язку крайової задачі

$$\begin{gathered} x''=f(t,x,x',x''),\\ P\big(x(a),x(b),x'(a)\big)=0,\quad Q\big(x(a),x(b),x'(b)\big)=0, \end{gathered}\tag{23}$$

де $f\in C(I\times\mathbb{R}^3)$, P, $Q\in C(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 5. *Нехай f задовольняє умову (L) і умови 1), 2), 4)–6) теореми 2. Нехай, крім того, $P(z_1,z_2,z_3)$ не зростає за z_2, z_3, а $Q(z_1,z_2,z_3)$ не зростає за z_1 і не спадає за z_3, причому*

$$P\big(\alpha(a),\alpha(b),\alpha'(a)\big)\leqslant 0\leqslant P\big(\beta(a),\beta(b),\beta'(a)\big),$$
$$Q\big(\alpha(a),\alpha(b),\alpha'(b)\big)\leqslant 0\leqslant P\big(\beta(a),\beta(b),\beta'(b)\big).$$

Тоді існує хоча б один розв'язок задачі (23).

Доведення є аналогічним до доведення теореми 6 [4, с.41–42].

---

1. *Жерновий Ю.В.* Про єдиність розв'язку двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С.64–74.
2. *Жерновий Ю.В.* Про розв'язність задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.80–90.
3. *Король І.І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – Ужгород, 1996.
4. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE TWO-POINT PROBLEMS FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER DERIVATIVE

Yu. Zhernovy

Ivan Franko National University of Lviv

Conditions of existence of solutions of the boundary problems for the equation $x'' = f(t, x, x', x'')$ with continuous and unbounded function f, linear and nonlinear boundary conditions are obtained with the help of the method of upper and lower functions.

Key words: *ordinary differential equations, boundary problem.*

Стаття надійшла до редколегії 22.05.2000

Прийнята до друку 28.12.2000