ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.168–173

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.168–173

УДК 517.95

ПРО ЗАДАЧУ ОДНОЧАСНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕВІДОМОГО МАТЕРІАЛУ

Роман Сагайдак
Львівський національний університет імені Івана Франка

Ми розглянемо питання можливості одночасного визначення коефіцієнта об'ємної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності, залежних від часу, в неоднорідному рівнянні теплопровідності. У праці [1] отримано умови існування та єдиності розв'язку аналогічної оберненої задачі у випадку однорідного рівняння. Наявність вільного члена в рівнянні робить неможливим зведення вихідної задачі до одного рівняння. Додатковою відмінністю цих праць є вигляд умов перевизначення. Якщо в [1] як умови використано локальні крайові умови, то у цій праці це нелокальні умови перевизначення, а саме умови типу теплових моментів [2]. Можливість одночасного визначення обох коефіцієнтів, залежних від часу, досліджена у працях [3], [4], де доведено єдиність розв'язку подібної задачі.

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення функцій $(c_v, \lambda, u) \in (C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $c_v(t) > 0, \lambda(t) > 0, t \in [0,T])$, що задовольняють рівняння

$$c_v(t)u_t = \lambda(t)u_{xx}(x,t) + g(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^h u(x,t)dx = \nu_1(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^h xu(x,t)\,dx = \nu_2(t),\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Поділивши рівняння (1) на функцію c_v, одержимо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(t)g(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{6}$$

де $a(t) = \lambda(t)/c_v(t), f(t) = 1/c_v(t)$.

Стосовно вихідних даних задачі протягом усієї праці припускатимемо виконання таких умов:

(A_1) $\mu_i \in C[0,T],\ \nu_i \in C^1[0,T], i=1,2,\ \varphi \in C^1[0,h],\ g \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_T);$

(A_2) $\int\limits_0^h \varphi(x)\,dx = \nu_1(0),\ \int\limits_0^h x\varphi(x)\,dx = \nu_2(0),\ \varphi^{'}(0) = \mu_1(0),\ \varphi^{'}(h) = \mu_2(0);$

(A_3) $\varphi(x) - \varphi(h-x) \geqslant 0,\ x \in [0, h/2];\ g(x,t) - g(h-x,t) \geqslant 0,$

$$(x,t) \in [0,h/2] \times [0,T];\ \mu_1(t) + \mu_2(t) \leqslant 0,\ \int\limits_0^h g(x,t)dx \geqslant 0,$$

$$h\mu_2(t) \int\limits_0^h g(x,t)dx + (\mu_1(t) - \mu_2(t)) \int\limits_0^h xg(x,t)dx > 0,\ \nu_1^{'}(t) \geqslant 0,$$

$$\int\limits_0^h xg(x,t)dx \geqslant 0, \nu_2^{'}(t) \int\limits_0^h g(x,t)dx > \nu_1^{'}(t) \int\limits_0^h xg(x,t)\,dx,$$

$$h\nu_1^{'}(t)\mu_2(t) + \nu_2^{'}(t) \times (\mu_1(t) - \mu_2(t)) > 0, t \in [0,T].$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови $(A_1) - (A_3)$. Тоді задача (2)-(6) має розв'зок в області $\overline{\Omega}_T$.*

Доведення. Позначимо функцію Гріна задачі (6), (2), (3)

$$G_2(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\ \text{де}\ \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau.$$

Вважаючи відомими функції $a(t) > 0, a \in C[0,T], f(t) > 0, f \in C[0,T]$, розв'язок цієї задачі зобразимо так:

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f(\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (7)$$

Проінтегрувавши рівняння (6) на проміжку $[0,h]$, врахувавши крайові умови (3) та умову (4), одержуємо рівність

$$\nu_1^{'}(t) = a(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + f(t) \int\limits_0^h g(x,t)dx. \quad (8)$$

Аналогічне перетворення виконаємо з рівнянням (6), попередньо домноживши його на x. Врахувавши ті ж крайові умови та умову перевизначення (5), одержуємо

$$\nu_2'(t) = a(t)(h\mu_2(t) + u(0,t) - u(h,t)) + f(t)\int\limits_0^h xg(x,t)dx. \tag{9}$$

Розв'язавши систему (8), (9) стосовно невідомих функцій a, f, одержуємо

$$a(t) = \frac{-\nu_1'(t)\int\limits_0^h xg(x,t)dx + \nu_2'(t)\int\limits_0^h g(x,t)dx}{(h\mu_2(t) + u(0,t) - u(h,t))\int\limits_0^h g(x,t)dx + (\mu_1(t) - \mu_2(t))\int\limits_0^h xg(x,t)dx}, \tag{10}$$

$$f(t) = \frac{\nu_1'(t)(h\mu_2(t) + u(0,t) - u(h,t)) + \nu_2'(t)(\mu_1(t) - \mu_2(t))}{(h\mu_2(t) + u(0,t) - u(h,t))\int\limits_0^h g(x,t)dx + (\mu_1(t) - \mu_2(t))\int\limits_0^h xg(x,t)dx}, \tag{11}$$

де значення $u(0,t), u(h,t)$ визначають з рівності (7). Отже, задачу (2)-(6) зводимо до системи рівнянь (10), (11). Неважко показати, що ця система і вихідна задача еквівалентні.

Застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [5] до системи (10), (11). Передусім визначимо апріорні оцінки роз'язків цієї системи, для чого розглянемо таку різницю:

$$\begin{aligned}u(0,t) - u(h,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\theta(t)}\right)d\xi - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\tau + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h g(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh))^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\xi.\end{aligned} \tag{12}$$

Перший і останній доданки перетворимо, розбивши в них інтеграли за просторовою змінною на суму двох – від 0 до $h/2$ і від $h/2$ до h. Змінюючи змінні $\eta = h - \xi$, одержуємо

$$\begin{aligned}u(0,t) - u(h,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^{h/2}(\varphi(\xi) - \varphi(h-\xi))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\theta(t)}\right)d\xi - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\tau + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^{h/2}(g(\xi,\tau) - g(h-\xi,\tau))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh))^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\xi.\end{aligned} \tag{13}$$

Покажемо, що за припущення (A_3) виконується нерівність $u(0,t) - u(h,t) \geqslant 0$. Оскільки u неперервна і $u(0,0) - u(h,0) > 0$, то $u(0,t) - u(h,t)$ буде додатною на деякому проміжку $[0,t_1]$. Тоді з рівняння (11) випливає, що f теж додатна на $[0,t_1]$. Повернувшись до рівності (13) і врахувавши додатність f на $[0,t_1]$, отримуємо, що $u(0,t) - u(h,t) > 0$ на деякому проміжку $[0,t_2]$, $t_2 > t_1$. Тоді $f(t) > 0$ на $[0,t_2]$. Таким чином доведено, що $u(0,t) - u(h,t) \geqslant 0$ на $[0,T]$.

Оцінимо цю різницю зверху

$$u(0,t) - u(h,t) \leqslant \max_{[0,h]} |\varphi(x)| + + \max_{\overline{\Omega}_T} |g(x,t)| \int_0^t f(\tau)d\tau + \max_{[0,T]} |\mu_1(t) + \mu_2(t)| \times$$

$$\times \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \leqslant C_1 + C_2 \int_0^h f(\tau)\,d\tau + C_3\sqrt{\theta(t)}, \qquad (14)$$

де сталі $C_i > 0$, $i = 1,2,3$. З рівняння (10) одержуємо оцінку $a(t) \leqslant A_1 < \infty$, $t \in [0,T]$, оскільки

$$a(t) \leqslant \left(\max_{[0,T]} \left[-\nu_1'(t) \int_0^h xg(x,t)\,dx + \nu_2'(t) \int_0^h g(x,t)\,dx \right] \right) \times$$

$$\times \left(\min_{[0,T]} \left[h \int_0^h g(x,t)\,dx\mu_2(t) + \int_0^h xg(x,t)(\mu_1(t) - \mu_2(t)) \right] \right)^{-1} = A_1. \qquad (15)$$

З урахуванням невід'ємності $u(0,t) - u(h,t)$ та нерівності (14), f оцінюється так:

$$f(t) \leqslant C_4 + C_5 \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

Застосувавши до останньої нерівності лему Гронуола, одержуємо

$$f(t) \leqslant F_1 < \infty,\ t \in [0,T],\ \text{де } F_1 = C_4 \exp(C_5 T). \qquad (16)$$

Використавши умову (A_3), отримаємо оцінку f знизу

$$f(t) \geqslant \left(\min_{[0,T]} \left[\nu_1'(t) h\mu_2(t) + \nu_2'(t)(\mu_1(t) - \mu_2(t)) \right] \right) \Big/ C_6 = F_0,$$

де $C_6 = \max\limits_{\Omega_T} \Big((h\mu_2(t) + u(0,t) - u(h,t)) \int_0^h g(x,t)dx + (\mu_1(t) - \mu_2(t)) \int_0^h xg(x,t)dx \Big)$.

Отже,

$$f(t) \geqslant F_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \qquad (17)$$

Аналогічно доводимо, що

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \qquad (18)$$

Розглянемо множину

$$N = \{(a,f) \in C[0,T] \times C[0,T] : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1, F_0 \leqslant f(t) \leqslant F_1\}.$$

Систему (10), (11) запишемо у вигляді

$$a(t) = P_1(a, f)(t), \quad f(t) = P_2(a, f)(t).$$

З оцінок (15)-(18) випливає, що оператор $P = (P_1, P_2)$ переводить множину N в себе і що N задовольняє умови теореми Шаудера. Використовуючи методику, розроблену у працях [6], [7], доводимо, що оператор P є цілком неперервним на множині N. Отже, розв'язок системи (10), (11) існує і належить множині N. Теорему доведено.

Перейдемо до питання єдиності розв'язку задачі (2)-(6).

Теорема 2. *Нехай виконується така умова:*

(A_4) $\varphi(x) - \varphi(h-x) \geqslant 0$, $x \in [0, h/2]$; $g(x,t) - g(h-x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in [0,h/2] \times [0,T]$; $\mu_1(t) + \mu_2(t) \leqslant 0$, $\mu_2(t) h \int\limits_0^h g(x,t)dx + (\mu_1(t) - \mu_2(t)) \int\limits_0^h x g(x,t) dx > 0$, $\int\limits_0^h g(x,t)\,dx \geqslant 0$, $t \in [0,T]$. *Тоді розв'язок задачі (2)-(6) единий.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки цієї задачі (a_i, f_i, u_i), $i = 1, 2$. Введемо такі позначення: $A(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $F(t) = f_1(t) - f_2(t)$, $U(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Тоді трійка функцій (A, F, U) задовольняє умови

$$U_t = a_1(t) U_{xx} + A(t) u_{2xx} + F(t) g(x,t), \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{19}$$

$$U(x,0) = 0, \ x \in [0,h], \tag{20}$$

$$U_x(0,t) = U_x(h,t) = 0, \ t \in [0,T], \tag{21}$$

$$\int\limits_0^h U(x,t)\,dx = \int\limits_0^h x U(x,t)\,dx = 0, \ t \in [0,T]. \tag{22}$$

Позначимо через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (19)-(21) і подамо розв'язок цієї задачі у вигляді

$$U(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau) \left(A(\tau) u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + F(\tau) g(\xi,\tau) \right) d\xi\, d\tau.$$

Інтегруючи рівняння (19), як у випадку теореми 1, одержуємо систему, яку розв'язуємо стосовно функцій A і F. Тоді

$$A(t) = \frac{a_1(t)(U(0,t) - U(h,t)) \int\limits_0^h g(x,t)dx}{(\mu_2(t) - \mu_1(t)) \int\limits_0^h x g(x,t)\,dx - (h\mu_2(t) + u_2(0,t) - u_2(h,t)) \int\limits_0^h g(x,t)\,dx}, \tag{23}$$

$$F(t) = \frac{-a_1(t)(U(0,t) - U(h,t))(\mu_2(t) - \mu_1(t))}{(\mu_2(t) - \mu_1(t)) \int\limits_0^h x g(x,t)\,dx - (h\mu_2(t) + u_2(0,t) - u_2(h,t)) \int\limits_0^h g(x,t)\,dx}. \tag{24}$$

З умов теореми випливає, що $u_2(0,t) - u_2(h,t) \geqslant 0$ і $\int\limits_0^h g(x,t)\,dx \geqslant 0$.Тоді

$$(\mu_2(t) - \mu_1(t)) \int\limits_0^h xg(x,t)\,dx - (h\mu_2(t) + u_2(0,t) - u_2(h,t)) \int\limits_0^h g(x,t)\,dx < 0,$$

$\forall t \in [0,T]$ внаслідок умови (A_4). Отже, (23), (24) – це однорідна система рівнянь Вольтерра другого роду. На підставі єдиності її розв'язку, одержуємо $A(t) \equiv F(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$. Підставивши $A(t), F(t)$ в зображення розв'язку, отримаємо $U(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}_T$. Отже, розв'язок задачі (2)-(6) єдиний. Теорему доведено.

Оскільки при зроблених припущеннях задачі (1)-(5) та (2)-(6) еквівалентні, то для задачі (1)-(5) доведені теореми визначають умови існування і єдиності розв'язку розглянутої задачі.

---

1. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости//Сиб. мат. журн. – 1994. – Т.35. – №3. – С.612–621.
2. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами//Доп. АН України. – 1994. – №8. – С.57–60.
3. *Музылев Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности//Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1980. – Т.20. – №2. – С.388–400.
4. *Музылев Н.В.* О единственности одновременного определения коеффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости//Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1983. – Т.23. – №1. – С. 102–108.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М., 1977.
6. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении//Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39. – №3. – С.539–550.
7. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. К., 1995. (Препринт).

ON A PROBLEM OF THE SIMULTANEOUS DETERMINATION OF THE HEAT KHARAKTERISTICS IN UNKNOWN MATERIAL

R. Sagaydak

Ivan Franko National University of Lviv

There are established existense and uniqueness conditions for an inverse problem for the heat equations with unknown time-dependent major coefficient and source term. The integral conditions of the moment type are used as overdetermination conditions.

Key words: *inverse problem for the heat equations.*

Стаття надійшла до редколегії 06.07.2000

Прийнята до друку 28.12.2000