ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.160–167 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.160–167*

УДК 517.95

ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ПОХІДНИМИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Марія Пташник

Львівський національний університет імені Івана Франка

У праці розглянуто псевдопараболічну варіаційну нерівність з похідними вищих порядків без початкових умов. Доведено існування та єдиність розв'язку цієї нерівності в класі експоненціально зростаючих при $t \to -\infty$ функцій.

Процес фільтрації рідини в пористому середовищі з тріщинами [1], проходження тепла в гетерогенному середовищі [2] моделюються крайовими задачами для псевдопараболічних рівнянь. У праці [3] показано можливість зведення однофазної задачі Стефана до розв'язування псевдопараболічної варіаційної нерівності. Ф.Скарпіні [4] розглянув лінійну псевдопараболічну нерівність з похідними другого порядку. Задача з початковими і крайовими умовами для псевдопараболічного рівняння з похідними вищих порядків досліджена у праці [5]. Нелінійне псевдопараболічне рівняння розглянув у своїй праці Т.Тінг [6]. Деякі псевдопараболічні рівняння та варіаційні нерівності без початкових умов досліджено у працях [7, 8].

Нехай Ω – обмежена область в R^n з гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай V – замкнений підпростір в $(H^l(\Omega))^N$ і такий, що $(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N \subset V \subset (H^l(\Omega))^N$, V неперервно і щільно вкладений в $L^2(\Omega)$, K – випукла замкнена множина в V, що містить нульовий елемент.

Розглянемо в області $Q_T = \Omega \times (-\infty, T]$ варіаційну нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} \left[\langle M(t)u_t, v-(u+u_t)e^{\lambda t}\rangle + \langle L(t)u, v-(u+u_t)e^{\lambda t}\rangle - \right.$$
$$\left. -\langle F, v-(u+u_t)e^{\lambda t}\rangle\right] dt \geqslant 0, \tau \in (-\infty, T], \tag{1}$$

де оператори L , M і F визначають так:

$L(t) : V \to V^*$ для кожного $t \in (-\infty, T]$ і для довільних $u, v \in V$

$$\langle L(t)u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u(x,t), D^\alpha v(x,t)) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u(x,t), v(x,t))\Big) dx;$$

$M(t): V \to V^*$ для кожного $t \in (-\infty, T]$ і для довільних $u, v \in V$

$$\langle M(t)u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u(x,t), D^{\alpha}v(x,t))dx;$$

для довільних $v \in V$ і $t \in (-\infty, T]$

$$\langle F(t), v\rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant l} (f_{\alpha}, D^{\alpha}v(x,t))dx,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$; $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_{α} – квадратні матриці порядку $N \times N$, $l \geqslant 1$.

Означення. *Під узагальненим розв'язком нерівності (1) розумітимемо таку функцію* u, *що* $u \in C((-\infty, T]; V)$, $ue^{(\lambda t)/2}, u_t e^{(\lambda t)/2} \in L^2((-\infty, T]; V)$, $u + u_t \in K$ *для майже всіх* $t \in (-\infty, T]$ *і задовольняє нерівність (1) для довільних* τ, $-\infty < \tau \leqslant T$ *і для довільної функції* $v \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T]; V), v \in K$ *для майже всіх* $t \in (-\infty, T]$.

Нехай коефіцієнти операторів L і M задовольняють умови

(A): $A_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(Q_T)$, $A_{\alpha\beta,t} \in L^{\infty}(Q_T)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\alpha\beta}(x,t)$ для всіх α, β, $|\alpha| \leqslant l$, $|\beta| \leqslant l$, для $(x,t) \in Q_T$,

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big(a_l \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u|^2 + a_0|u|^2\Big)dx \leqslant \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \Big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u, D^{\alpha}\Big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_\tau}\Big(a^l \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}|^2 + a^0|u|^2\Big)dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \Big(A_{\alpha\beta,t}(x,t)D^{\beta}u, D^{\alpha}\Big)dx \leqslant \int\limits_{\Omega_\tau}\Big(a_1^l \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}|^2 + a_1^0|u|^2\Big)dx$$

для майже всіх $\tau \in (-\infty, T]$, для всіх $u \in V; a_l > 0, a_0 > 0$;

(B) : $B_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(Q_T)$, $B_{\alpha\beta,t} \in L^{\infty}(Q_T)$, $B_{\alpha\beta}(x,t) = B_{\beta,\alpha}(x,t)$, $B_{\alpha\beta}(x,t) = B^*_{\alpha\beta}(x,t)$ для всіх α, β, $|\alpha| \leqslant l$, $|\beta| \leqslant l$, для $(x,t) \in Q_T$,

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big(b_l \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u|^2 + b_0|u|^2\Big)dx \leqslant \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \Big(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u, D^{\alpha}u\Big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_\tau}\Big(b^l \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u|^2 + b^0|u|^2\Big)dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \Big(B_{\alpha\beta,t}(x,t)D^{\beta}u, D^{\alpha}u\Big)dx \leqslant \int\limits_{\Omega_\tau}\Big(b_1^l \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u|^2 + b_1^0|u|^2\Big)dx$$

для майже всіх $\tau \in (-\infty, T]$, для всіх $u \in V; b_l \geqslant 0, b_0 > 0$;

(C) : $C_{\alpha} \in C(-\infty, T; L^{\infty}(\Omega)) \cap L^{\infty}(Q_T)$.

Згідно з наслідком [9, с. 27] ми можемо у просторі $H^l(\Omega)$ використати таку норму:

$$||u||^2_{H^l(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u|^2 + |u|^2\Big)dx.$$

Це означає, зокрема, існування таких сталих μ_1, μ_2, що

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \Big(\mu_1 \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + \mu_2 |u|^2\Big) dx \tag{2}$$

для кожної $u \in V$.

Позначимо

$$C_0 = \sup_{Q_T} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} ||C_\alpha(x,t)||^2.$$

Розглянемо систему нерівностей

$$\begin{cases} 2b_0 - \delta_0 > 0, \\ 2a_l - \lambda(a^l + b^l) - (a_1^l + b_1^l) - \dfrac{2C_0\mu_1}{\delta_0} > 0, \\ 2a_0 - \lambda(a^0 + b^0) - (a_1^0 + b_1^0) - \dfrac{2C_0\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Позначимо через $\Delta_0(\delta_0,\lambda)$ множину всіх додатних розв'язків (δ_0,λ) системи (3), а через $\lambda^0 = \sup\limits_{\Delta_0(\delta_0,\lambda)} \lambda$ у випадку, якщо $\Delta_0(\delta_0,\lambda) \neq \emptyset$. Якщо множина $\Delta_0(\delta_0,\lambda)$ є порожньою, то розглянемо систему нерівностей

$$\begin{cases} 2b_0 - \delta_0 > 0, \\ 2a_l - \lambda(a_l + b_l) - (a_1^l + b_1^l) - \dfrac{2C_0\mu_1}{\delta_0} > 0, \\ 2a_0 - \lambda(a_0 + b_0) - (a_1^0 + b_1^0) - \dfrac{2C_0\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Множину всіх пар (δ_0,λ), $\delta_0 > 0$, $\lambda \leqslant 0$, які задовольняють систему (4), позначимо через $\Delta_1(\delta_0,\lambda)$. Нехай у цьому випадку $\lambda^0 = \sup\limits_{\Delta_1(\delta_0,\lambda)} \lambda$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C). Тоді нерівність (1) не може мати більше одного узагальненого розв'язку при* $\lambda \leqslant \lambda^0$.

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки u_1, u_2 нерівності (1). Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} \langle M(t)u_t^1 + L(t)u^1 - F, v - u^1 e^{\lambda t} - u_t^1 e^{\lambda t}\rangle dx \geqslant 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} \langle M(t)u_t^2 + L(t)u^2 - F, v - u^2 e^{\lambda t} - u_t^2 e^{\lambda t}\rangle dx \geqslant 0. \tag{5}$$

Приймемо, що в (5) $v = \frac{1}{2}(u^1 e^{\lambda t} + u_t^1 e^{\lambda t} - u^2 e^{\lambda t} - u_t^2 e^{\lambda t})$ та додамо їх

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} \langle M(t)u_t^2 - M(t)u_t^1, u^2 e^{\lambda t} + u_t^2 e^{\lambda t} - u^1 e^{\lambda t} - u_t^1 e^{\lambda t}\rangle dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\tau} \langle L(t)u^2 - L(t)u^1, u^2 e^{\lambda t} + u_t^2 e^{\lambda t} - u^1 e^{\lambda t} - u_t^1 e^{\lambda t}\rangle dt \leqslant 0.$$

Позначимо $u = u^2 - u^1$. Проведемо деякі перетворення в останній нерівності. Матимемо (припустивши, що $\Delta_0(\delta_0, \lambda) \neq \emptyset$)

$$\Im_1 = \int\limits_{-\infty}^{\tau} \langle M(t)u_t, u_t e^{\lambda t} + u e^{\lambda t}\rangle dt \geqslant \int\limits_{Q_\tau} \Big(b_l \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 + b_0 |u_t|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \Big(b_l \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + b_0 |u|^2 \Big) e^{\lambda \tau} dx -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Big((\lambda b^1 + b_1^l) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + (\lambda b^0 + b_1^0)|u|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt,$$

$$\Im_2 = \int\limits_{-\infty}^{\tau} \langle L(t)u, u e^{\lambda t} + u_t e^{\lambda t}\rangle dt \geqslant \int\limits_{Q_\tau} \Big(a_l \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + a_0 |u|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \Big(a_l \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + a_0 |u|^2 \Big) e^{\lambda \tau} dx -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Big((\lambda a^l + a_1^l) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + (\lambda a^0 + a_1^0)|u|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt -$$
$$- \frac{C}{\delta_0} \int\limits_{Q_\tau} \Big(\mu_1 \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + \mu_2 |u|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt - \frac{\delta_0}{2} \int\limits_{Q_\tau} (|u|^2 + |u_t|^2) e^{\lambda t} dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\Im_1$ та $\Im_2$, одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(2b_l \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 + (2b_0 - \delta_0)|u_t|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \Big(2a_l - \lambda b^1 - b_1^l - \lambda a^l - a_1^l - \frac{2C\mu_1}{\delta_0} \Big) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \Big(2a_0 - \lambda b^0 - b_1^0 - \lambda a^0 - a_1^0 - \frac{2C\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 \Big) |u|^2 e^{\lambda t} dxdt + \tag{6}$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} \Big((a_l + b_l) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + (a_0 + b_0)|u|^2 \Big) e^{\lambda \tau} dx \leqslant 0.$$

Тоді на підставі (3) і (5) з нерівності (6) одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 + |u|^2) e^{\lambda \tau} \Big) dx \leqslant 0, \tag{7}$$

де τ довільне з $(-\infty, T]$. Звідси випливає, що $u_1 = u_2$ майже скрізь в Q_T.

Розглянемо випадок $\Delta_0(\delta_0, \lambda) = \emptyset$. Нехай $\lambda < 0$. Тоді замість нерівності (6) матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(2b_l \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 + (2b_0 - \delta_0)|u_t|^2 \Big) e^{\lambda t} dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(2a_l-\lambda b_l-b_1^l-\lambda a_l-a_1^l-\frac{2C\mu_1}{\delta_0}\right)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u|^2dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(2a_0-\lambda b_0-b_1^0-\lambda a_0-a_1^0-\frac{2C\mu_2}{\delta_0}-\delta_0\right)|u|^2e^{\lambda t}dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau}\left((a_l+b_l)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u|^2+(a_0+b_0)|u|^2\right)e^{\lambda\tau}dx\leqslant 0.$$

Якщо $\lambda\leqslant\lambda^0$, то на підставі (4) знову одержимо оцінку (7), що й завершує доведення теореми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того, $f_\alpha\in C(-\infty,T;L^2(\Omega))$, $f_\alpha e^{(\lambda t)/2}\in L^2(Q_T)$ для всіх $|\alpha|\leqslant l$, де $\lambda\leqslant\lambda^0$. Тоді існує розв'язок нерівності (1).*

Доведення. Для довільного $k\in N$ в області $Q_{-k,T}$ розглянемо нерівність

$$\int\limits_{-k}^{\tau}\left[\langle M(t)u_t,v-(u+u_t)e^{\lambda t}\rangle+\langle L(t)u,v-(u+u_t)e^{\lambda t}\rangle-\right.$$
$$\left.-\langle F^k,v-(u+u_t)e^{\lambda t}\rangle\right]dt\geqslant 0,\quad -k<\tau\leqslant T, \tag{8}$$

де

$$\langle F^k(t),v\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant l}(f_\alpha^k,D^\alpha v(x,t))dx,$$

$$f_\alpha^k(x,t)=\begin{cases}f_\alpha(x,t), & (x,t)\in Q_{-k,T},\\ 0, & (x,t)\in Q_{-k},\end{cases}$$

з початковою умовою

$$u(x,-k)=0. \tag{9}$$

За умов теореми існує розв'язок $u^k(x,t)$ задачі (8), (9) такий, що $u^k\in C([0,T];V)$, $u_t^k\in L^2((0,T);V)$, $u+u_t\in K$ для майже всіх $t\in(-k,T)$. Продовжимо функцію u^k нулем на область Q_{-k}. Тоді в області Q_T матимемо послідовність $\{u^k\}$ функцій, кожна з яких є розв'язком варіаційної нерівності

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left[\langle M(t)u_t^k,v-(u^k+u_t^k)e^{\lambda t}\rangle+\langle L(t)u^k,v-(u^k+u_t^k)e^{\lambda t}\rangle-\right.$$
$$\left.-\langle F^k,v-(u^k+u_t^k)e^{\lambda t}\rangle\right]dt\geqslant 0,\quad \tau\in(-\infty,T]. \tag{10}$$

Розглянемо нерівності (10) для функцій u^k і u^m, $k<m$, приймемо в них, що $v=\frac{1}{2}(u^m+u_t^m-u^k-u_t^k)e^{\lambda t}$ і додамо їх. Матимемо

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left[\langle M(t)w_t^{k,m},(w^{k,m}+w_t^{k,m})e^{\lambda t}\rangle+\langle L(t)w^{k,m},(w^{k,m}+w_t^{k,m})e^{\lambda t}\rangle\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-m}^{-k} \langle F^k, (w^{k,m} + w_t^{k,m})e^{\lambda t}\rangle dt \geqslant 0, \quad \tau \in (-\infty, T], \tag{11}$$

де $w^{k,m}(x,t) = u^m(x,t) - u^k(x,t)$.

Оцінки доданків лівої частини (11) можна одержати аналогічно до оцінок інтегралів I_1, I_2. Оцінимо праву частину в (11)

$$I_3 = \int\limits_{-m}^{-k} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|\leqslant l} \Big(f(\alpha, D^\alpha(w^{k,m} + w_t^{k,m})\Big) e^{\lambda t} dx\, dt \leqslant \frac{1}{\delta_1} \int\limits_{Q_{-k}} \sum_{|\alpha|\leqslant l} f_\alpha^2(x,t) e^{\lambda t} dx\, dt +$$
$$+ \frac{\delta_1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\mu_1 \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w_t^{k,m}|^2 + \mu_1 \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w^{k,m}|^2 +$$
$$+ (\mu_2 + 1)\Big(|w^{k,m}|^2 + |w_t^{k,m}|^2\Big)\Big] e^{\lambda t} dx\, dt,$$

де $\delta_1 > 0$. Тоді з (11) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg((2b_l - \delta_1\mu_1) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w_t^{k,m}|^2 + (2b_0 - \delta_0 - \delta_1(\mu_2+1))|w_t^{k,m}|^2\Bigg) e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left(2a_l - \lambda b^1 - b_1^l - \lambda a^l - a_1^l - \frac{2C\mu_1}{\delta_0} - \delta_1\mu_1\right) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w^{k,m}|^2 dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left(2a_0 - \lambda b^0 - b_1^0 - \lambda a^0 - a_1^0 - \frac{2C\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 - \delta_1(\mu_2+1)\right) |w^{k,m}|^2 e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg((a_l + b_l) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w^{k,m}|^2 + (a_0 + b_0)|w^{k,m}|^2\Bigg) e^{\lambda\tau} dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta_1} \int\limits_{Q_{-k}} \sum_{|\alpha|\leqslant l} f_\alpha^2(x,t) e^{\lambda t} dx\, dt$$

у випадку, якщо $\Delta_0(\delta_0, \lambda) \neq \emptyset$, і нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg((2b_l - \delta_1\mu_1) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w_t^{k,m}|^2 + (2b_0 - \delta_0 - \delta_1(\mu_2+1))|w_t^{k,m}|^2\Bigg) e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left(2a_l - \lambda b_1 - b_1^l - \lambda a_l - a_1^l - \frac{2C\mu_1}{\delta_0} - \delta_1\mu_1\right) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w^{k,m}|^2 dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left(2a_0 - \lambda b_0 - b_1^0 - \lambda a_0 - a_1^0 - \frac{2C\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 - \delta_1(\mu_2+1)\right) |w^{k,m}|^2 e^{\lambda t} dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg((a_l + b_l) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w^{k,m}|^2 + (a_0 + b_0)|w^{k,m}|^2\Bigg) e^{\lambda\tau} dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta_1} \int\limits_{Q_{-k}} \sum_{|\alpha|\leqslant l} f_\alpha^2(x,t) e^{\lambda t} dx\, dt$$

у випадку, якщо $\Delta_0(\delta_0, \lambda) = \emptyset$. За умов теореми щодо λ виберемо такі числа $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$, що виконуватимуться нерівності

$$\begin{cases} 2b_0 - \delta_0 - \delta_1(\mu_2 + 1) > 0, \\ 2b_l - \delta_1\mu_1 > 0, \\ 2a_l - \lambda(a^l + b^l) - (a_1^l + b_1^l) - \dfrac{2C_0\mu_1}{\delta_0} - \delta_1\mu_1 > 0, \\ 2a_0 - \lambda(a^0 + b^0) - (a_1^0 + b_1^0) - \dfrac{2C_0\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 - \delta_1(\mu_2 + 1) > 0 \end{cases}$$

у випадку $\Delta_0(\delta_0, \lambda) \neq \emptyset$ або

$$\begin{cases} 2b_0 - \delta_0 - \delta_1(\mu_2 + 1) > 0, \\ 2b_l - \delta_1\mu_1 > 0, \\ 2a_l - \lambda(a_l + b_l) - (a_1^l + b_1^l) - \dfrac{2C_0\mu_1}{\delta_0} - \delta_1\mu_1 > 0, \\ 2a_0 - \lambda(a_0 + b_0) - (a_1^0 + b_1^0) - \dfrac{2C_0\mu_2}{\delta_0} - \delta_0 - \delta_1(\mu_2 + 1) > 0 \end{cases}$$

у випадку $\Delta_0(\delta_0, \lambda) = \emptyset$. Тоді на підставі умов теореми щодо функцій f_α для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, що для всіх $k > k_0$

$$\frac{2}{\delta_1} \int\limits_{Q_{-k}} \sum_{|\alpha| \leqslant l} f_\alpha^2(x,t) e^{\lambda t} dx\, dt < \varepsilon.$$

Отже, для $k > k_0$ виконуються оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \left| D^\alpha u^k - D^\alpha u^m \right|^2 + |u^k - u^m|^2 \right) e^{\lambda\tau} dx < \mu_3 \varepsilon,$$

$$\int\limits_{Q_T} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \left| D^\alpha u^k - D^\alpha u^m \right|^2 + |u^k - u^m|^2 \right) e^{\lambda\tau} dx\, dt < \mu_3 \varepsilon,$$

$$\int\limits_{Q_T} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \left| D^\alpha u_t^k - D^\alpha u_t^m \right|^2 + |u_t^k - u_t^m|^2 \right) e^{\lambda\tau} dx\, dt < \mu_3 \varepsilon,$$

де стала μ_3 не залежить від m і k, тобто послідовності $\{u^k(x,t)\}$, $\{u^k(x,t)e^{(\lambda t)/2}\}$, $\{u_t^k(x,t)e^{(\lambda t)/2}\}$ збігаються у просторах $C((-\infty, T]; V)$, $L^2((-\infty, T]; V)$, $L^2((-\infty, T]; V)$ до функцій $u(x,t)$, $u(x,t)e^{(\lambda t)/2}$, $u_t(x,t)e^{(\lambda t)/2}$ відповідно, причому збіжність у просторі $C((-\infty, T]; V)$ рівномірна.

Перейшовши до границі при $k \to \infty$ в нерівності (10), завершуємо доведення теореми.

---

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П,, Кочина Т.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прик. матем. и мех. – 1960. – Т.24. – Вып.5. – С.852–864.

2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах// Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. – 1948. – Т. 12. – N 1. – С.27–45.

3. *Di Benedetto E., Showalter R.E.* A pseodo-parabolic variatinal inequality and Stefan problem// Nonlinear Analysis. Theory, Methods, Applications. – 1982. – Vol. 6. – N 3. – P.279–291.

4. *Scarpini F.* Generate and pseudopsrabolic variational inequalities: Approximate solutions// Numer. Funct. Anal. and Optiiz. – 1987. – Vol. 9. – P.859–879.

5. *Brill H.* Cauchy Probleme fuer nichtlineare parabolische und pseudoparabolische Gleichungen. –Diss. Dokt. Naturwiss. Abt. Math.Ruhr-Uni. Bochum, 1974.

6. *Ford W.H.* Galerkin approximations to non-linear pseudo-parabolic partial differential equations// Aequet.math. – 1976. – Vol.14. – N 3. – P.271–291.

7. *Бас М.О., Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва-Гальперна// Український матем. журн.– 1996. – Т.48. – N 1. – С.124–128.

8. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов// Український матем. журн. – 1999. – Т.51. – N 3. – С.328–337.

9. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Л., 1985.

PSEUDO-PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH DEIVATIVES OF HIGHER ORDER WITHOUT INITIAL CONDITIONS

M. Ptashnyk

Ivan Franko National·University of Lviv

We study a model of variational inequality of pseudo-parabolic type with derivatives of higher order in unbounded domain $Q = \{(x,t) \,|\, x \in \Omega,\, t \in (-\infty, T]\}$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. It is proved an existence and uniqueness of the solution for this inequality without initial condition.

Key words: *pseudo-parabolic variational inequality.*

Стаття надійшла до редколегії 27.06.2000

Прийнята до друку 28.12.2000