ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.183–190

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.183–190

УДК 519.21

ОДНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ

Олександр Горобець, Ярослав Єлейко

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо випадок двох учасників.

Припустимо, що страхові компанії (СК) домовляються між собою про деяку систему поділу власних збитків для поліпшення своїх *ризикових ситуацій.* У цій праці ми в певних конкретних умовах намагатимемося знайти оптимальні умови договору між ними, які будуть прийнятні для обох СК.

Уведемо поняття *ризикової ситуації* для СК. Нехай СК випустила n страхових полісів. Кожний страховий контракт вимагає від СК страхових виплат клієнтам, які є незалежними однаково розподіленими *випадковими величинами* (ВВ). Позначимо ВВ виплат j-му клієнтові через X_j ($X_j \geqslant 0$ і X_j належить деякому простору (Ω, F, P)), а її функцію *розподілу* через $F_j(x)$. Тоді загальні виплати, породжені портфелем СК, мають вигляд $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Нехай ВВ X з того самого простору Ω має функцію *розподілу* $F(x)$, яка є абсолютно неперервною з функцією *щільності* $f(x)$, і припустимо, що для неї існують скінченні *математичне сподівання* MX і *дисперсія* $VarX$.

Приймемо, що $MX = M$. Якщо компанія продає поліси за ціною $M^* = M/n$, то її середній прибуток дорівнює нулю. Величина M^* називається *нетто-премією.* Звичайно, компанії вводять у вартість поліса ще так зване *навантаження,* яке відповідає витратам СК на ведення справи і надбавці на прибуток. Позначимо через L_j навантаження, що відповідає j-му полісу, а через S – *резервний* капітал компанії. Перед початком страхових виплат СК має капітал

$$S + \sum_{j=1}^{n} L_j + M \equiv R + M. \tag{1}$$

Величина R називається *вільним резервом. Ризикову ситуацію* СК логічно буде характеризувати парою $(R, F(x))$.

Нехай $Y = R + M - X$ – ВВ, яка відповідає за *кінцевий* капітал СК і $G(y)$ – функція *розподілу* Y. Тоді $G(y) = 1 - F(R + M - y)$. Тобто між функцією *розподілу* $G(y)$ і *ризиковими ситуаціями* $(R, F(x))$ є взаємно однозначна відповідність. Природно вважати, що страхові компанії намагаються якось поліпшити свої власні *ризикові ситуації.* Тому для визначення *оптимальної* політики СК нам треба навчитися порівнювати різні *ризикові ситуації.* Це можна зробити, поставивши у відповідність кожній ВВ Y число $U(Y)$ – *корисність* ВВ доходу Y. Найчастіше $U(Y)$ зображають у вигляді звичайного *математичного сподівання* Y, однак такий підхід не враховує багатьох чинників, які неможливо виразити в грошах (наприклад, соціального або психологічного характеру). Тому ми використовуватимемо такий критерій *очікуваної корисності*, який частково знімає поставлені запитання

$$U(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\, dG(y) = Mu(y), \tag{2}$$

де $u(y)$ – функція *корисності* грошей компанії. Тобто, *корисність* довільної *ризикової ситуації* можна зобразити як середнє значення *корисності* майбутнього доходу. СК, маючи свою власну функцію *корисності* $u(y)$, побудова якої загалом, потребує окремого дослідження, і тому описувати її ми не будемо, за допомогою зображеного вище критерію може визначити *корисність* тієї чи іншої *ризикової ситуації*[1] і на підставі цього робити висновки. Треба зазначити, що для існування інтеграла (2) і враховуючи означення функції $u(y)$, як функції *корисності* грошей, вона повинна бути неспадною і диференційовною.

Теорема. *Нехай перша і друга СК з ризиковими ситуаціями $(S_i, F_i(x))$ і функціями корисності вигляду $u_i(x) = 1 - e^{-a_i \cdot x}, a_i > 0,\ i = \overline{1..2}$ і $a_1 \leqslant a_2$ мають рівномірно розподілені ВВ сумарних страхових виплат $X_i, i = \overline{1..2}$ з*

$$f_i(x) = \begin{cases} 1/2M_i & ,0 < x < 2M_i \\ 0 & ,\text{інакше} \end{cases} \quad \text{або} \quad F_i(x) = \begin{cases} 0 & ,x \leqslant 0 \\ x/2M_i & ,0 < x < 2M_i \\ 1 & ,\text{інакше}, \end{cases} \tag{3,4}$$

де $M_i = MX_i$. Також вважаємо заданими характеристики вигляду

$$U_i(S_i, F_i) = \int_0^{+\infty} u_i(S_i - x)\, dF_i(x),\ i = \overline{1..2}. \tag{5}$$

Тоді існує оптимальний договір між двома страховими компаніями або, що те саме, існує оптимальний перерозподіл загальних збитків $X_1 + X_2$.

Доведення. Нехай $y(X_1, X_2) : \Omega \times \Omega \to \Re_+$ – розмір страхових виплат, яку сплачує перша СК після укладення договору. Друга СК виплачує $y(X_1, X_2) - X_1 - X_2$. Отже, функція $y(X_1, X_2)$ повністю описує договір між компаніями. Вона відображає внесок першої СК у разі перерозподілу ризику. Введемо таке означення.

Означення 1. *Ризикова ситуація (S_i^*, F_i^*) є ліпшою від ризикової ситуації (S_i, F_i) тоді і лише тоді, коли*

$$U_i(S_i^*, F_i^*) > U_i(S_i, F_i),\ i = \overline{1..2}. \tag{6}$$

У цьому випадку для характеристики початкових (без укладення договору) *ризикових ситуацій* ми отримаємо згідно з (5)

$$U_1(S_1, F_1) = \int_0^{+\infty} u_1(S_1 - x)\, dF_1(x) = \int_0^{2M_1} \left(1 - e^{-a_1(S_1 - x)}\right) \cdot \frac{1}{2M_1}\, dx =$$

[1]У праці von Neumann J., Morgenstern O. "Theory of Games and Economic Behaviour" описана система аксіом, у рамках якої існує функція *корисності* грошей u(y) така, що шуканий критерій зображають у вигляді (2).

$$= \frac{1}{2M_1} \cdot \left[2M_1 - \frac{1 - e^{-a_1(S_1 - x)}}{a} \Big|_0^{2M_1} \right].$$

Тоді

$$U_1(S_1, F_1) = 1 + \frac{e^{-a_1 S_1}}{2M_1 \cdot a_1} \cdot \left(1 - e^{2M_1 \cdot a_1}\right) \tag{7}$$

Аналогічно для другої СК

$$U_2(S_2, F_2) = 1 + \frac{e^{-a_2 S_2}}{2M_2 \cdot a_2} \cdot \left(1 - e^{2M_2 \cdot a_2}\right). \tag{8}$$

Позначимо через $U_i(0) \equiv U_i(S_i, F_i)$ очікувану *корисність* початкових *ризикових ситуацій* компаній, які вони мали до укладення договору. Оскільки договір між ними повністю описує функція $y(X_1,\ X_2)$, то очікувані *корисності ризикових ситуацій* СК після укладення договору набувають вигляду

$$U_1(y) \equiv \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} u_1(S_1 - y(x_1, x_2))\, dF_1(x_1)\, dF_2(x_2), \tag{9}$$

$$U_2(y) \equiv \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} u_2(S_2 - x_1 - x_2 + y(x_1, x_2))\, dF_1(x_1)\, dF_2(x_2). \tag{10}$$

З того, що функції *корисності* грошей компаній $u_i(x)$ неспадні та диференційовні, випливає, що інтереси компаній прямо протилежні. Кожна компанія під час переговорів намагається максимізувати власну функцію *очікуваної корисності* $U_i(y)$, і результатом переговорів буде така функція $y(X_1, X_2)$, відхилятися від якої невигідно як першій, так і другій компанії.

Для опису оптимального договору перестрахування приймемо, що компанії ведуть себе раціонально, тобто функцію $y(X_1, X_2)$ не приймають, якщо існує така функція $\widetilde{y}(X_1, X_2)$, що

$$U_1(\widetilde{y}) \geqslant U_1(y),\ U_2(\widetilde{y}) \geqslant U_2(y), \tag{11}$$

і хоча б одна з нерівностей є строга. У цьому випадку говорять, що функція $\widetilde{y}(X_1, X_2)$ домінує над функцією $y(X_1, X_2)$. Зазначимо, що недомінований договір перестрахування, або такий договір, що задається функцією $\widetilde{y}(X_1, X_2)$, для якої не існує іншої функції, яка б домінувала над нею, існує (це випливає хоча б з того, що множина функцій страхових виплат першої СК не порожня), проте необов'язково єдиний. Множину недомінованих функцій називають множиною функцій (або договорів) оптимальних за Парето. Отже, з припущення про раціональну поведінку випливає означення.

Означення 2. *Функція $y^*(X_1, X_2)$ є оптимальною, якщо*

- *функція $y^*(X_1, X_2)$ оптимальна за Парето; (*)*
- *виконуються нерівності $U_1(0) \leqslant U_1(y^*)$, $U_2(0) \leqslant U_2(y^*)$ (**).*

Як вже зазначено, ці дві умови не визначають єдиного розв'язку. Для того щоб вибрати з множини функцій, які задовольняють ці умови, якусь одну, треба накласти додаткові умови, які можуть бути досить різноманітними. Ми використовуватимемо так званий розв'язок за Нешем[2] , який найпопулярніший у класичній теорії ігор. Він зводиться до максимізації добутку

$$(U_1(y) - U_1(0)) \cdot (U_2(y) - U_2(0)) \to \max . \tag{13}$$

У цій праці ми не будемо детально розглядати аксіоми, що призводять до такого рішення (основні з них – незалежність від сторонніх альтернатив та інваріантність стосовно лінійних перетворень). У книзі Borch K. "The Mathematical Theory of Insurance" описано клас функцій $y(X_1, X_2)$ оптимальних за Парето. Точніше, там показано, що для того щоб функція $y(X_1, X_2)$ була оптимальна за Парето, необхідно і достатньо, щоб існувала така додатна стала k, що

$$u_2'(S_2 - x_1 - x_2 + y) = k \cdot u_1'(S_1 - y). \tag{14}$$

Ми приймали, що функції *корисностей* $u_1(x)$ і $u_2(x)$ не спадають або, що те саме, $u_1'(x)$ і $u_2'(x)$ неперервні і монотонно спадають. Тоді для кожного k існує принаймні одна функція $y(X_1, X_2)$, яка задовольняє рівняння (14). З рівняння (14) видно, що функція $y(X_1, X_2)$ зростає за k, тому перша компанія намагається збільшити k, а друга – зменшити. Оскільки немає апріорних передумов того, що одна з компаній ліпша від іншої, то з цього випливає, що значення $y(X_1, X_2)$ залежить від X_1 і X_2 лише через їхню суму, і тому ми можемо зробити висновок, що оптимальна функція $y(X_1, X_2)$ має вигляд

$$y(X_1, X_2) = g(Z, k) \ , \qquad Z = X_1 + X_2. \tag{15}$$

У цьому випадку розв'язок за Нешем залежить від значення k, яке максимізує добуток

$$[U_1(g(Z, k)) - U_1(0)] \cdot [U_2(g(Z, k)) - U_2(0)] \to \max . \tag{16}$$

Знайдемо вигляд функції $y(X_1, X_2)$, а, точніше, функції $g(Z, k)$ з рівняння (14)

$$a_2 \cdot e^{-a_2(S_2 - x_1 - x_2 + y)} = k \cdot a_1 \cdot e^{-a_1(S_1 - y)}.$$

Після деяких перетворень

$$y = \frac{ln\,(a_2/\,ka_1) + a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot (S_2 - Z)}{a_1 + a_2}. \tag{17}$$

Позначимо

$$m = m(k) = \frac{\ln\,(a_2/\,ka_1) + a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_2}{a_1 + a_2} \quad \text{і} \quad n = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \tag{17'}$$

тоді отримаємо

$$y = m(k) + n \cdot Z = m + n \cdot X_1 + n \cdot X_2. \tag{17''}$$

За допомогою формул (9), (10) знайдемо очікувані *корисності ризикових ситуацій* обох компаній після укладення договору

$$U_1(g(Z, k)) = \frac{1}{4M_1M_2} \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} (1 - e^{-a_1(S_1 - g)})\, dx_1 \right] dx_2.$$

[2]Розв'язок за Нешем детальніше описаний у Borch K. "The Mathematical Theory of Insurance".

Користуючись (17"), одержимо

$$U_1(g(Z,k)) = 1 - \frac{(e^{2M_1a_1n}-1)(e^{2M_2a_1n}-1)}{4M_1M_2(a_1n)^2}\cdot e^{-a_1(S_1-m)}. \tag{18}$$

За тими самими формулами аналогічно обчислюємо $U_2(g(Z,k))$

$$U_2(g(Z,k)) = 1 - \frac{(e^{2M_1a_2(1-n)}-1)(e^{2M_2a_2(1-n)}-1)}{4M_1M_2(a_2(1-n))^2}\cdot e^{-a_2(S_2+m)}. \tag{19}$$

Ми обчислили всі характеристики *ризикових ситуацій* для двох СК до і після укладення договору з перестрахування і тому можемо безпосередньо відшукувати сталу k, яка відповідає за нашу функцію $g(Z,k)$. Спочатку перевіримо виконання умови (*). Для першої СК повинно виконуватись

$$U_1(g(Z,k)) - U_1(0) \geqslant 0.$$

Або, розписавши, отримаємо першу умову на k

$$k \geqslant \frac{a_2}{a_1}\cdot \sqrt[C_1]{e^{C_2}\cdot\frac{(e^{2M_1a_1n}-1)(e^{2M_2a_1n}-1)}{2M_2a_1n^2\cdot(e^{2M_1a_1}-1)}}, \tag{20}$$

де C_1 і C_2 – сталі, які залежать від a_1, a_2, S_1, S_2. Зазначимо, що C_1 більше від нуля. Для дугої СК аналогічно одержуємо умову на k через сталі B_1 і B_2, які залежать від a_1, a_2, S_1, S_2. Стала B_1 більша від нуля

$$k \leqslant \frac{a_1}{a_2}\cdot \sqrt[B_1]{e^{B_2}\cdot\frac{2M_1a_2(n-1)^2\cdot(e^{2M_2a_2}-1)}{(e^{2M_1a_2(n-1)}-1)(e^{2M_2a_2(n-1)}-1)}}. \tag{21}$$

Ми знайшли умови на k, при яких виконується умова (*). Умова (**) виконується за рахунок вибору функції $y(X_1,X_2)$ або $g(Z,k)$ вигляду (17). Маємо клас оптимальних функцій, з якого вибираємо за допомогою (16) функцію $y(X_1,X_2)$, яка і визначатиме наш договір, *оптимальний* для обох компаній. Розпишемо (16)

$$\begin{aligned}\varPhi(k) = &\left[\frac{e^{-a_1S_1}}{2M_1a_1}(e^{2M_1a_1}-1) - \frac{(e^{2M_1a_1n}-1)(e^{2M_2a_1n}-1)}{4M_1M_2(a_1n)^2}\cdot e^{-a_1(S_1-m(k))}\right]\times\\ \times&\left[\frac{e^{-a_2S_2}}{2M_2a_2}(e^{2M_2a_2}-1) - \frac{(e^{2M_1a_2(n-1)}-1)(e^{2M_1a_2(n-1)}-1)}{4M_1M_2(a_2(n-1))^2}e^{-a_2(S_2+m(k))}\right]\to\max.\end{aligned} \tag{22}$$

Розпишемо n і $m(k)$ в $\varPhi(k)$ та для зручності позначимо окремо доданки, які не залежать від k, і множники при k

$$u_i = u(a_i, M_i, S_i) \equiv \frac{e^{-a_iS_i}}{2M_ia_i}(e^{2M_ia_i}-1) \tag{23}$$

і

$$v \equiv \frac{\left(e^{2M_1\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}}-1\right)\left(e^{2M_2\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}}-1\right)}{4M_1M_2\left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right)^2}\cdot e^{-\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}(S_1+S_2)}. \tag{24}$$

Тоді (22) перепишемо у вигляді

$$\varPhi(k) = \left[v\cdot e^{\frac{a_1}{a_1+a_2}ln(a_2/ka_1)} - u_1\right]\times\left[v\cdot e^{-\frac{a_2}{a_1+a_2}ln(a_2/ka_1)} - u_2\right]\to\max. \tag{25}$$

Для знаходження екстремуму функції однієї змінної необхідно прирівняти першу похідну до нуля. Скоротивши, отримаємо

$$\Phi'(k) = v \cdot (a_2 - a_1) \cdot k^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} - u_1 \cdot a_2 \cdot k \cdot \left(\frac{a_1}{a_2}\right) + u_2 \cdot a_1 = 0.$$

Поділимо все рівняння на $-u_1 \cdot a_1$, позначимо множник при k буквою a, вільний член – b і степінь, до якого підносять k, – через $\aleph$, одержимо

$$k - a \cdot k^{\aleph} - b = 0\,, \quad a \geqslant 0\,, \quad b > 0\,, \quad 0 < \aleph = \frac{a_2}{a_1 + a_2} < 1. \tag{26}$$

У загальному вигляді це рівняння явно не розв'язується, однак можуть допомогти наближені методи розв'язування рівнянь. Використаємо метод простих ітерацій

$$k_0 = b\,, \quad k_{i+1} = a \cdot k_i^{\aleph} + b. \tag{27}$$

Тоді послідовність $\{k_i\}$ буде збігатися до k^* – розв'язку (26). Доведемо це. У рівнянні (14) ми вибирали k додатною величиною і тому рівняння (26) має сенс лише при додатних k. Розглянемо функцію $y = k/\left(a \cdot k^{\aleph} + b\right)$, $0 < \aleph \leqslant 1$. Маємо $\lim\limits_{k\to 0} y(k) = 0$ і $\lim\limits_{k\to+\infty} y(k) = +\infty$, тому з того, що $y(k)$ зростаюча і неперервна на $(0, +\infty)$, $\exists!$ k^* таке, що $y(k^*) = 1$.

Зауваження 1. Послідовність $\{k_i\}$ обмежена зверху.

Доведемо, що послідовність $\{k_i\}$ обмежена зверху, за допомогою методу математичної індукції.

- Для $i = 0$:

$$k_0 = b < a \cdot (k^*)^{\aleph} + b = k^*$$

- Для $i = n$ – припущення індукції.
- Для $i = n + 1$.

$$k_{n+1} = a \cdot {k_n}^{\aleph} + b < a \cdot (k^*)^{\aleph} + b = k^*$$

за припущенням індукції.

Зауваження 2. Послідовність $\{k_i\}$ неспадна.

Доведемо це так само за допомогою методу математичної індукції.

- Для $i = 0$.

$$k_1 = a \cdot {k_0}^{\aleph} + b = a \cdot b^{\aleph} + b \geqslant b$$

оскільки $a \geqslant 0\,, \quad b > 0$.

- Для $i = n$ – припущення індукції.
- Для $i = n + 1$.

$$k_{n+1} = a \cdot {k_n}^{\aleph} + b \geqslant a \cdot {k_{n-1}}^{\aleph} + b = k_n$$

за припущенням індукції і оскільки $\aleph > 0$.

Тоді з *зауважень 1* і *2* випливає, що послідовність $\{k_i\}$ збіжна. Перейдемо до границі при $i \to +\infty$ у виразі

$$k_{i+1} = a \cdot {k_i}^{\aleph} + b.$$

Одержимо

$$k = a \cdot k + b,$$

де $k = \lim\limits_{i \to +\infty} k_i$ є розв'язком (26), тобто k збігається з k^*. Отже, з будь-якою точністю ми зможемо знайти k^*-розв'язок рівняння (26) і, підставивши його в (17), отримаємо розв'язок за Нешем:

$$y^* = g(Z, k^*) = \frac{ln\,(a_2 / k^* a_1) + a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot (S_2 - Z)}{a_1 + a_2}. \tag{28}$$

Якщо k^* задовольняє умови (20), (21), то (28) відображає *оптимальний* вигляд договору з перестрахування для двох компаній, при якому перша СК оплачує величину g(Z ,k^*), а друга – $Z - g(Z, k^*)$, інакше договір зашкодить першій або другій СК, залежно від того, яку умову k^* не задовольняє.

Зауважимо таке

I. У випадку розгляду більше ніж двох компаній, які беруть участь у переговорах, виникає багато труднощів, пов'язаних, по-перше, з тим, що формальне перенесення викладеної вище моделі на три учасники і більше в декілька разів ускладнить обчислення, що може призвести до неможливості подання деяких обчислених вище характеристик у явному вигляді, а, по-друге, що деякі з компаній можуть об'єднуватися, тобто необхідний розв'язок, який враховує можливість коаліцій, що, відповідно, ще більше ускладнить обчислення.

II. Модель не враховує можливості банкрутства, тобто оптимальна згода може вимагати від однієї з компаній витрат, які перевищують її вільний резерв.

III. *Ризикові ситуації* порівнюють за допомогою спрощеного критерію очікуваної *корисності*[3], що зменшує достовірність отриманих результатів.

IV. Навіть вибір розв'язку за Нешем, який є природним у теорії ігор, не враховує деяких аспектів конкретної ситуації. Наприклад, на практиці є інші чинники, які впливають на вибір СК, крім поліпшення власних *ризикових ситуацій*, тому ми повинні максимізувати не вираз (16), а щось інше[4].

V. Треба зауважити, що доцільно використовувати одержані результати лише як орієнтир під час переговорів.

---

1. *Прабху Н.* Стохастические процессы теории запасов. – М., 1984.
2. *Ротарь В. И., Бенинг В. Е.* Введение в математическую теорию страхования. – М., 1994.
3. *Allais M.* Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulates et axiomes de l'ecole americaine // Econometrica. – 1953. – Vol. 21. – P.503–546.
4. *Borch K.* The Mathematical Theory of Insurance. – Lexington Books, 1974.
5. *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behaviour.

[3]Складні критерії описані в праці Allais M. "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulates et axiomes de l'йcole amйricaine."

[4]Інші можливі підходи розглянуті в Ротарь В. И., Бенинг В. Е. "Введение в математическую теорию страхования."

ONE MATHEMATICAL MODEL OF REINSURANSE OF THE INSURERS

O. Gorobets, Ya. Yeleyko

Ivan Franko National University of Lviv

The article is dedicated to study by a special image of the constructed model of reinsurance for two insurers in case of uniform distributed average general losses. It grounded on the theory of consumption with usage of utility functions of two insurers. The purpose was a determination of the *optimal* agreement. *Optimal* was considered to be the such agreement which one would satisfy as one and other with the company. The *optimal* solution was retrieved as a solution on Nash, popular in the classic theory, selected from set of functions optimal on Paretto. The conditions of existence of the *optimal* agreement are investigated.

Key words: *reinsurance, utility functions.*

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2000

Прийнята до друку 28.12.2000