ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.153–159

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.153–159

УДК 517.956

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ГУСТОМУ ПЕРІОДИЧНОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3:2:2

Тарас Мельник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

1. Вступ та формулювання задачі. Під густим періодичним з'єднанням типу m:k:d ми розуміємо область в $\mathbb{R}^n$, одержану приєднанням великої кількості ε-періодично розміщених тонких областей до зовнішньої частини границі (зона з'єднання) деякої області Ω_0 (тіло з'єднання), де ε – малий додатний параметр, а тип з'єднання m:k:d свідчить: m ($m \leqslant n$) – про граничну розмірність тіла з'єднання, k – про граничну розмірність зони з'єднання, d – про граничну розмірність приєднувальних тонких областей.

Предметом дослідження крайових задач у таких з'єднаннях є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків цих задач, коли $\varepsilon \to 0$, тобто коли число приєднувальних областей необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля. Огляд праць з цієї тематики можна знайти в [1–3].

Модельне з'єднання Ω_ε типу 3:2:2 є об'єднанням області

$$\Omega_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < \gamma(x_1),\ 0 < x_3 < d\right\}$$

та великої кількості N тонких пластин $G(\varepsilon) = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} G_j(\varepsilon)$,

$$G_j(\varepsilon) = \{x :\ |x_1 - \varepsilon(j+1/2)| < \varepsilon h/2,\ -f(\varepsilon(j+1/2)) < x_2 < 0,\ 0 < x_3 < d\},$$

тобто $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G(\varepsilon)$, де функція γ є додатною, неперервно диференційованою функцією на відрізку $[0,a]$; h – деяке фіксоване число з інтервалу $(0,1)$; N – велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = a/N$ є малим дискретним параметром, який характеризує відстань між тонкими пластинами та їхню товщину; функція $f(x_1)$, $x_1 \in [0,a]$, яка описує довжину пластини, є додатною і належить до простору $C^1([0,a])$.

У з'єднанні Ω_ε розглядається спектральна задача

$$\begin{aligned} -\Delta_x u(\varepsilon,x) =& \lambda(\varepsilon)\ u(\varepsilon,x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ u(\varepsilon,x) =& 0, \quad x \in Q_\varepsilon, \\ \partial_\nu u(\varepsilon,x) =& 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial_\nu$ – зовнішня нормальна похідна,

$$Q_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} \{x :\ |x_1 - \varepsilon(j+1/2)| < \varepsilon h/2, \quad x_2 = -f(\varepsilon(j+1/2)), \quad 0 < x_3 < d\}$$

– об'єднання основ тонких пластин, де задаються умови Діріхле.

Для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує злічена кількість скінченократних власних значень $0 < \lambda_1(\varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \ldots \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ задачі (1); відповідні власні функції $\{u_n(\varepsilon,\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$, які належать Соболєвському простору $H^1(\Omega_\varepsilon)$, нормуємо так: $(u_n, u_m)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = \delta_{n,m}$, де $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера.

Мета дослідження – вивчити асимптотичну поведінку власних значень (ВЗ) $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$ і відповідних власних функцій (ВФ) $\{u_n\}$ задачі (1), коли $\varepsilon \to 0$, та знайти інші граничні точки спектра цієї задачі.

Зрозуміло, що ВЗ та відповідні ВФ задачі (1) можна подати у вигляді

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{\pi^2 m^2}{d^2} + \widetilde{\lambda}(\varepsilon),\ u(\varepsilon,x) = \cos\left(\frac{\pi^2 m^2}{d^2} x_3\right)\ \widetilde{u}(\varepsilon,x'),\ x' = (x_1,x_2),\ m \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

де $\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ та $\widetilde{u}$ є ВЗ та ВФ відповідної спектральної задачі в плоскому з'єднанні Ω'_ε типу 2:1:1. Тут і надалі під множиною Υ' розумітимемо проекцію області Υ на площину Ox_1x_2.

Спектральну задачу Неймана в плоскому з'єднанні типу 2:1:1 вивчали в праці [1] за умови, що тонкі стержні мають однакову довжину, тобто $f \equiv \mathrm{const}$. У випадку, коли стержні мають різну довжину, структура граничного спектра усередненої спектральної задачі значно складніша (див.[4,5]) і питання про поведінку ВЗ та ВФ задачі (1) біля граничного спектра усередненої задачі до цього часу залишалось недослідженим. Саме цьому питанню ми приділяємо найбільшу увагу. Деякі результати цієї праці автор анонсував у [6].

2. Усереднена задача та її спектр. Використовуючи асимптотичні методи усереднення в тонких областях, аналогічно до [1] для з'єднання типу 2:1:1, визначаємо усереднену спектральну задачу

$$\begin{aligned}
-\Delta_x v^+(x) &= \mu\, v^+(x), \quad x \in \Omega_0,\\
\partial_\nu v^+(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega_0 \cap \{x_2 > 0\},\\
-\Delta_{x_2x_3} v^-(x) &= \mu\, v^-(x), \quad x \in D_f \times (0,d),\\
v^-(x) &= 0, \quad x \in Q_f,\\
\partial_{x_3} v^-(x',0) &= \partial_{x_3} v^-(x',d) = 0, \quad x' \in \Omega'_0 \cup D_f,\\
v^+(x_1,0,x_3) &= v^-(x_1,0,x_3), \quad (x_1,x_3) \in K := (0,a) \times (0,d),\\
\partial_{x_2} v^+(x_1,0,x_3) &= \partial_{x_2} v^-(x_1,0,x_3), \quad (x_1,x_3) \in K,
\end{aligned} \quad (3)$$

де μ – спектральний параметр (очевидно, що $\mu > 0$) і перший член в асимптотичному розвиненні для ВЗ задачі (1); $D_f = \{x' : 0 < x_1 < a,\ -f(x_1) < x_2 < 0\}$; $Q_f = \{x : 0 < x_1 < a,\ x_2 = -f(x_1),\ 0 < x_3 < d\}$. Два останніх співвідношення в задачі (3) – це результат узгодження внутрішнього та зовнішнього розвинень для ВФ $u(\varepsilon,\cdot)$ задачі (1) в зоні з'єднання K. Варто зазначити, що диференціювання в області $D_f \times (0,d)$ відбувається тільки за змінними x_2 та x_3, і не задається жодних крайових умов на вертикальних сторонах цієї області ($x_1 = 0$ та $x_1 = a$).

З результатів праць [4,5] випливає, що для довільного $x_1 \in [0,a]$ власні значення задачі

$$-\Delta_{x_2x_3} w_{n,m}(x) = \tau_{n,m}(x_1)\ w_{n,m}(x), \quad (x_2,x_3) \in (-f(x_1),0) \times (0,d),$$

$$w_{n,m}(x_1,-f(x_1),x_3) = w_{n,m}(x_1,0,x_3) = 0, \qquad \partial_{x_3} w_{n,m}(x',0) = \partial_{x_3} w_{n,m}(x',d) = 0,$$

належать до граничного спектра усередненої задачі (3) і

$$\sigma_{\lim}(A_0) = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \bigcup_{x_1 \in [0,a]} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \tau_{n,m}(x_1),$$

де A_0 – оператор, що відповідає задачі (3). Оскільки $\tau_{n,m}(x_1) = \pi^2 m^2 d^{-2} + \pi^2 n^2 f^{-2}(x_1)$, то

$$\sigma_{\lim}(A_0) = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\pi^2 m^2 d^{-2} + \pi^2 n^2 f_{\max}^{-2},\, \pi^2 m^2 d^{-2} + \pi^2 n^2 f_{\min}^{-2}\right], \tag{4}$$

де $f_{\max} = \max_{[0,a]} f(x_1)$, $f_{\min} = \min_{[0,a]} f(x_1)$. Звідси випливає, що множина $(0,+\infty) \setminus \sigma_{\lim}(A_0)$ є об'єднанням скінченої кількості інтервалів

$$(0,+\infty) \setminus \sigma_{\lim}(A_0) = \bigcup_{k=0}^{p} J_k, \qquad J_k = \left(\pi^2 k^2 f_{\min}^{-2},\, \pi^2 (k+1)^2 f_{\max}^{-2}\right). \tag{5}$$

Якщо $\mu \in \cup_{k=0}^{p} J_k$, то використовуючи представлення (2), так само як у праці [1], зводимо задачу (3) до спектральної задачі

$$L(\mu)(v) = 0, \qquad v \in H^1(\Omega_0'),$$

для оператор-функції $L(\mu) = (\mu+1)\, A_1 - A_2(\mu) - \mathbb{I}$, де $\mathbb{I}$ – одиничний оператор у $H^1(\Omega_0')$; A_1 – самоспряжений компактний оператор у $H^1(\Omega_0')$, який визначається рівністю

$$(A_1 u, v)_0' = \int_{\Omega_0'} u(x')\, v(x')\, dx', \qquad u, v \in H^1(\Omega_0');$$

і $A_2(\mu)$ – самоспряжена компактна оператор-фукція в $H^1(\Omega_0')$

$$(A_2(\mu) u, v)_0' = h\sqrt{\mu} \int_0^a \cot\left(f(x_1)\sqrt{\mu}\right)\, u(x_1,0) v(x_1,0)\, dx_1, \qquad u, v \in H^1(\Omega_0').$$

Тут $(\cdot,\cdot)_0'$ – скалярний добуток в $H^1(\Omega_0')$. Спектр таких оператор-функцій вивчали в працях [7,8]. Отже, маємо таку теорему.

Теорема 1. *Спектр $\sigma(A_0)$ усередненої задачі (3) складається з граничного спектра $\sigma_{\lim}(A_0)$, який визначається рівністю (4), та точок дискретного спектра*

$$\sigma_d(A_0) = \bigcup_{k=0}^{p} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n^{(k)}; \qquad \left\{\mu_n^{(k)}\right\} \in J_k, \quad k = 0, \dots, p,$$

$$\mu_1^{(k)} \leqslant \dots \leqslant \mu_n^{(k)} \leqslant \dots \to \pi^2 (k+1)^2 f_{\max}^{-2}, \quad n \to +\infty.$$

Зауваження 1. Оскільки для точок спектра задачі (3) є представлення $\mu = \pi^2 n^2 d^{-2} + \widetilde{\mu}$, то в граничному спектрі $\sigma_{\lim}(A_0)$ обов'язково містяться скінченократні власні значення задачі (3)

3. Асимптотичні оцінки. Для спрощення формулювань вважатимемо, що $p = 0$ в (5). Це означає, що $\sigma_{\lim}(A_0) = \left[\pi^2 f_{\max}^{-2}, +\infty\right)$ і

$$\sigma_d(A_0) = \left\{\mu_n^{(0)} : 0 < \mu_1^{(0)} \leqslant \ldots \leqslant \mu_n^{(0)} \leqslant \ldots \to \pi^2 f_{\max}^{-2},\ n \to \infty\right\}.$$

3.1. Наближення для дискретного спектра. Нехай $\mu_n^{(0)} \in \sigma_d(A_0)$ і $v_n^{\pm}$ – відповідна власна функція задачі (3); далі індекси опускають. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що ця власна функція не залежить від x_3. Тоді

$$v^-(x') = v^+(x_1, 0) \sin^{-1}\left(f(x_1)\sqrt{\mu}\right) \sin\left(\sqrt{\mu}(x_2 + f(x_1))\right), \qquad x' \in D^f,$$

а v^+ є відповідною ВФ оператор-функції L. Аналогічно як у праці [1] будуємо апроксимуючу функцію $R(\varepsilon, x')$

$$R(\varepsilon, x') = v^+(x') + \varepsilon\, \chi_0(x_2) \sum_{i=1}^{2} \left(Z_i(\eta) - \delta_{i,2}\eta_2\right)\, \partial_{x_i} v^+(x_1, 0), \quad \eta = \frac{x'}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega_0,$$

$$R(\varepsilon, x') = v^-(x') + \varepsilon \Bigg(Y(\eta_1)\partial_{x_1} v^-(x') + \chi_0(x_2) \sum_{i=1}^{2} \Big(Z_i(\eta) - \delta_{i,1} Y(\eta_1) -$$

$$- \delta_{i,2} h^{-1}\eta_2 \Big)\, \partial_{x_i} v^+(x_1, 0) \Bigg), \quad \eta = \frac{x'}{\varepsilon}, \quad x \in G(\varepsilon),$$

де χ_0 – гладка зрізаюча функція, яка дорівнює 1 в деякому околі зони контакту K; $Y(\eta_1) = -\eta_1 + [\eta_1] + 1/2$; Z_1, Z_2 – 1-періодичні по η_1 гармонічні функції в об'єднанні двох напівобмежених смуг $\Xi^+ = (0, 1) \times (0, +\infty)$ та $\Xi^- = I_h \times (-\infty, 0]$; $I_h := ((1-h)/2,\ (1+h)/2)$. На сторонах цих смуг ці функції задовольняють умови

$$\partial_{\eta_2} Z_i(\eta_1, 0) = 0, \quad \eta_1 \in (0, 1) \setminus I_h; \qquad \partial_{\eta_1} Z_i(\eta) = -\delta_{1,i}, \quad \eta \in \partial\, \Xi^- \setminus I_h.$$

Теореми існування та інші властивості розв'язків таких задач наведено в працях [1–3]. Ми випишемо тільки асимптотику цих функцій на нескінченості

$$Z_1(\eta) = \begin{cases} O\left(\exp(-2\pi\eta_2)\right), \ \eta_2 \to +\infty, \\ -\eta_1 + 1/2 + O\left(\exp(\pi h^{-1}\eta_2)\right), \ \eta_2 \to -\infty, \end{cases}$$

$$Z_2(\eta) = \begin{cases} c_h + \eta_2 + O\left(\exp(-2\pi\eta_2)\right), \ \eta_2 \to +\infty, \\ h^{-1}\eta_2 + O\left(\exp(\pi h^{-1}\eta_2)\right), \ \eta_2 \to -\infty. \end{cases}$$

Легко перевірити, що $R \in H_\varepsilon$, де H_ε – це гільбертовий простір функцій, які належать простору $H^1(\Omega_\varepsilon)$ і мають нульові сліди на Q_ε; скалярний добуток у цьому просторі задається виразом $\langle u, v\rangle_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v\, dx$; $\|\cdot\|_\varepsilon$ – норма породжена цим добутком. З праці [1] випливає теорема.

Теорема 2. *Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та $\delta > 0$ існують додатні константи c, ε_0, що для всіх значень параметра ε з інтервалу $(0, \varepsilon_0)$ маємо*

$$\left|\lambda_n(\varepsilon) - \mu_n^{(0)}\right| \leqslant c\, \varepsilon^{1-\delta}.$$

Нехай $\mu_n^{(0)}$ – просте власне значення задачі (3). Тоді

$$\|R(\varepsilon, \cdot) - \alpha(\varepsilon)\ u_n(\varepsilon, \cdot)\|_\varepsilon \leqslant c_1\, \varepsilon^{1-\delta},$$

де $0 < c_2 \leqslant \alpha(\varepsilon) \leqslant c_3$; *константи* c, c_1, c_2, c_3 *– не залежать від* ε.

Зауваження 2. Якщо $\mu_n^{(0)}$ є кратним власним значенням, то функція $R(\varepsilon,\cdot)$ наближається скінченою лінійною комбінацією відповідних власних функцій задачі (1) (див. [1]).

3.2. Наближення для граничного спектра. Нехай $\mu_0 \in \sigma_{\lim}(A_0)$. Тоді існують $t_0 \in [0,a]$, $m_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $\mu_0 = \pi^2 m_0^2 d^{-2} + \pi^2 n_0^2 f^{-2}(t_0)$. Візьмемо найближчу тонку пластинку $G(\varepsilon,t_0) := G_{j_0}(\varepsilon)$ до точки $(t_0,0,0)$ (якщо існують дві, то одну з них). Побудуємо таке наближення:

$$R_0(\varepsilon,x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/2}\cos\left(\pi m_0 d^{-1}x_3\right)\sin\left(\pi n_0(f^{-1}(\varepsilon(j_0+1/2))\ x_2+1)\right), x \in G(\varepsilon,t_0), \\ 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus G(\varepsilon,t_0). \end{cases}$$

Очевидно, що $R_0 \in H_\varepsilon$. Безпосередньо підрахувавши, переконуємось, що $\|R_0\|_\varepsilon = O(1)$, і

$$\begin{aligned} -\Delta_x R_0(\varepsilon,x) &= \mu_0\ R_0(\varepsilon,x) + b_0(\varepsilon,x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ R_0(\varepsilon,x) &= 0, \quad x \in Q_\varepsilon, \\ \partial_\nu R_0(\varepsilon,x) &= 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon, \\ \partial_{x_2} R_0(\varepsilon,x_1,0,x_3) &= \varepsilon^{-1/2} b_1(x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Gamma(\varepsilon,t_0), \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} b_0(\varepsilon,x) &= -\pi^2 n_0^2\left(f^{-2}(t_0) - f^{-2}(\varepsilon(j_0+1/2))\right)\ R_0(\varepsilon,x), \quad x \in G(\varepsilon,t_0); \\ b_0(\varepsilon,x) &= 0, \qquad x \in \Omega_\varepsilon \setminus G(\varepsilon,t_0); \\ b_1(x_3) &= (-1)^{n_0}\pi n_0 f^{-1}(\varepsilon(j_0+1/2))\cos(\pi m_0 d^{-1}x_3), \\ \Gamma(\varepsilon,t_0) &:= \partial G(\varepsilon,t_0) \cap \{x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_x \Psi_\varepsilon(x) &= b_0(\varepsilon,x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \Psi_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in Q_\varepsilon, \\ \partial_\nu \Psi_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon, \\ \left[\partial_{x_2}\Psi_\varepsilon\right](x_1,0,x_3) &= -\varepsilon^{-1/2} b_1(x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Gamma(\varepsilon,t_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Тут квадратні дужки означають стрибок записаної величини.

Лема 1. *Існує єдиний слабкий розв'язок* $\Psi_\varepsilon \in H_\varepsilon$ *задачі (7) такий, що*

$$\|\Psi_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant C\ \varepsilon^{1/4}.$$

Доведення. Функція $\Psi_\varepsilon \in H_\varepsilon$ називається слабким розв'язком задачі (7), якщо вона задовольняє такій інтегральній тотожності для будь-яких $v \in H_\varepsilon$

$$\langle \Psi_\varepsilon, v\rangle = \int\limits_{G(\varepsilon,t_0)} b_0(\varepsilon,x)\ v(x)\,dx + \varepsilon^{-1/2}\int\limits_{\Gamma(\varepsilon,t_0)} b_1(x_3)\ v(x_1,0,x_3)\,dx_1 dx_3. \tag{8}$$

Оскільки $f \in C^1([0,a])$, то перший доданок у правій частині рівності (8) не більший за величину $c\,\varepsilon\|v\|_\varepsilon$. Враховуючи Лему 1.5 ([9, гл.1]) і нерівність

$$v^2(x_1,0,x_3) \leqslant 2\varepsilon^{-1/2}\int\limits_0^{\gamma_0} v^2(x)\ dx_2 + 2\varepsilon^{1/2}\int\limits_0^{\gamma_0}\left(\partial_{x_2} v^2(x)\right)^2\ dx_2,$$

де $\gamma_0 = \min\limits_{[0,a]} \gamma(x_1)$, отримуємо

$$\left| \varepsilon^{-1/2} \int\limits_{\Gamma(\varepsilon,t_0)} b_1(x_3)\ v(x_1,0,x_3)\, dx_1 dx_3 \right| \leqslant c\, \varepsilon^{1/4} \|v\|_\varepsilon .$$

Отже, права частина (8) задає лінійний неперервний функціонал над простором H_ε, норма якого не більша за величину $c\, \varepsilon^{1/4} \|v\|_\varepsilon$. Застосування теореми Ріса про неперервний функціонал завершує доведення леми.

Визначимо оператор $A_\varepsilon :\ H_\varepsilon \mapsto H_\varepsilon$ рівністю

$$\langle A_\varepsilon u, v\rangle = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x)\ v(x)\, dx, \qquad u,\, v\, \in\, H_\varepsilon.$$

Легко перевірити, що оператор A_ε є самоспряженим, додатним і компактним, а його власними значеннями є величини $\left\{\lambda_n^{-1}(\varepsilon) :\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

За допомогою цього оператора і розв'язку задачі (7), зі співвідношень (6), виводимо операторне рівняння в H_ε

$$R_0\ -\ \Psi_\varepsilon\ =\ \mu_0\, A_\varepsilon\, (R_0)\,,$$

звідки, на підставі леми 2, випливає нерівність

$$\frac{\left\|A_\varepsilon\,(R_0)\ -\ \mu_0^{-1} R_0\right\|_\varepsilon}{\|R_0\|_\varepsilon}\ \leqslant\ c\,\varepsilon^{1/4}.$$

Застосовуючи лему 12 [10] до цієї нерівності, одержимо таку теорему.

Теорема 3. *Для довільного* $\mu_0\, \in\, \sigma_{\lim}\,(A_0)$ *існує власне значення задачі (1) таке, що*

$$\left|\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)\ -\ \mu_0\right|\ \leqslant\ c\ \varepsilon^{1/4}.$$

Існує скінченна лінійна комбінація власних функцій

$$U_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m(\varepsilon)} d_i(\varepsilon)\ u_{n(\varepsilon)+i}(\varepsilon, x)\ , \qquad \|U_\varepsilon\|_\varepsilon = 1\ ,$$

які відповідають всім власним значенням $\lambda^{-1}_{n(\varepsilon)}(\varepsilon),\ \lambda^{-1}_{n(\varepsilon)+1}(\varepsilon),\ \ldots\ ,\ \lambda^{-1}_{n(\varepsilon)+m(\varepsilon)}(\varepsilon)$ *оператора* A_ε *з відрізка* $\left[\mu_0^{-1} - c_1\varepsilon^{1/8},\ \mu_0^{-1} + c_1\varepsilon^{1/8}\right]$ *таке, що*

$$\left\|\frac{R_0}{\|R_0\|_\varepsilon}\ -\ U_\varepsilon\right\|_\varepsilon\ \leqslant\ c_2\ \varepsilon^{1/8}.$$

Теореми 2 та 3 відображають як поводять себе ВЗ задачі (1): при достатньо малих значеннях параметра ε простежується згущення власних значень як біля дискретного спектра $\sigma_d\,(A_0)$, так і біля граничного спектра $\sigma_{\lim}\,(A_0)$ усередненої задачі (3). Теорема 3 доповнює уявлення про асимптотичну поведінку спектра задачі (1). Виявляється, що збіжність $\lambda_n(\varepsilon) \to \mu_n^{(0)}$ $(\varepsilon \to 0)$, яка стверджується в Теоремі 2, не є рівномірною стосовно індексу n. Внаслідок Теореми 3 для будь-якого $\mu_0 \in \sigma_{\lim}\,(A_0)$ існує послідовність ВЗ $\left\{\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)\right\}$ задачі (1) така, що $\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)\ \to\ \mu_0$ $(\varepsilon \to 0)$, при цьому обов'язково індекс $n(\varepsilon) \to +\infty$, коли $\varepsilon \to 0$.

Крім того, якщо $\mu_0 \in \sigma_{\lim}(A_0)$ є ще скінченократним власним значенням задачі (3) (див. зауваження 1), то будуючи наближуючу функцію так само як в п. 3.1, ми отримаємо таку асимптотичну оцінку $\left|\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon) - \mu_0\right| \leqslant c\,\varepsilon^{1-\delta}$.

1. *Мельник Т.А., Назаров С.А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа густого гребешка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1996. – Вып. 19. – С. 138–173.
2. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1 // Math. Methods in the Applied Sci. – 2000. – Vol. 23. – P.321–346.
3. *Mel'nyk T.A.* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Zeitschrift fr Analysis und ihre Anwendungen. – 1999. – Vol. 18. – N 4. – P.953–975.
4. *Fleury F., Sanchez-Palencia* Asymptotic and spectral properties of the acoustic vibrations of body, perforated by narrow channels // Bull. Sci. Math. –1986. – Vol. 2. – N 110. – P.149–176.
5. *Benkaddour A., Sanchez-Hubert J.* Spectral study of a coupled compact-noncompact problem // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 1992. – Vol. 26. – N 6. – P.659–672.
6. *Mel'nyk T. A.* Asymptotics of the Neumann spectral problem solution in a thick junction of type 3:2:2 // International Conf. "Nonlinear differential equations" (Kyiv, 22 – 27 August, 1995). – Book of Abstracts. – P.112.
7. *Мельник Т.А.* Спектральні властивості самоспряжених розривних оператор-функцій // Доповіді АН України. – 1994. – N 12. – С.33–36.
8. *Гринив Р.О., Мельник Т.А.* О сингулярном функционале Рэлея // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – N 1. – С.130–134.
9. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М., 1990.
10. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – Т.12. – N 5. – С.3–192.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN A THICK PERIODIC JUNCTION OF TYPE 3:2:2

T. Mel'nyk

Taras Shevchenko National University of Kyiv

A mixed boundary-value spectral problem in a thick periodic junction, which consists of the junction's body and a large number $N = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$ of thin plates, is considered. The asymptotic behavior of the eigenvalues and the eigenfunctions is investigated as $\varepsilon \to 0$, i.e., when the number of the thin plates infinitely increases and their thickness tends to zero. Special attention is paid to the behavior of the eigenvalues and the eigenfunctions near the essential spectrum of the averaged problem.

Key words: *spectral problem, periodic junction.*

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2000

Прийнята до друку 28.12.2000