ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.144–152

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.144–152

УДК 517.95

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ПОЛІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Петро Каленюк, Зіновій Нитребич, Ярослав Плешівський
Національний університет "Львівська політехніка"

Крайова задача з багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціального рівняння з частинними похідними є природним узагальненням задачі Коші для цього ж рівняння [1,2] і загалом є некоректною крайовою задачею [1]. Проте існують коректні постановки багатоточкових задач [3].

У цій праці, яка є дальшим розвитком результатів праць [4,5], на основі узагальненого методу відокремлення змінних [3] в області $t \in (0, \xi)$, $x \in \mathbb{R}^s$ вивчається коректна багатоточкова задача для полілінійної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$L^m\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) \equiv \left(E_n\frac{\partial}{\partial t} - A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^m U(t,x) = F(t,x), \tag{1}$$

$$U(t_k, x) = 0, \qquad k = \overline{1,m}, \tag{2}$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор-матриця порядку n, елементами якої є довільні диференціальні поліноми $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j = \overline{1,n}$ зі сталими коефіцієнтами; $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_m < \xi \leqslant +\infty$; $u(t,x) = \left(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x)\right)^\tau$, $F(t,x) = \left(F_1(t,x), F_2(t,x), ..., F_n(t,x)\right)^\tau$; $s \in \mathbb{N}$; τ – символ транспонування; E_n – одинична матриця порядку n.

Зауважимо, що задача (1),(2) у випадку $m = 1$ є задачею Коші для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом. Таку задачу досліджували у працях [6,7]. У випадку $n = 1$ та $m > 1$ задача (1),(2) є багатоточковою задачею для окремого полілінійного диференціального рівняння з частинними похідними, яку вивчали у праці [4].

У цій праці розглядається випадок, коли для задачі (1),(32) $m, n \in \mathbb{N}$, причому $m > 1$, $n > 1$.

Диференціальним виразам $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j = \overline{1,n}$, поставимо у відповідність їхні символи $a_{ij}(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}^s$ і розглянемо матрицю $A(\nu) = \|a_{ij}(\nu)\|_{i,j=\overline{1,n}}$ та її характеристичний поліном

$$\det L(\lambda, \nu) \equiv \varphi(\lambda, \nu) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\nu)\lambda^{n-j}. \tag{3}$$

Тут $\xi_j(\nu)$ – сума головних мінорів порядку j матриці $A(\nu)$.

Позначимо через $\tilde{L}(\lambda, \nu)$ приєднану матрицю для $L(\lambda, \nu)$, а через $W(t, \nu)$ – розв'язок задачі Коші

$$\varphi\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) W(t, \nu) = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d^j W}{dt^j}\right|_{t=0} = \delta_{j,n-1}, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{5}$$

де $\delta_{j,n-1}$ – символ Кронекера.

Крім того, розглянемо такі поліноми степеня $m-1$:

$$\omega_j(t) = \frac{\left.\prod\limits_{m \geqslant i > k \geqslant 1} (t_i - t_k)\right|_{t_j = t}}{\prod\limits_{m \geqslant i > k \geqslant 1} (t_i - t_k)}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Легко бачити, що $\omega_j(t_k) = \delta_{jk}$.

Доведемо, що формальний частковий розв'язок неоднорідної системи рівнянь (1) визначається формулою

$$U^\tau(t, x) = F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left.\left\{ \frac{\exp[\lambda t + \nu \cdot x]}{\varphi^m(\lambda, \nu)} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu))^m \right\}\right|_{\lambda=0, \nu=0}, \tag{7}$$

де $\nu \cdot x = \sum\limits_{i=1}^{s} \nu_i x_i$.

Справді,

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, x) =$$

$$= L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left.\left\{ \frac{\exp[\lambda t + \nu \cdot x]}{\varphi^m(\lambda, \nu)} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu))^m \right\}\right|_{\lambda=0, \nu=0} \right]^\tau =$$

$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left.\left\{ \frac{1}{\varphi^m(\lambda, \nu)} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu))^m L^\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) (E_n e^{(\lambda t + \nu \cdot x)}) \right\}\right|_{\lambda=0, \nu=0} \right]^\tau =$$

$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left.\left\{ \frac{\exp[\lambda t + \nu \cdot x]}{\varphi^m(\lambda, \nu)} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu))^m L^\tau(\lambda, \nu) \right\}\right|_{\lambda=0, \nu=0} \right]^\tau =$$

$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left.\left\{ \frac{\exp[\lambda t + \nu \cdot x]}{\varphi^m(\lambda, \nu)} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu))^{m-1} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu) L^\tau(\lambda, \nu)) \right\}\right|_{\lambda=0, \nu=0} \right]^\tau =$$

$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left.\left\{ \frac{\exp[\lambda t + \nu \cdot x]}{\varphi^{m-1}(\lambda, \nu)} (\tilde{L}^\tau(\lambda, \nu))^{m-1} \right\}\right|_{\lambda=0, \nu=0} \right]^\tau.$$

Застосовуючи m разів матричний диференціальний вираз $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ до вектор-функції $U(t,x)$, визначеної рівністю (7), маємо

$$L^m\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = L^{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) =$$
$$= L^{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[\lambda t+\nu\cdot x]}{\varphi^{m-1}(\lambda,\nu)}(\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu))^{m-1}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau =$$
$$= \underbrace{\ldots\ldots}_{m-2} = L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[\lambda t+\nu\cdot x]}{\varphi(\lambda,\nu)}\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu)\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau =$$
$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{1}{\varphi(\lambda,\nu)}\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu)L^\tau\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)(E_n\exp[\lambda t+\nu\cdot x])\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau =$$
$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[\lambda t+\nu\cdot x]}{\varphi(\lambda,\nu)}\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu)L^\tau(\lambda,\nu)\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau =$$
$$= \left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{E_n\exp[\lambda t+\nu\cdot x]\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau =$$
$$= \left[\exp[\lambda t+\nu\cdot x]F^\tau(t,x)|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau = F(t,x).$$

Отже, формула (7) справді визначає формальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь (1).

"Підправимо" частковий розв'язок (7) системи рівнянь (1) розв'язками однорідної системи рівнянь

$$L^m\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = 0 \tag{8}$$

так, щоб одержати формальний розв'язок задачі (1),(2). Такий "підправлений" розв'язок має вигляд

$$U^\tau(t,x) = F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]\Phi(\lambda,\nu,t)\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=0}, \tag{9}$$

де

$$\Phi(\lambda,\nu,t) = \frac{(\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)}\Bigg\{E_n\exp[\lambda t] -$$
$$- \sum_{i=1}^m \omega_i(t)\exp[\lambda t_i]\tilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(E_nW(t-t_i,\nu))\Bigg\}, \tag{10}$$

$\omega_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, – поліноми (6), $W(t-t_i,\nu)$ – значення розв'язку $W(t,\nu)$ задачі Коші (4), (5), у якому замість t приймемо $t-t_i$.

Той факт, що розв'язок (9) "підправлено" саме розв'язками однорідної системи рівнянь (8) доводиться цілком аналогічно як у працях [6,7].

Доведемо, що розв'язок (9) системи рівнянь (1) задовольняє тривіальні m - точкові умови (2). Для цього покажемо, що

$$\Phi(\lambda,\nu,t_k) = 0, \qquad k=\overline{1,m}. \tag{11}$$

Обчислюємо

$$\Phi(\lambda,\nu,t_k) =$$
$$= \frac{(\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)} \left\{ E_n e^{\lambda t_k} - \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t_k) e^{\lambda t_i} \tilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(E_n W(t-t_i,\nu))\Big|_{t=t_k} \right\} =$$
$$= \frac{(\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)} \left\{ E_n e^{\lambda t_k} - \sum_{i=1}^{m} \delta_{ik} e^{\lambda t_i} \tilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(E_n W(t-t_i,\nu))\Big|_{t=t_k} \right\} =$$
$$= \frac{(\tilde{L}^\tau(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)} \left\{ E_n e^{\lambda t_k} - e^{\lambda t_k} \tilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(E_n W(t-t_k,\nu))\Big|_{t=t_k} \right\}.$$

Оскільки елементи головної діагоналі оператор-матриці $\tilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)$ є зведеними диференціальними поліномами степеня $n-1$, а усі інші недіагональні елементи цієї оператор-матриці є диференціальними поліномами нижчого за $n-1$ степеня, тоді з початкових умов (5) маємо

$$\tilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(E_n W(t-t_k,\nu))\Big|_{t=t_k} = E_n,$$

звідки випливає виконання умов (11).

Отже, вектор-функція (9) як сума часткового розв'язку (7) неоднорідної системи рівнянь (1) та розв'язків однорідної системи рівнянь (8) є формальним розв'язком задачі (1),(2).

Теорема 1. *Матриця $\Phi(\lambda,\nu,t)$, визначена рівністю (10), для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{C}^s$ є цілою стосовно $\lambda,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_s$ матрицею, тобто елементи матриці $\Phi(\lambda,\nu,t)$ є цілими щодо $\lambda,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_s$ функціями.*

Доведення. Розглянемо матричне звичайне диференціальне рівняння, побудоване за системою рівнянь (8)

$$L^m\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu) = 0. \tag{12}$$

Нехай $\{T_j(t,\nu)\}_{j=\overline{0,m-1}}$ – нормальна фундаментальна система матричних розв'язків рівняння (12), тобто сукупність матриць n-го порядку, які задовольняють матричне рівняння (12) та початкові умови:

$$\frac{d^k T_j}{dt^k}(0,\nu) = \delta_{kj}, \qquad k,j = \overline{0,m-1}.$$

Крім того, нехай $\left\{\hat{T}_i(t,\nu)\right\}_{i=\overline{1,m}}$ – сукупність матричних розв'язків рівняння (12), які задовольняють m-точкові умови $\hat{T}_i(t_k,\nu) = \delta_{ik}, \quad i,k=\overline{1,m}$.

Легко переконатися, що елементи останньої сукупності матричних розв'язків рівняння (12) мають вигляд

$$\hat{T}_i(t,\nu) = \omega_i(t)\tilde{L}\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(E_n W(t-t_i,\nu)), \qquad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Зауважимо, що елементи цих матриць є цілими щодо $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ функціями. Це випливає з того, що елементи приєднаної матриці $\tilde{L}(\lambda, \nu)$ є цілими стосовно $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ функціями, а функція $W(t, \nu)$ як розв'язок диференціального рівняння (4) з цілими коефіцієнтами, що задовольняє початкові умови (5), є теж цілою стосовно $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ функцією за теоремою Пуанкаре про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів [8].

Між елементами двох введених сукупностей матричних розв'язків рівняння (12) виконуються співвідношення:

$$T_j(t,\nu) = \sum_{i=1}^{m} \hat{T}_i(t,\nu) T_j(t_i,\nu), \qquad j = \overline{0, m-1}. \tag{14}$$

Матрицю (10) з урахуванням (13) можна записати у вигляді

$$\Phi(\lambda,\nu,t) = \frac{(\tilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)} \left\{ E_n \exp[\lambda t] - \sum_{i=1}^{m} \exp[\lambda t_i] \hat{T}_i^{\tau}(t,\nu) \right\}. \tag{15}$$

Доведемо, що матрицю (10) можна подати також так:

$$\Phi(\lambda,\nu,t) = \frac{(\tilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)} \left\{ F(\lambda,\nu,t) - \sum_{i=1}^{m} F(\lambda,\nu,t_i) \hat{T}_i^{\tau}(t,\nu) \right\}, \tag{16}$$

де

$$F(\lambda,\nu,t) = E_n \exp[\lambda t] - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j T_j^{\tau}(t,\nu).$$

Справді, використовуючи рівності (14), маємо

$$F(\lambda,\nu,t) - \sum_{i=1}^{m} F(\lambda,\nu,t_i)\hat{T}_i^{\tau}(t,\nu) = E_n \exp[\lambda t] - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j T_j^{\tau}(t,\nu) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (E_n \exp[\lambda t_i] - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j T_j^{\tau}(t_i,\nu)) \hat{T}_i^{\tau}(t,\nu) =$$

$$= E_n \exp[\lambda t] - \sum_{i=1}^{m} \exp[\lambda t_i] \hat{T}_i^{\tau}(t,\nu) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j \left\{ T_j^{\tau}(t,\nu) - \sum_{i=1}^{m} T_j^{\tau}(t_i,\nu) \hat{T}_i^{\tau}(t,\nu) \right\} =$$

$$= E_n \exp[\lambda t] - \sum_{i=1}^{m} \exp[\lambda t_i] \hat{T}_i^{\tau}(t,\nu).$$

Отже, праві частини рівностей (15) і (16) визначають ту саму матрицю $\Phi(\lambda,\nu,t)$.

Розглянемо тепер матрицю $G(\lambda,\nu,t) = \frac{(\tilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu))^m}{\varphi^m(\lambda,\nu)} F(\lambda,\nu,t)$. Безпосередньо можна перевірити, що матриця $G^{\tau}(\lambda,\nu,t)$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$L^m\left(\frac{d}{dt},\nu\right) G^{\tau} = E_n \exp[\lambda t], \tag{17}$$

$$\left.\frac{d^k G^{\tau}}{dt^k}\right|_{t=0} = 0, \qquad k = \overline{0, m-1}. \tag{18}$$

Оскільки елементи матричного диференціального виразу $L^m\left(\frac{d}{dt},\nu\right)$ є цілими щодо $\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ функціями і права частина матричного рівняння (17) є цілою щодо λ матрицею, тоді за теоремою Пуанкаре [8] маємо, що $G^\tau(\lambda,\nu,t)$ як розв'язок задачі Коші (17),(18) є цілою щодо $\lambda,\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ матрицею, а, отже, і $G(\lambda,\nu,t)$ є теж цілою стосовно $\lambda,\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ матрицею.

Оскільки матрицю $\Phi(\lambda,\nu,t)$ можна зобразити у вигляді

$$\Phi(\lambda,\nu,t)=G(\lambda,\nu,t)-\sum_{i=1}^{m}G(\lambda,\nu,t_i)\hat{T}_i^\tau(t,\nu),$$

де $G(\lambda,\nu,t),\hat{T}_i^\tau(t,\nu), i=\overline{1,m},$ – матриці, елементами яких є цілі щодо $\lambda,\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ функції, тоді й елементи матриці $\Phi(\lambda,\nu,t)$ є цілими стосовно $\lambda,\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ функціями. Теорему доведено.

Позначимо через A_∞ клас аналітичних на $\mathbb{R}^1$ функцій, комплексні продовження в $\mathbb{C}^1$ яких є цілими функціями довільного скінченного порядку. Через D_θ позначимо клас аналітичних на $\mathbb{R}^s$ функцій $\varphi(x_1,x_2,...,x_s)$ таких, що для $z\in\mathbb{C}^s$ функції $\varphi(z)$ є: цілими функціями порядку нижчого за $\frac{\theta}{\theta-1}$ за сукупністю змінних, якщо $\theta>1$; цілими функціями довільного скінченного порядку за сукупністю змінних, якщо $\theta=1$; цілими функціями довільного порядку, якщо $0\leqslant\theta<1$.

Клас однозначної розв'язності задачі (1),(2) виділяє теорему.

Теорема 2. *Нехай у системі рівнянь (1) $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор-матриця порядку n $(n\in N\setminus\{1\})$, елементами якої є довільні диференціальні поліноми зі сталими коефіцієнтами, і θ – число, визначене рівністю*

$$\theta=\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\frac{\deg\xi_i(\nu)}{i}\right\}, \tag{19}$$

де $\xi_i(\nu), i=\overline{1,n},$ – коефіцієнти характеристичного полінома (3), $\deg\xi_i(\nu)$ – степінь полінома $\xi_i(\nu)$ за сукупністю змінних $\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$. Якщо для кожного $i=\overline{1,n}$ функція $F_i(t,x)$ як функція змінної t належить до A_∞ і для кожного фіксованого $t\in(0,\xi)$ належить до D_θ, тоді у класі вектор-функцій $U(t,x)=(U_1(t,x),U_2(t,x),...,U_n(t,x))^\tau$, компоненти $U_i(t,x), i=\overline{1,n},$ яких для кожного фіксованого $t\in(0,\xi)$ належать до D_θ, існує єдиний розв'язок задачі (1),(2). Цей розв'язок задачі можна подати у вигляді (9).

Доведення. Припускаючи належність $F_i(t,x), i=\overline{1,n}$ до виділеного в умові теореми 2 класу аналітичних функцій, визначимо диференціальні вирази безмежного порядку $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right), i=\overline{1,n}$ через відповідні ряди Маклорена, формально замінивши t на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$.

Легко бачити, що елементи матриці $\Phi(\lambda,\nu,t)$ як цілі щодо λ функції мають перший порядок, а як цілі стосовно $\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ мають той самий порядок, що й функція $W(t,\nu)$. Як розв'язок задачі (4),(5) ціла функція $W(t,\nu)$ за сукупністю параметрів $\nu_1,\nu_2,...,\nu_s$ має порядок, не вищий за θ, де θ– число, визначене рівністю (19) [9].

Для того щоб дія диференціальних виразів безмежного порядку $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $i = \overline{1,n}$ на відповідні цілі стосовно $\lambda, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ функції у формулі (9) була визначена коректно, на символи цих виразів, тобто на праві частини системи рівнянь (1) треба, крім аналітичності, накладати певні обмеження щодо їх зростання на безмежності. Треба вимагати, щоб для кожного $t \in (0, \xi)$ та $i = \overline{1,n}$ функції $F_i(t,x)$ належали до D_θ і як функції змінної t належали до A_∞ (див.[11], а також [10] для $s = 1$).

Результат дій $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right), i = \overline{1,n}$ на відповідні цілі функції згідно з формулою (9) належатиме для довільного $t \in (0, \xi)$ до D_θ [10,11].

Вектор-функція, визначена формулою (9), допускає диференціювання скінченного порядку за змінною t та змінними $x_1, x_2, ..., x_s$. Це випливає з того, що функції, які є елементами матриці $\Phi(\lambda, \nu, t) \exp[\nu \cdot x]$, після такого диференціювання є знову цілими, причому першого порядку за параметром λ та порядку не вище θ за сукупністю параметрів $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$, а тому дії диференціальних виразів безмежного порядку $F_i\left(\dfrac{\partial}{\partial\lambda}, \dfrac{\partial}{\partial\nu}\right), i = \overline{1,n}$ на відповідні продиференційовані функції будуть теж визначені коректно.

Отже, клас вектор-функцій, компоненти яких для кожного фіксованого $t \in (0, \xi)$ належать до D_θ , є класом існування розв'язку (9) задачі (1),(2).

Виділений клас вектор-функцій є одночасно і класом єдиності розв'язку задачі (1),(2). Справді, задачу (1),(2) можна, очевидно, звести до m-точкової задачі для системи mn диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом. Одержана система диференціальних рівнянь матиме зведений порядок, який дорівнює θ, а відповідна m-точкова задача для цієї системи матиме безмежний тип (поняття типу крайової задачі введено в праці [12]). Використовуючи результати роботи [13] для зведеної задачі, можна стверджувати, що розв'язок зведеної m-точкової задачі є єдиним у таких просторах функцій залежно від числа θ:

- у просторі вектор-функцій, компоненти яких для довільного фіксованого $t \in (0, \xi)$ задовольняють оцінку

$$|V_j(t,x)| \leqslant A_j \exp[B_j\, |x|^{\theta'}], \qquad j = \overline{1, mn}, \tag{20}$$

де $A_j, B_j \in \mathbb{R}^1_+, |x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{s} |x_i|\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, якщо $\theta > 1$;

- у просторі вектор-функцій, компоненти яких для довільного $t \in (0, \xi)$ задовольняють оцінку (20) для довільного скінченного $\theta' > 0$ і довільних $A_j, B_j \in \mathbb{R}^1_+$, якщо $\theta = 1$;

- у просторі вектор-функцій, компоненти яких для довільного $t \in (0, \xi)$ зростають як завгодно швидко, якщо $0 \leqslant \theta < 1$.

Оскільки n компонент серед mn компонент розв'язку зведеної задачі визначають розв'язок задачі (1),(2), тоді простір вектор-функцій $U(t,x) = (U_1(t,x), U_2(t,x), ...\ ..., U_n(t,x))^\tau$, компоненти яких для довільного фіксованого $t \in (0, \xi)$ задовольняють оцінку (20), якщо $\theta > 1$, задовольняють оцінку (20) для довільного скінченного θ', якщо $\theta = 1$, і зростають як завгодно швидко, якщо $0 \leqslant \theta < 1$ є класом єдиності розв'язку задачі (1),(2). Цей простір вектор-функцій значно ширший за виділений клас існування розв'язку (9) задачі (1),(2).

Отже, клас вектор-функцій, компоненти яких для довільного $t \in (0, \xi)$ належать до D_θ, є класом однозначної розв'язності задачі (1),(2). У виділеному класі розв'язок задачі(1),(2) може бути поданий у вигляді (9). Теорему доведено.

---

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
2. *Нитребич З.М.* Про граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С.132–138.
3. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К., 1993.
4. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Побудова розв'язку задачі типу Вале-Пусена для полілінійного диференціального рівняння з частинними похідними // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – N 242. – С.44–45.
5. *Каленюк П.І., Нитребич З.М., Плешівський Я.М.* Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1999. – N 364. – С.223–227.
6. *Каленюк П.І., Нитребич З.М., Сохан П.Л.* Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для однорідної системи рівнянь із частинними похідними безмежного порядку. – Львів, 1995. – 44 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N1-95).
7. *Нитребич З.М., Сохан П.Л.* Операційний метод розв'язання задачі Коші для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Мат. Міжнар. матем. конф., присв. пам'яті Г. Гана. - Чернівці, 1995. – С. 254–261.
8. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М., 1980.
9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М., 1958.
10. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М., 1981.
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып.2. Пространства основных и обобщенных функций. – М., 1958.
12. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб. – 1969. – Т.79. – N 2. – С. 293–304.
13. *Борок В.М., Перельман М.А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – N 8. – С.29–34.

MULTIPOINT PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS POLYLINEAR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

P. Kalenyuk, Z. Nytrebych, Ya. Pleshivsky

National University "Lvivska polytechnica"

On the basis of a generalized separation of variables scheme we propose an operator method of the solution construction of the multipoint problem for inhomogeneous polylinear system of partial differential equations.

Key words: *polylinear system of partial differential equations.*

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2000
Прийнята до друку 28.12.2000