ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.139–143

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.139–143

УДК 517.946+511.37

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Володимир Ільків

Національний університет "Львівська політехніка"

Розглядається задача знаходження розв'язку $u = u(t,x)$ системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$L(\partial/\partial t, D) \equiv \sum_{|s|\leqslant n} A_s(t) D_1^{s_1} \dots D_p^{s_p} \partial^{s_0} u/\partial t^{s_0} = f(t,x), \tag{1}$$

що задовольняє двоточкові крайові нелокальні умови

$$\nu \partial^j u/\partial t^j \big|_{t=0} - \mu \partial^j u/\partial t^j \big|_{t=T} = \varphi_j(x), \; j = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

де $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ – параметри, $T > 0$, $s = (s_0, s_1, \dots, s_p)$, $|s| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$, $D = (D_1, \dots, D_p)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$ $(j = \overline{1,p})$. Вважаємо, що змінна $t \in [0,T]$, змінна $x = (x_1, \dots, x_p)$ належить p-вимірному тору. Матриці $A_s(t)$ є квадратними розміру m і неперервними за змінною t на відрізку $[0,T]$, матриця $A_{n,0,\dots,0} = I$ (I– одинична матриця).

Задача (1), (2) для однорідних рівнянь та систем, тобто при $f = 0$ розглядали у працях [1 – 3].

Нехай $\mathbb{E}_q$ $(q \in \mathbb{R})$ – гільбертовий простір функцій, який отримали в результаті поповнення множини тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \psi(k) e^{ikx}$ за нормою $||\varphi||^2_{\mathbb{E}_q} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} e^{2q\widetilde{k}} |\psi(k)|^2$, де $k = (k_1, \dots, k_p)$, $kx = (k_1x_1 + \dots + k_px_p)$, $\widetilde{k} = (1 + k_1^2 + \dots + k_p^2)^{1/2}$.

Якщо компоненти вектор-функції належать простору $\mathbb{E}_q$, то вважаємо, що вектор належить $\mathbb{E}_q$; квадрат його норми є сумою квадратів норм компонент вектора. Введемо також псевдодиференціальні оператори (ПДО) [4] $F(D)$ за формулою $F(D)\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\psi(k)e^{ikx}$, де $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi(k)e^{ikx} \in \mathbb{E}_q$, а $F(k)$ – послідовність комплексних чисел. Бієктивна відповідність $F(D) \leftrightarrow F(k)$ дає змогу перенести властивості чисел на оператори $F(D)$. Зокрема, якщо $F(D)$ – матриця з елементами $F_{ij}(D)$, то "нормою" цієї ПДО-матриці буде оператор $\sqrt{\mathrm{tr}[F^*(D)F(D)]} = \Big(\sum\limits_{i,j} |F_{ij}(D)|^2\Big)^{1/2}$, де $|\cdot|$ – абсолютне значення, tr – операція визначення сліду матриці, $F^*(D)$ – матриця з елементами $\overline{F_{ji}(D)}$ (ермітово спряжена з $F(D)$ матриця).

Оператор $\tilde{D}$, який відповідає послідовності $\tilde{k}$ $(k \in \mathbb{Z}^p)$, пов'язує норми в просторах $\mathbb{E}_q$ і $\mathbb{E}_0$ за формулою $||\varphi||^2_{\mathbb{E}_q} = ||e^{q\tilde{D}}\varphi||^2_{\mathbb{E}_0}$.

Нехай $u(t,x)$ задачі (1), (2), тоді справджується нерівність

$$\sum_{j=0}^{n} ||\tilde{D}^{n-j}\partial^j u/\partial t^j||^2_{\mathbb{E}_q} = ||v||^2_{\mathbb{E}_q} + \sum_{|s|\leqslant n,\, s_0<n} ||A_s\tilde{D}^{s_0-n}D_1^{s_1}\dots D_p^{s_p}v_{s_0}||^2_{\mathbb{E}_q} + \\ + ||f||^2_{\mathbb{E}_q} \leqslant C_1||v||^2_{\mathbb{E}_q} + ||f||^2_{\mathbb{E}_q}, \tag{3}$$

де $v = \mathrm{col}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, $v_j = \tilde{D}^{n-j}\partial^j u/\partial t^j$ $(j = \overline{0, n-1})$, $C_1 > 0$ – деяка стала. Крім того, вектор v є розв'язком нелокальної крайової задачі для системи першого порядку

$$\partial v/\partial t = \tilde{D}l(t,\hat{D})v + \tilde{D}\Phi, \qquad \nu v(0,x) - \mu v(T,x) = Z\varphi(x), \tag{4}$$

де $Z=\mathrm{diag}(\tilde{D}^n I, \dots, \tilde{D}^2 I, \tilde{D}I)$, $\varphi=\mathrm{col}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, $\Phi=\mathrm{col}(0,\dots,0,f)$, $\hat{D} = (D/\tilde{D}, I/\tilde{D})$. Матриця $l(t,\xi)$ системи (4) складається з блоків $l_{ij}(t,\xi)$ $(i,j = \overline{1,n})$, причому ненульовими блоками є $l_{i,i+1}(t,\xi) = I$ $(i = \overline{1, n-1})$ та $l_{n,s_0+1}(t,\xi) = -\sum_{|s|\leqslant n} A_s(t)\xi_1^{s_1}\dots\xi_p^{s_p}\xi_{p+1}^{n-|s|}$ $(s_0 = \overline{0, n-1})$. Вона визначена і неперервна на компакті $[0,T]\times K$, де $K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{p+1} : \xi_{p+1} \geqslant 0, \xi_1^2 + \dots + \xi_{p+1}^2 = 1\right\}$, в якому надалі розглядаємо змінні t і ξ. Для доведення і побудови розв'язку задачі (1), (2) достатньо знайти і оцінити розв'язок $v(t,x)$ задачі (4) та використати нерівність (3).

Нехай $E(t,\xi)$ – фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь $dE/dt = l(t,\xi)E/\xi_{p+1}$ при $\xi_{p+1} \neq 0$, $t \in [0,T]$ така, що $E(0,\xi) = I$, тоді правильна теорема.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб число ν не належало точковому спектру оператора $\mu E(t,\hat{D})$.*

За умови теореми задача (4) має розв'язок $v(t,x)$ у просторі тригонометричних поліномів [5, с.109]

$$v(t,x)=E(t,\hat{D})[\nu-\mu E(T,\hat{D})]^{-1}\Big(Z\varphi(x) + \nu\tilde{D}\int_0^t Y(0,\tau,\hat{D})\Phi(\tau,x)\,d\tau + \\ + \mu\tilde{D}\int_t^T Y(T,\tau,\hat{D})\Phi(\tau,x)\,d\tau\Big), \tag{5}$$

де $Y(t,\tau,\xi) = E(t,\xi)E^{-1}(\tau,\xi)$. Очевидно, що $Y(t,\tau,\xi)$ також фундаментальна матриця, для якої $Y(\tau,\tau,\xi) = I$ (еволюційний оператор). Нехай $F(t,\hat{D}) = \mathrm{tr}[E^*(t,\hat{D})E(t,\hat{D})]$, $F(t,\tau,\hat{D}) = \mathrm{tr}[Y^*(t,\tau,\hat{D})y(t,\tau,\hat{D})]$ і $F_1(\hat{D}) = \mathrm{tr}[(\overline{\nu} - \overline{\mu}E^*(T,\hat{D}))(\nu - \mu E(T,\hat{D}))]$, тоді

$$||v||^2_{\mathbb{E}_q} \leqslant \left\|\sqrt{F(t,\hat{D})F_1(\hat{D})}Z\varphi(x)\right\|^2_{\mathbb{E}_q} + |\nu|\int_0^t \left\|\tilde{D}\sqrt{F(t,\hat{D})F_1(\hat{D})F(0,\tau,\hat{D})}\times\right. \\ \left.\times f(\tau,x)\right\|^2_{\mathbb{E}_q} d\tau + |\mu|\int_t^T \left\|\tilde{D}\sqrt{F(t,\hat{D})F_1(\hat{D})F(T,\tau,\hat{D})}f(\tau,x)\right\|^2_{\mathbb{E}_q} d\tau. \tag{6}$$

Знайдемо оцінки зверху для п.д.о. $F(t,\hat{D})$, $F(t,\tau,\hat{D})$ і $F_1(\hat{D})$.

Лема 1. *Нехай $Y(t,\xi)$ – фундаментальна нормована одиничною матрицею в точці $t=\tau$ матриця системи $dY/dt = l(t,\xi)Y/\xi_{p+1}$, тоді правильні рівності*

$$\operatorname{tr}[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)] \leqslant nm\exp\Big[2\int\limits_{\tau}^{t}\Lambda(\theta,\xi)\,d\theta/\xi_{p+1}\Big] \quad \text{при } t\geqslant\tau, \tag{7}$$

$$\operatorname{tr}[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)] \leqslant nm\exp\Big[2\int\limits_{\tau}^{t}\lambda(\theta,\xi)\,d\theta/\xi_{p+1}\Big] \text{ при } t\leqslant\tau, \tag{8}$$

де $2\lambda(t,\xi)$ і $2\Lambda(t,\xi)$ відповідно мінімальне і максимальне власне значення ермітової матриці $l^*(t,\xi)+l(t,\xi)$.

Доведення. Оскільки $Y(t,\xi)$ – розв'язок матричного диференціального рівняння з матрицею $l(t,\xi)/\xi_{p+1}$, то

$$\xi_{p+1}(d/dt)\operatorname{tr}\big[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)\big] = \operatorname{tr}\big[Y^*(t,\xi)\big(l^*(t,\xi)+l(t,\xi)\big)Y(t,\xi)\big].$$

Отже, згідно з нерівностями $2\lambda(t,\xi)I \leqslant l^*(t,\xi)+l(t,\xi) \leqslant 2\Lambda(t,\xi)I$ отримуємо

$$2\lambda(t,\xi)\operatorname{tr}\big[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)\big] \leqslant \xi_{p+1}(d/dt)\operatorname{tr}\big[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)\big] \leqslant$$
$$\leqslant 2\Lambda(t,\xi)\operatorname{tr}\big[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)\big].$$

Інтегруючи ці нерівності і враховуючи, що $nm{=}\operatorname{tr}[I] = \operatorname{tr}\big[Y^*(t,\xi)Y(t,\xi)\big]$, маємо шукані нерівності (7) і (8).

З леми 1 випливає, що

$$F(t,\hat{D}) \leqslant nm\exp\Big[2\tilde{D}\int\limits_{0}^{t}\Lambda(\theta,\hat{D})\,d\theta\Big],$$

$$F(0,\tau,\hat{D}) \leqslant nm\exp\Big[-2\tilde{D}\int\limits_{0}^{\tau}\lambda(\theta,\hat{D})\,d\theta\Big],$$

$$F(T,\tau,\hat{D}) \leqslant nm\exp\Big[-2\tilde{D}\int\limits_{\tau}^{T}\Lambda(\theta,\hat{D})\,d\theta\Big].$$

З оцінки норми оберненої матриці [6, с.42] одержуємо

$$F_1(\hat{D}) \leqslant (n^2(nm-1)!)^2(|\nu|+|\mu|)^{2(nm-1)}\frac{\max(F(0,\hat{D}),F(T,\hat{D}))}{|\det(\nu-\mu E(T,\hat{D}))|^2}. \tag{9}$$

Для оцінки оператора $\det(\nu-\mu E(T,\hat{D}))$ використовуємо метричний підхід [7, с.4-6]. Вважаємо, що параметр ν належить до одиничного круга B з центром у початку координат комплексної площини.

Лема 2. *Для довільного числа $\varepsilon>0$ і параметра $\nu\in B\setminus B_\varepsilon$, де міра множини B_ε менша ε, правильна оцінка*

$$|\det(\nu-\mu E(T,\hat{D}))| \geqslant C(r)\varepsilon^{nm/2}\tilde{D}^{-r} \tag{10}$$

для довільного $r > pnm/2$ *при* $C(r) = 1/\Big(nm\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-2r/nm}\Big)^{nm/2}$.

Доведення. Нехай B_ε є множиною тих $\nu \in B$, для яких не виконується нерівність (10), і $\lambda_j(k)$ $(j = \overline{1,nm},\ k \in \mathbb{Z}^p)$ – власні значення матриці $\mu E(T, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$, тоді нерівність $|\nu - \lambda_j(k)| < \varepsilon^{1/2}C^{1/nm}(r)\widetilde{k}^{-r/nm}$ виконується для множини $B_j(k) \subset B$, міра якої менша ніж $\varepsilon\pi C^{2/nm}(r)\widetilde{k}^{-2r/nm}$. З рівності

$$\det(\nu - \mu E(T, \hat{D})) = \prod_{j=1}^{nm}(\nu - \lambda_j(k))$$

випливає, що $B_\varepsilon \subset B'_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\bigcup_{j=1}^{nm} B_j(k)$. Очевидно, що міра множини B'_ε не перевищує ε. Лему доведено.

Використовуючи оцінки (9) і (10) та оцінки для операторів $F(t,\hat{D})$ і $F(t,\tau,\hat{D})$, із нерівності (6) отримуємо оцінку

$$\|v(t,x)\|^2_{\mathbb{E}_q} \leqslant C_2\Big(\Big\|F^{mn/2}(\hat{D})\tilde{D}^r Z\varphi\Big\|^2_{\mathbb{E}_q} + \max_{0\leqslant\tau\leqslant T}\Big\|F^{mn/2}(\hat{D})\tilde{D}^{r+1}\times$$
$$\times \max\Big(\sqrt{F(0,\tau,\hat{D})}, \sqrt{F(T,\tau,\hat{D})}\Big) f(\tau,x)\Big\|^2_{\mathbb{E}_q}\Big),$$

де

$$F(\hat{D}) \max_{0\leqslant\tau\leqslant T} F(\tau,\hat{D}), \quad C_2 = n^2(nm-1)!(1 + 2T/C(r)\varepsilon^{nm/2})(|\nu| + |\mu|)^{nm},$$

та оцінку

$$\|v(t,x)\|^2_{\mathbb{E}_q} \leqslant C_3\Big(\Big\|e^{\Lambda_1\tilde{D}}\tilde{D}^r Z\varphi\Big\|^2_{\mathbb{E}_q} + \max_{0\leqslant\tau\leqslant T}\Big\|e^{\Lambda_2\tilde{D}}\tilde{D}^{r+1}f(\tau,x)\Big\|^2_{\mathbb{E}_q}\Big), \qquad (11)$$

де

$$C_3 = (nm)^{(nm+1)/2}C_2, \quad \Lambda_1 = nm\max_{\tau,k}\int_0^\tau \Lambda(\theta, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\,d\theta,$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + \max_{\tau,k}\Big(-\int_0^\tau \lambda(\theta, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\,d\theta, \int_\tau^T \Lambda(\theta, k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\,d\theta\Big).$$

Теорема 2. *Нехай* $\tilde{D}^{n-j+r}\varphi_j \in \mathbb{E}_{q+\Lambda_1}$ *для* $j = \overline{0,n-1}$ *і для всіх* $t \in [0,T]$ $\tilde{D}^{r+1}f(t,\cdot) \in \mathbb{E}_{q+\Lambda_2}$ *та* $f(t,\cdot) \in \mathbb{E}_q$, *тоді для кожного* $\nu \in B \setminus B_\varepsilon$ *існує єдиний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі (1), (2), який належить простору* $\mathbb{E}_q$ *для всіх* $t \in [0,T]$.

Доведення теореми випливає з леми та нерівностей (3) і (11).

---

1. *Илькив В.С.* Нелокальная краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами// Тез. междунар. конф. "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". Нальчик, 1996. – С.41–42.

2. *Ількив В.С., Новіков Л.О., Пелех Я.М.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними та змінними коефіцієнтами// Вісн. держ. ун-ту

"Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С.107–109.

3. *Ількив В.С., Дасюк Я.І., Салига Б.О.* Крайова задача з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами// Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С.104–106.
4. *Илькив В.С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами// Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т.26. – N 11. – С.1962–1971.
5. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972.
7. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONHOMOGENEOUS SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

V.Il'kiv

National University "Lvivska polytechnica"

We consider time nonlocal two-point boundary value problem for general systems of differential equations with continuous coefficients in cartesian product of time interval and space multidimensional torus:

$$L(\partial/\partial t, D) \equiv \sum_{|s|\leqslant n} A_s(t) D_1^{s_1} \dots D_p^{s_p} \partial^{s_0} u/\partial t^{s_0} = f(t,x),$$

$$\nu \partial^j u/\partial t^j\big|_{t=0} - \mu \partial^j u/\partial t^j\big|_{t=T} = \varphi_j(x),\ j = \overline{0, n-1},$$

where ν, μ are komplex parameters and matrix $A_{n,0,\dots,0}(t)$ is unique m-matrix.

Existence and uniqueness conditions for solution of this problem are investigated. The estimates for small denominators which appear by using the metrical theorie of diophantine approximations are obtained.

Key words: *nonlocal problem, system of partial differential equations.*

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2000

Прийнята до друку 28.12.2000