ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.174-182

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.174-182

УДК 531

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ЗА ДВОМА МІРАМИ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗІ СТАНДАРТНОГО МАТЕРІАЛУ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Андрій Волошенюк, Петро Доманський
Львівський національний університет імені Івана Франка

Теорія стійкості деформівних систем протягом багатовікової історії свого розвитку виробила властиві їй критерії (критерій Ейлера, енергетичний критерій, критерій початкових недосконалостей, динамічний критерій і т.д.) та методи дослідження і має широкі практично важливі застосування. Пов'язуючи явище втрати стійкості з тонкостінними елементами конструкцій і з метою спрощення досліджень, для розв'язання задач переважно використовують наближені дво- і одновимірні прикладні теорії, які будують шляхом введення допоміжних гіпотез. В основу методів дослідження стійкості деформівних систем зазвичай покладають заміну шуканих функцій зліченною, або наближено скінченною кількістю параметрів.

Об'єкт нашого дослідження (див. також [3, 4, 6]) – тривимірні лінеаризовані рівняння стійкості руху ізотропних пружних тіл. Для дослідження стійкості використано аналог прямого методу Ляпунова для систем з розподіленими параметрами. Для вибраних мір відхилення базового розв'язку від збуреного запропоновано функціонал, який відіграє ту саму роль, що і функція Ляпунова для систем із зосередженими параметрами. На підставі цього функціонала отримано достатні умови стійкості руху, які мають вигляд інтегральної нерівності. Застосування одержаних результатів проілюстровано на прикладі циліндричних тіл, на які діють осьові стискуючі сили.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропне пружне тіло K. Розрізнятимемо три конфігурації цього тіла: γ_0, γ_τ, γ_τ^*. Першу з них назвемо відліковою, а дві інші – актуальними. Відлікову γ_0-конфігурацію вважають природною (недеформованою) – в тілі немає напружень та деформацій. Місце точки $k \in K$ у ній задаємо радіус -вектором $\vec{r}_0$ – неперервною і потрібну кількість разів диференційовною вектор-функцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$, де $\{\xi^i\}$ – лагранжеві координати, за які приймаємо координати місця точки $k \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі координат, $\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0} + \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0} \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^{\,0}$. Область відлікової конфігурації і кусково-гладку поверхню, що її обмежує, позначаємо через X_0 і ∂X_0 відповідно. Актуальну γ_τ-конфігурацію назвемо базовою (незбуреною). Вона виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил. Другу актуальну γ_τ^*-конфігурацію, яка відповідає збуренню початкових умов у γ_τ-конфігурації, називатимемо збуреною.

Місце точки $k \in K$ в γ_τ і γ_τ^*-конфігураціях визначаємо радіусами-векторами $\vec{r} = \vec{r}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau\right) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0$, $\vec{r}_* = \vec{r}_*\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau\right) = \vec{r}_0 + \vec{u}_*$ відповідно. Напружений стан γ_τ і γ_τ^*-конфігурацій визначаємо тензорами напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}_0 = \hat{P}_0\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right)$ і $\hat{P}_* = \hat{P}_0\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*\right)$, де $\hat{P}_0$ – тензорна функція, яка характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця, $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^{\,i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації, $\{\vec{\ni}_i^{\,0}\}$ – база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_0^{\,i}\}$, "$\otimes$" – операція тензорного добутку. Приймаємо, що $\vec{u}_* = \vec{u}_0 + \vec{u}$, $\hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}$. Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в γ_τ-конфігурації.

Розглянемо лінеаризоване рівняння стійкості руху тіла K [5]

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

де $\hat{P}_0^\bullet = \hat{P}_0^\bullet\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right)$ – лінійна стосовно аргумента $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$ частина приросту тензора напружень Піоли-Кірхгофа

$$\hat{P}_0\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*\right) - \hat{P}_0\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right) \approx \hat{P}_0^\bullet\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right),$$

ρ_0 – густина розподілу маси стосовно γ_0-конфігурації, "$\cdot$" – операція скалярного (внутрішнього) множення.

На межі ∂X_0 розглядатимемо такі варіанти крайових умов:

$$\vec{u}\big|_{\partial X_1} = 0, \qquad \vec{u}\big|_{\partial X_2} = 0, \qquad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet\Big|_{\partial X_3} = 0; \tag{2}$$

$$\vec{u}\big|_{\partial X_1} = 0, \qquad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet\Big|_{\partial X_2} = 0, \qquad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet\Big|_{\partial X_3} = 0, \tag{3}$$

де $\vec{n}_0$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні ∂X_0; $\partial X_1 \cup \partial X_2 \cup \partial X_3 = \partial X_0$.

Зауваження. В формулюванні задачі передбачено, що навантаження масовими і поверхневими силами пружного тіла є "мертвим". Тому рівняння (1) і крайові умови (2), (3) є однорідними.

Рівняння (1) за будь-якого з поданих варіантів крайових умов має розв'язок $\vec{u} \equiv 0$. Досліджуючи стійкість цього розв'язку, за міри відхилення базового розв'язку від збуреного приймаємо функціонали

$$d_0\left[h(\cdot;\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[a\vec{u}^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^\bullet \cdot\cdot\, \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{4}$$

$$d\left[h(\cdot;\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[a\vec{u}^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2\right] dV_0, \tag{5}$$

означені на функціях $h\left(\vec{r}_0;\tau\right) = \left(\vec{u}\left(\vec{r}_0;\tau\right), \frac{\partial \vec{u}(\vec{r}_0;\tau)}{\partial \tau}\right)$, де $\vec{u}$ – розв'язки сформульованих крайових задач для рівняння (1), a – невід'ємна розмірна стала. Очевидно, що $d_0[0] = d[0] = 0$.

Означення. Розв'язок $\vec{u} \equiv 0$ називаємо стійким за мірами (4), (5), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall h)\,(\forall \tau \geqslant \tau_0)\left[d_0\left[h\left(\cdot, \tau_0\right)\right] < \delta \Longrightarrow d\left[h\left(\cdot, \tau\right)\right] < \varepsilon\right].$$

Знайдемо умови стійкості за мірами (4), (5) нульового розв'язку рівняння (1) для сформульованих варіантів крайових умов (2), (3).

Достатні умови стійкості. Розглянемо функціонал

$$V\left[h(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right] dV_0. \tag{6}$$

Оскільки $d\left[h(\cdot,\tau)\right] \leqslant d_0\left[h(\cdot,\tau\right]$ і $\left|V\left[h(\cdot,\tau)\right]\right| \leqslant d_0\left[h(\cdot,\tau)\right]$, то функціонали d і V є неперервними в момент часу $\tau = \tau_0$ за мірою d_0 при $d_0 = 0$ [10]. Легко помітити, що

$$V\left[h(\cdot,\tau)\right] = d\left[h(\cdot,\tau)\right] + \int\limits_{X_0} \left[\hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 - a\vec{u}^2\right] dV_0.$$

Отже, функціонал (6) є додатно означеним за мірою d, якщо виконується нерівність

$$W\left[\vec{u}\right] = \int\limits_{X_0} \left[\hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 - a\vec{u}^2\right] dV_0 \geqslant 0. \tag{7}$$

У [7] показано, що для тензора $\hat{P}_0^{\bullet}$ характерною є властивість взаємності. Якщо врахувати це і використати формулу Гауса-Остроградського, то можна показати, що

$$\frac{dV}{d\tau} = \int\limits_{X_0} \left[2\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} - \vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \hat{L} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right] dV_0 + 2 \int\limits_{\partial X_0} \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS, \tag{8}$$

де $\hat{L} = \hat{P}_0^{\bullet}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right)$ – лінійна тензорна функція, яка дорівнює нулю, коли градієнт $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$ базового розв'язку не залежить від часу.

Надалі приймаємо, що градієнт базового розв'язку від часу не залежить. Тоді з (8) випливає, що на розв'язках рівняння (1), які задовольняють один з варіантів крайових умов (2) або (3), виконується рівність

$$\frac{dV}{d\tau} = 0.$$

Отже, фукціонал V є незростаючим уздовж збурень. З визначених властивостей функціонала V і теореми про стійкість руху за двома мірами систем з розподіленими параметрами [8, 10] випливає твердження.

Твердження 1. *Якщо навантаження масовими і поверхневими силами пружного тіла є "мертвим" і градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то достатньою умовою стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (1) за мірами (4), (5) є виконання нерівності (7) на збуреннях, що задовольняють один з конкретних варіантів крайових умов (2), (3).*

Значення параметрів силового навантаження, за яких нульовий розв'язок рівняння (1) з крайовими умовами (2) або (3) є стійким за мірами (4), (5) можна визначити, зокрема, з достатніх умов мінімуму функціонала $W[\vec{u}]$ на збуреннях, що задовольняють відповідні крайові умови.

Формулювання достатніх умов для циліндричних тіл. Приймемо, що в γ_0-конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого є значно меншими від висоти. Положення точок осі тіла характеризуватимемо радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^0$, де ξ^3 – осьова координата $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant l)$, $\vec{\ni}_3^0$ – базовий орт у напрямі цієї осі. Положення довільної точки $x_0 \in X_0$ визначаємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \qquad \vec{R}_0 = \vec{R}_0\left(\xi^1, \xi^2\right) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^0, \qquad \alpha = 1, 2, \qquad \left(\xi^1, \xi^2\right) \in D.$$

Подамо збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}_{30} + \vec{R}_0; \tau\right)$ у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}\left(\vec{R}_0\right)\}$:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}\left(\vec{R}_0\right) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}\left(\vec{r}_{30}; \tau\right). \tag{9}$$

Тут індекси $(i-1)$ та (i) показують ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів.

Як випливає з формули Тейлора для відображення одного нормованого простору в інший, за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\{\vec{R}_0^n\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний тензорний добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе, $\vec{R}_0^0 \equiv 1$.

Підставивши (9) у функціонал $W[u]$, отримаємо

$$W[u] = W_1\left[\{\hat{u}^{(i)}\}\right] = \int_0^l \sum_{m,n=1}^{N} \left[\hat{M}^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \left(\hat{P}_3^{(n)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(m)}}{\partial \xi^3} - a\hat{u}^{(n)} \otimes \hat{u}^{(m)}\right) + \right.$$
$$\left. + \delta^{\alpha\beta} \hat{K}_\alpha^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_\beta^{(n)} \otimes \hat{u}^{(m)}\right] d\xi^3, \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{10}$$

Тут

$$\hat{M}^{(m+n)} = \int_D \vec{\ni}_0^k \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} d\Sigma_0,$$
$$\hat{K}_\alpha^{(m+n)} = \int_D \vec{\ni}_0^k \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(m-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} d\Sigma_0,$$

$\hat{P}_j^{(n)}$ – коефіцієнти розвинення векторів $\vec{P}_j^\bullet = \vec{\ni}_j^0 \cdot \hat{P}_0^\bullet$ за базою $\{\hat{\Phi}^{(n-1)}\}$, $\delta^{\alpha\beta}$ – символи Кронекера.

Приймемо, що у формулах (2), (3) ∂X_1 – нижня основа циліндричного тіла $\left(\xi^3 = l\right)$, ∂X_2 – його верхня основа $\left(\xi^3 = 0\right)$, ∂X_3 – бічна поверхня. Оскільки на нижній і верхній основах циліндричного тіла вектор зовнішньої нормалі $\vec{n}_0$ колінеарний до базового орта $\vec{\ni}_3^0$, то крайовим умовам (2), (3) відповідають такі варіанти крайових умов на коефіцієнти $\hat{u}^{(i)}$ розвинення збурення вектора переміщення $\vec{u}$

$$\hat{u}^{(i)}\Big|_{\xi^3 = 0, l} = 0; \tag{11}$$

$$\hat{u}^{(i)}\Big|_{\xi^3 = l} = 0, \quad \hat{P}_3^{(i)}\Big|_{\xi^3 = 0} = 0 \quad \left(i = \overline{1, N}\right). \tag{12}$$

Отже, для визначення умов стійкості циліндричного тіла потрібно знайти ті значення параметрів навантаження, при яких виконується нерівність $W\left[\{\hat{u}^{(i)}\}\right] \geqslant 0$ для будь-яких наборів тензорних функцій $\{\hat{u}^{(i)}\}$, що задовольняють один з варіантів крайових умов (11) або (12).

Циліндричне тіло під дією осьових стискуючих навантажень. Нехай циліндричне тіло зі стандартного матеріалу другого порядку [11] перебуває під дією рівномірно розподіленого по крайових поперечних перерізах осьового стискуючого навантаження інтенсивності N_0. Бічну поверхню вважаємо вільною від силових навантажень. Впливом масових сил нехтуємо. Нехай область D має площу S_0 і її моменти інерції стосовно обох координатних осей є однаковими і дорівнюють J, а відцентровий момент і моменти першого порядку дорівнюють нулю. Знайдемо значення параметра N_0, при яких виконується стійкість за мірами (4), (5).

Тензор Піоли-Кірхгофа для стандартного матеріалу другого порядку є многочленом третього степеня стосовно градієнта $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$. Обмежимося лише членами другого порядку

$$\hat{P}_0\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right) = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right) \cdot \hat{T}\left(\vec{u}_0\right) + \frac{\lambda}{2} \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \hat{I} + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0,$$

де $\hat{T}\left(\vec{u}_0\right) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu \hat{\varepsilon}\left(\vec{u}_0\right)$, $\hat{\varepsilon}\left(\vec{u}_0\right) = \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T\right)/2$ – тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності; λ, μ – сталі Ляме; $\hat{I}$ – одиничний тензор, індексом "T" позначено операцію транспонування.

У цьому випадку тензор $\hat{P}_0^{\bullet}$ є білінійною функцією градієнтів $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$ і $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$

$$\hat{P}_0^{\bullet} = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right) \cdot \hat{T}\left(\vec{u}\right) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}\left(\vec{u}_0\right) + \lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \hat{I} +$$
$$+ \mu \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right).$$

За базовий виберемо розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності [7]

$$\vec{u}_0 = Q\left[\nu\left(\xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0\right) - \xi^3 \vec{\ni}_3^0\right], \tag{13}$$

де $Q = N_0/ES_0$, $\nu = \lambda/\left(2(\lambda+\mu)\right)$ – коефіцієнт Пуассона, $E = 2\mu(1+\nu)$ – модуль пружності.

З (13) знаходимо

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T = Q\left[\nu\left(\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_1^0 + \vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_2^0\right) - \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0\right],$$
$$\hat{T}\left(\vec{u}_0\right) = -QE\vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0. \tag{14}$$

За базу розвинення збурення вектора переміщення виберемо $\{\vec{R}_0^n\}$ і обмежимося у формулі (9) двома доданками, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\ni}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^k$. Якщо обчислити коефіцієнти $\hat{M}^{(m+n)}$, $\hat{K}_{\alpha}^{(m+n)}$, $(m,n = 1,2)$, то для базових параметрів (14) квадратичний функціонал (10) можна записати у вигляді

$$W_1\left[\hat{u}^{(1)}, \hat{u}^{(2)}\right] = S_0 \int_0^l \left\{ \frac{\mu J}{S_0}(1-2Q) \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \right.$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\mu(1-2Q)\left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \frac{J}{S_0}\left((\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \right.$$

$$+\left(\mu(1+2\nu Q)-EQ-\frac{aJ}{S_0}\right)u_{\alpha 3}^2+2\mu\left(1+(\nu-1)Q\right)u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}+ \tag{15}$$

$$+\left((\lambda+2\mu)(1+2\nu Q)-\frac{aJ}{S_0}\right)u_{\alpha\alpha}^2\Bigg]-a\sum_{k=1}^{3}u_k^2+2\lambda(1+2\nu Q)u_{11}u_{22}+$$

$$+\left(\mu(1+2\nu Q)-\frac{aJ}{S_0}\right)\left(u_{12}^2+u_{21}^2\right)+2\lambda\left(1+(\nu-1)Q\right)\left(u_{11}+u_{22}\right)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+$$

$$+\left((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2+2\mu(1+2\nu Q)u_{12}u_{21}\Bigg\}d\xi^3.$$

Граничні умови (11), (12) стосовно компонент u_α, $u_{\alpha k}$ тензорів $\hat{u}^{(1)}$, $\hat{u}^{(2)}$, як можна переконатися, є такими:

$$u_k|_{\xi^3=0,l}=0,\qquad u_{\alpha k}|_{\xi^3=0,l}=0\qquad\left(\alpha=1,2;k=\overline{1,3}\right); \tag{16}$$

$$u_k|_{\xi^3=l}=0,\qquad u_{\alpha k}|_{\xi^3=l}=0,\qquad\left[(1-2Q)\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}+\left(1+(\nu-1)Q\right)u_{\alpha 3}\right]\Bigg|_{\xi^3=0}=0,$$

$$\left[\lambda\left(1+(\nu-1)Q\right)\left(u_{11}+u_{22}\right)+\left((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\right)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right]\Bigg|_{\xi^3=0}=0, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3=0}=0\qquad\left(\alpha=1,2;k=\overline{1,3}\right).$$

Для обчислення значень параметра N_0, за яких виконується нерівність $W_1\left[\hat{u}^{(1)},\hat{u}^{(2)}\right]\geqslant 0$ з крайовими умовами (16) або (17), скористаємося методами варіаційного числення.

З необхідної умови екстремуму функціонала W_1 отримуємо систему рівнянь Ейлера

$$\frac{\mu J}{S_0}(1-2Q)\frac{\partial^2u_{11}}{\partial{\xi^3}^2}-(1+2\nu Q)\left[(\lambda+2\mu)u_{11}+\lambda u_{22}\right]+$$

$$+\frac{aJ}{S_0}u_{11}-\lambda\left(1+(\nu-1)Q\right)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}=0,$$

$$\frac{\mu J}{S_0}(1-2Q)\frac{\partial^2u_{22}}{\partial{\xi^3}^2}-(1+2\nu Q)\left[(\lambda+2\mu)u_{22}+\lambda u_{11}\right]+$$

$$+\frac{aJ}{S_0}u_{22}-\lambda\left(1+(\nu-1)Q\right)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}=0,$$

$$\left[(\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\right]\frac{\partial^2u_3}{\partial{\xi^3}^2}+\lambda\left(1+(\nu-1)Q\right)\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}\right)+au_3=0,$$

$$\frac{\mu J}{S_0}(1-2Q)\frac{\partial^2u_{12}}{\partial{\xi^3}^2}-\mu(1+2\nu Q)\left(u_{12}+u_{21}\right)+\frac{aJ}{S_0}u_{12}=0,$$

$$\frac{\mu J}{S_0}(1-2Q)\frac{\partial^2u_{21}}{\partial{\xi^3}^2}-\mu(1+2\nu Q)\left(u_{12}+u_{21}\right)+\frac{aJ}{S_0}u_{21}=0,$$

$$\frac{J}{S_0}\left[(\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\right]\frac{\partial^2u_{\alpha 3}}{\partial{\xi^3}^2}-\left[\mu(1+2\nu Q)-EQ-\frac{aJ}{S_0}\right]u_{\alpha 3}-$$

$$-\mu\left(1+(\nu-1)Q\right)\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}=0,$$

$$\mu(1-2Q)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial {\xi^3}^2} + \mu\left(1+(\nu-1)Q\right)\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} + a u_\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1,2).$$

Запишемо загальний розв'язок цієї системи

$$\begin{aligned}
u_{11} &= C_1 e^{s_1\xi^3} + C_2 e^{-s_1\xi^3} + \frac{P_1 s_2^2 + P_2}{\lambda s_2}\left(C_4 e^{-s_2\xi^3} - C_3 e^{s_2\xi^3}\right) + \\
&+ \frac{P_1\varphi_2^2 - P_2}{\lambda\varphi_2}\left(C_5 \sin\varphi_2\xi^3 - C_6\cos\varphi_2\xi^3\right), \\
u_{22} &= -C_1 e^{s_1\xi^3} - C_2 e^{-s_1\xi^3} + \frac{P_1 s_2^2 + P_2}{\lambda s_2}\left(C_4 e^{-s_2\xi^3} - C_3 e^{s_2\xi^3}\right) + \\
&+ \frac{P_1\varphi_2^2 - P_2}{\lambda\varphi_2}\left(C_5 \sin\varphi_2\xi^3 - C_6\cos\varphi_2\xi^3\right), \\
u_3 &= 2\left(C_3 e^{s_2\xi^3} + C_4 e^{-s_2\xi^3} + C_5\cos\varphi_2\xi^3 + C_6\sin\varphi_2\xi^3\right), \qquad (18)\\
u_{12} &= C_7 e^{s_1\xi^3} + C_8 e^{-s_1\xi^3} + C_9\cos\varphi_3\xi^3 + C_{10}\sin\varphi_3\xi^3, \\
u_{21} &= C_7 e^{s_1\xi^3} + C_8 e^{-s_1\xi^3} - C_9\cos\varphi_3\xi^3 - C_{10}\sin\varphi_3\xi^3, \\
u_\alpha &= C_{2\alpha} e^{s_4\xi^3} + C_{3\alpha} e^{-s_4\xi^3} + C_{4\alpha}\sin\varphi_4\xi^3 + C_{5\alpha}\cos\varphi_4\xi^3, \\
u_{\alpha 3} &= \frac{P_3 s_4^2 + P_2}{\mu s_4}\left(C_{3\alpha} e^{-s_4\xi^3} - C_{2\alpha} e^{s_4\xi^3}\right) + \\
&+ \frac{P_3\varphi_4^2 - P_2}{\mu\varphi_4}\left(-C_{4\alpha}\cos\varphi_4\xi^3 + C_{5\alpha}\sin\varphi_4\xi^3\right),
\end{aligned}$$

де

$$P_1 = \frac{(\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ}{1+(\nu-1)Q}, \quad P_2 = \frac{a}{1+(\nu-1)Q}, \quad P_3 = \frac{\mu(1-2Q)}{1+(\nu-1)Q},$$

$$s_1^2 = \frac{2\mu S_0(1+2\nu Q) - aJ}{\mu J(1-2Q)}, \quad s_2^2 = \frac{\sqrt{C^2+4MN} - C}{2N}, \quad \varphi_2^2 = \frac{\sqrt{C^2+4MN} + C}{2N},$$

$$\varphi_3^2 = \frac{a}{\mu(1-2Q)}, \quad s_4^2 = \frac{\sqrt{A^2+4BN} - A}{2N}, \quad \varphi_4^2 = \frac{\sqrt{A^2+4BN} + A}{2N},$$

$$A = aJ\left[(\lambda+3\mu)(1-2Q) - EQ\right] + \mu^2 S_0(1+\nu)Q\left(2+(\nu-3)Q\right),$$

$$B = a\left[\mu S_0(1+2\nu Q) - ES_0 Q - aJ\right], \quad C = aJ\left[(\lambda+3\mu)(1-2Q) - EQ\right] +$$

$$+ 2S_0\left[\lambda^2\left(1+(\nu-1)Q\right)^2 - (\lambda+\mu)(1+2\nu Q)\left((\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ\right)\right],$$

$$M = a\left[2S_0(\lambda+\mu)(1+2\nu Q) - aJ\right], \quad N = \mu J(1-2Q)\left[(\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ\right],$$

C_k, $C_{m\alpha}$ $\left(k = \overline{1,10}; m = \overline{2,5}; \alpha = 1,2\right)$ – довільні функції від часу.

Перевіримо достатні умови Лежандра і Якобі мінімуму квадратичного функціонала W_1 при крайових умовах (16) і (17). Задача про мінімум функціонала W_1 при крайових умовах (16) є задачею класичного варіаційного числення з обома закріпленими кінцями, а в задачі з крайовими умовами (17) правий кінець є закріпленим, а на лівому кінці задають умови трансверсальності. Не важко перевірити, що підсилена умова Лежандра для функціонала W_1 виконуватиметься, коли параметр N_0 задовольнятиме систему нерівностей

$$1 - 2Q > 0, \qquad (\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ > 0.$$

Якщо для екстремалей (18) задовольнити крайові умови при $\xi^3 = 0$ із (16) і (17), то після цього можна переконатися, що спряженою до точки $\xi^3 = 0$ при крайових умовах (16) є точка $\xi^3 = 2\pi/\varphi_4$, а фокальною точкою [1] допустимих екстремалей при крайових умовах (17) є точка $\xi^3 = \pi/2\varphi_4$. Тому підсилена умова Якобі для функціонала W_1 виконується, якщо $\varphi_4 < b$, де $b = 2\pi/l$ за умов (16) і $b = \pi/2l$ за умов (17). Якщо $\varphi_4 > b$, то нижня грань функціонала W_1 дорівнює $-\infty$. Розрахунки показують, що при $\varphi_4 < b$ єдиною допустимою екстремаллю при крайових умовах (16) і (17) є екстремаль $u_k = 0$, $u_{\alpha k} = 0$ $\left(\alpha = 1, 2; k = \overline{1, 3}\right)$ і на ній функціонал приймає значення, яке дорівнює нулеві. Отже, доведено таке твердження.

Твердження 2. *Якщо параметр силового навантаження N_0 справджує систему нерівностей*

$$1 - 2Q > 0, \qquad (\lambda + 2\mu)(1 - 2Q) - EQ > 0, \qquad \varphi_4 < b, \tag{19}$$

то для квадратичного функціонала W_1 виконуються достатні умови глобального мінімуму і це мінімальне значення дорівнює нулеві.

З наведеного твердження легко отримуємо наслідок.

Наслідок. *Множина значень параметра N_0, за яких циліндричне тіло зі стандартного матеріалу другого порядку є стійким за мірами (4), (5), визначається з системи нерівностей (19).*

Розв'язавши систему (19) стосовно N_0, отримаємо

$$N_0 < \frac{b^2 J(\lambda + 2\mu) - \frac{aJ}{\mu}(\lambda + 3\mu) - \frac{aS_0}{b^2}\left(1 - \frac{aJ}{\mu S_0}\right)}{1 - \frac{aJ}{\mu S_0}\left(1 + \frac{2(\lambda+3\mu)}{E}\right) - \frac{2a}{b^2 E} + \frac{b^2 J}{S_0}\left(1 + \frac{4(\lambda+2\mu)}{E}\right)}. \tag{20}$$

Якщо прийняти в (20) $a = 0$, тобто знехтувати впливом відповідного доданку в мірах (4), (5), то отримаємо

$$N_0 < \frac{b^2 J(\lambda + 2\mu)}{1 + \frac{b^2 J}{S_0}\left(1 + \frac{4(\lambda+2\mu)}{E}\right)}. \tag{21}$$

Якщо прийняти, що $\nu = 0$ $(\lambda = 0, 2\mu = E)$ і знехтувати малим порівняно з одиницею доданком у знаменнику правої частини нерівності (21), то одержимо оцінку параметра силового навантаження

$$N_0 < b^2 EJ,$$

яка збігається з оцінкою, яку отримуємо під час дослідження стійкості за критерієм Ейлера [7,8].

---

1. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. – М., 1950.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М., 1967.
3. *Доманський П.П.* Дослідження стійкості руху за двома мірами пружних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, №3. – С. 29–36.

4. *Доманський П.П., Жуппан Ю.Б.* Стійкість за двома мірами пружних циліндричних тіл при врахуванні сил ваги // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, №4. – С. 104–110.
5. *Доманський П.П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл // Доп. НАН України. – 1997. – №6.– С. 53–59.
6. *Доманський П.П.* Про умови стійкості руху за двома мірами пружних тіл в лінеаризованому формулюванні задачі // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-матем. – 1998. – Вип. 51. – С. 42–54.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М., 1980.
8. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. матем. и мех. – 1960. – T.XXIX. – С. 3–20.
9. *Ржаницин А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. –М., 1955.
10. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. – Новосибирск, 1987.
11. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Л., 1986.

THE INVESTIGATION OF THE STABILITY IN TWO MEASURES OF ELASTIC CYLINDRICAL BODIES FROM STANDART SECOND ORDER MATERIAL

A. Voloshenyuk, P. Domans'kyj

Ivan Franko National University of Lviv

Sufficient conditions of the stability in two measures of the zero solution of linearized stability of the motion equation for isotropic elastic bodies under the load of forces are obtained. The determination of the stability condition for cylindrical bodies is reduced to the investigation of corresponding problem of variational calculus. The values of the critical parameters for partial case of the loading of cylindrical bodies under various fixation conditions are derived.

Key words: *stability in two measures of the motion equation for isotropic elastic bodies.*

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2000

Прийнята до друку 28.12.2000