ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.58.С.191–196 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.58.P.191–196*

УДК 518:517.948

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНО–АНАЛІТИЧНОГО ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Степан Кічура, Борис Остудін

Львівський національний університет імені Івана Франка

У процесі проектування електронно-променевих приладів постає проблема визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів, яку називають електронно-оптичною системою. Будуючи відповідну математичну модель, окремі електроди доцільно подавати у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задають граничні значення потенціалу. Ефективні розв'язки такої задачі можна одержати на підставі методу інтегральних рівнянь (ІР), оскільки його застосування пов'язане з знаходженням невідомих величин лише на граничних поверхнях. Однак наявність досить складних форм сучасних конструкцій електродів суттєво ускладнює традиційне застосування методу ІР, причому певні проблеми виникають, якщо окремі електроди моделюють у вигляді необмежених поверхонь. У такій та подібних ситуаціях (наявність канонічних поверхонь) доцільно поєднувати метод ІР з апаратом функцій Гріна.

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ міститься замкнена ляпуновська поверхня Σ. Введемо такі позначення: Ω^+ – область, обмежена поверхнею Σ; $\overline{\Omega}^+ := \Omega^+ \bigcup \Sigma$; $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}^+$; M, N, P і т.д. – точки в $\mathbb{R}^3$. Припустимо далі, що в необмеженій області Ω^- міститься деяка сукупність скінченної кількості кусково-гладких розімкнених поверхонь, які не мають спільних точок, $S := \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$. Нехай $\overline{S}_i := S_i \bigcup \partial S_i$, а $\overline{S} := \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{S_i}$, причому ∂S_i – кусково-гладкий контур, який обмежує S_i $(i = \overline{1,m})$.

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими в просторі та незмінними в часі електричними зарядами, розподіленими за поверхнями Σ та S. Потрібно визначити потенціал $U(P)$ в області $\Omega_s^- := \Omega^- \backslash \overline{S}$, якщо на поверхнях задано граничні умови першого роду. Формулюючи задачі, враховуватимемо узагальнене трактування її розв'язку, а також специфічне задання граничних умов. Це наразі пояснюється умовами використання відповідного математичного апарату в процесі одержання та дослідження ІР. Отже, необхідно визначити функцію $U(P) \in H^1(\Omega_s^-, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta U(P) = 0,\ P \in \Omega_s^-;\quad \gamma_0^- U(P) = g_0(P),\ P \in \Sigma;\quad \delta^{\pm} U(P) = g_{\pm}(P),\ P \in S;$$
$$\lim_{|P|\to\infty} U(P) = 0,\ P \in \Omega_s^-, \tag{1}$$

де $\gamma_0^-: H^1(\Omega_s^-) \longrightarrow H^{1/2}(\Sigma)$, $\delta^\pm : H^1(\Omega_s^-) \longrightarrow H^{1/2}(S)$, – оператори сліду [1], а

$$H^1(\Omega_s^-,\Delta) := \Big\{U(P) \;\Big|\; U(P) \in H^1(\Omega_s^-),\ \Delta U(P) \in L_2(\Omega_s^-)\Big\};$$

$$H^1(\Omega_s^-) := \Big\{U(P) \;\Big|\; U(P), |\nabla U(P)| \in L_2(\Omega_s^-)\Big\}.$$

Припустимо також, що $g_0(P) \in H^{1/2}(\Sigma)$, $g_\pm(P) \in H^{1/2}(S)$ – задані функції, причому $g_\pm(P)$ – відоме значення шуканої функції на S відповідно з додатної та від'ємної сторони.

Вважатимемо, що для області Ω^- існує функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа. Тому згідно з [2] розв'язок задачі (1) шукатимемо у вигляді $U_1(P) + U_2(P)$, де U_1 та U_2 – розв'язки таких задач:

$$\Delta U_1(P) = 0, P \in \Omega^-; \gamma_0^- U_1(P) = g_0(P), P \in \Sigma; \lim_{|P|\to\infty} U_1(P) = 0, P \in \Omega^-, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\Delta U_2(P) = 0,\ P \in \Omega_s^-; \quad \gamma_0^- U_2(P) = 0,\ P \in \Sigma, \\ &\delta^\pm U_2(P) = d_\pm(P) := g_\pm(P) - U_1(P),\ P \in S; \quad \lim_{|P|\to\infty} U_2(P) = 0,\ P \in \Omega_s^-. \end{aligned} \quad (3)$$

Відомо [4], що розв'язок задачі (2) подається у вигляді

$$U_1(P) = -\iint\limits_\Sigma \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M} g_0(M)\,\mathrm{d}S_M,$$

де $G(P,M)$ – функція Гріна оператора Лапласа для Ω^-. Отже, для знаходження $U(P)$ необхідно розв'язати задачу (3). Можна показати [2], що вона еквівалентна ІР

$$\iint\limits_S G(P,M)\tau(M)\,\mathrm{d}S_M = \widehat{g}(P),\ P \in S, \quad (4)$$

де $\tau(M)$ – шукана густина розподілу зарядів на S, $\tau(M) \in \Big(H^{1/2}(S)\Big)'$;

$$\widehat{g}(P) = \frac{1}{2}\big(d_-(P) + d_+(P)\big) + U_0(P),$$

причому

$$U_0(P) = \iint\limits_S \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M}\left[d_-(M) - d_+(M)\right]\mathrm{d}S_M,$$

$$d_-(M) - d_+(M) \in H_{00}^{1/2}(S).$$

Зауважимо, що

$$H_{00}^{1/2}(S) := \Big\{U(P) \;\Big|\; U(P) \in H^{1/2}(S),\ \omega^{-1/2}\cdot U \in L_2(S)\Big\},$$

де $\omega(P)$ – достатньо гладка функція, яка обертається в нуль при підході до ∂S як $\operatorname{dist}(P,\partial S)$. Розв'язок задачі (3) подається у вигляді

$$U_2(P) = \iint\limits_S G(P,M)\tau(M)\,\mathrm{d}S_M - U_0(P),\ P \in \Omega_s^-,$$

а рівняння (4) має єдиний розв'язок при $\widehat{g}(p) \in H^{1/2}(S)$ [3].

Зауважимо також, що поверхня Σ може бути незамкненою та навіть необмеженою в просторі. Для нас суттєвою є лише умова існування відповідної функції Гріна. При електростатичній інтерпретації задачі (1) вважаємо, що $g_+(P) = g_-(P) = g(P) \equiv \text{const}, d(P) := d_+(P) = d_-(P)$; отже, в ІР (4) $\widehat{g}(P) = d(P)$.

Для наближеного розв'язання ІР (4) застосуємо метод колокації, який дає змогу звести (4) до системи лінійних алгебричних рівнянь, матриця якої містить коефіцієнти, що є лінійними комбінаціями деяких двовимірних як власних, так і невласних інтегралів. Використання кубатурних формул високого порядку точності суттєво (навіть при наявності сучасних швидкісних комп'ютерів) збільшує час розв'язання задачі. Аналіз реально існуючих електронно-оптичних систем засвідчує, що вони переважно складаються з найпростіших, в сенсі виготовлення, металевих пластин прямокутної та трапецевидної форм. Саме такі обмеження на клас поверхонь $\{S_i\}_{i=1}^m$ у процесі моделювання електростатичних полів дали змогу аналітично обчислити переважну кількість згаданих вище двовимірних інтегралів. Разом з уникненням похибки чисельного інтегрування вдалося досягнути багатократного зменшення часу розв'язання задачі в цілому. Не обмежуючи, на нашу думку, загальності, продемонструємо особливості названої методики на конкретному прикладі.

Нехай потрібно визначити розподіл зарядів на двох паралельних прямокутних пластинах S_1 і S_2 та сферичній поверхні Σ радіуса R, розташованій між ними. Задамо в $\mathbb{R}^3$ декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) і припустимо, що пластини паралельні до площини $x_3 = 0$, а відстань між ними дорівнює D. Для подання S_i використаємо параметричні рівняння

$$\begin{gathered} S_i = \{x_1^i(\alpha,\beta) \equiv \alpha,\ x_2^i(\alpha,\beta) \equiv \beta,\ x_3^i(\alpha,\beta) \equiv \widehat{C}_i; \\ (\alpha,\beta) \in \overline{\Delta}_i = [a_i,b_i]\times[c_i,d_i],\ b_i > a_i,\ d_i > c_i;\ \overline{\Delta}_i \subset \mathbb{R}^2;\ i = 1,2\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Очевидно, що в цьому конкретному випадку ІР (4) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{2} \iint\limits_{S_i} \tau(M_i) G(M_i; P_j)\, \mathrm{d}S_{M_i} = \widehat{g}(P_j) = g(P_j) - U_1(P_j). \tag{6}$$

Тут M_i – точка інтегрування, що належить S_i; $P_j = \left(x_k^j(\alpha_0,\beta_0)\right)_{k=1}^3$, $(\alpha_0,\beta_0) \in \overline{\Delta}_j$ – довільна фіксована точка, яка лежить на S_j; g – сукупне значення потенціалу на $S_1 \bigcup S_2$: $g(P_j) = g_j = \text{const}$; τ – сукупна густина розподілу зарядів на $S_1 \bigcup S_2$; $\mathrm{d}S_{M_i} = \sigma_i(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$ – елемент поверхні S_i у локальних координатах (α,β). Функція Гріна для області, що лежить зовні сфери радіуса R, має такий вигляд:

$$G(M_i; P_j) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\operatorname{dist}(M_i; P_j)} - \frac{R}{\operatorname{dist}(0; P_j)} \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(M_i; \widehat{P}_j)}\right],$$

де

$$\operatorname{dist}^2(M_i; P_j) = \sum_{k=1}^{3}\left[x_k^i(\alpha,\beta) - x_k^j(\alpha_0,\beta_0)\right]^2; \quad \operatorname{dist}^2(0; P_j) = \sum_{k=1}^{3}\left[x_k^j(\alpha_0,\beta_0)\right]^2;$$

$$\operatorname{dist}^2(M_i; \widehat{P}_j) = \sum_{k=1}^{3}\left[x_k^i(\alpha,\beta) - \widehat{x}_k^j(\alpha_0,\beta_0)\right]^2; \quad \widehat{x}_k^j(\alpha_0,\beta_0) = \frac{x_k^j(\alpha_0,\beta_0)}{\operatorname{dist}^2(0; P_j)} \cdot R.$$

Припускаючи, що $\Delta_1 \equiv \Delta_2$, з врахуванням параметризації (5), маємо

$$\operatorname{dist}^2(M_i; P_i) = (\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2; \quad \operatorname{dist}^2(M_i; P_j) = (\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + D^2,$$

причому $D := \operatorname{dist}(S_1, S_2)$. Для обчислення величини $U_1(P_j)$ у правій частині ІР (6) використовуємо інтеграл Пуассона [4]

$$U(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho_1^2 - R^2}{[R^2 - 2\rho_1 R \cos(\gamma) + \rho_1^2]^{3/2}} g_0(\theta, \varphi) \sin(\theta) \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi,$$

де $(\rho_1, \theta_1, \varphi_1)$ – сферичні координати точки P_j; $g_0(\theta, \varphi) \equiv g_0 = \mathrm{const}$ – граничне значення потенціалу на сфері Σ радіуса R, а $\cos(\gamma) = \cos(\theta)\cos(\theta_1) + \sin(\theta)\sin(\theta_1)\cos(\varphi - \varphi_1)$.

У процесі розв'язування (6) методом колокації з апроксимацією шуканої густини за допомогою кусково поліноміальних базисних функцій виникає проблема обчислення таких невласних інтегралів:

$$I(m, n; a, b; x_0, y_0) := \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{x^m y^n \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{\sqrt{(ax - x_0)^2 + (by - b_0)^2 + d^2}}, \quad \begin{array}{l} m, n = 0, 1, 2, 3; \\ a, b > 0; \ d \geqslant 0. \end{array} \tag{7}$$

Щоб уніфікувати проблеми, виконаємо заміну змінних, яка відповідає перенесенню центру системи координат у точку (x_0, y_0), тоді

$$I(m, n; a, b; x_0, y_0) := a^{-(m+1)} b^{-(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} C_m^i C_n^j x_0^{m-i} y_0^{n-i} \int_{e_1}^{e_2} \int_{f_1}^{f_2} \frac{u^i v^j \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2 + v^2 + d^2}},$$

де $u := ax - x_0$, $v := by - y_0$, $e_1 := -a - x_0$, $f_1 := -b - y_0$, $e_2 := a - x_0$, $f_2 := b - y_0$, якобіан $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \dfrac{1}{ab}$, а C_k^j – коефіцієнти біному Ньютона. Отже, для обчислення (7) потрібно визначити

$$J(m, n) := \int_{e_1}^{e_2} \int_{f_1}^{f_2} \frac{u^m v^n \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2 + v^2 + d^2}}, \tag{8}$$

у припущенні $e_1 < e_2$, $f_1 < f_2$. Для (8) одержано формули при різних значеннях параметрів m і n. Наприклад,

$$J(3, 1) = \frac{1}{15} \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} (3e_i^2 - 2f_j^2 - 2d^2) s_{ij}^3,$$

де

$$s_{ij} = \sqrt{e_i^2 + f_j^2 + d^2}.$$

Зауважимо, що найскладнішою виявилась формула для обчислення (8) при $m = 2$ і $n = 0$

$$J(2, 0) = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} e_i f_j s_{ij} + \frac{1}{6} \sum_{\begin{pmatrix} e & f & k \\ f & e & l \end{pmatrix}} k \sum_{i=1}^{2} (-1)^i e_i \left(s_{ii}^2 - f_i^2\right) \ln \left| \frac{f_2 + s_{i2}}{f_1 + s_{i1}} \right| -$$

$$-\frac{d^2}{3}e_{21}^{-}f_{21}^{-}I(0,0;e_{21}^{-},f_{21}^{-},e_{21}^{+},f_{21}^{+}),$$

причому $k := 2$, $l := -1$, $e_{21}^{-} := (e_2 - e_1)/2$, $e_{21}^{+} := -(e_2 + e_1)/2$, $f_{21}^{-} := (f_2 - f_1)/2$, $f_{21}^{+} := -(f_2 + f_1)/2$, а

$$I(0,0;e_{21}^{-},f_{21}^{-},e_{21}^{+},f_{21}^{+}) = \frac{1}{ab}\Bigg\{ \sum_{\begin{pmatrix} a & b & x_0 & y_0 \\ b & a & y_0 & x_0 \end{pmatrix}} \sum_{i=1}^{2} a_i(x_0)\ln\left|\frac{b_2(y_0)+t_{i2}(x_0,y_0)}{-b_1(y_0)+t_{i1}(x_0,y_0)}\right| +$$

$$+2d\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{d}\left[(-1)^j b_j(y_0) - (-1)^i a_i(x_0) + t_{ij}(x_0,y_0)\right]\right)\Bigg\},$$

де $a_i(x_0) := a + (-1)^i x_0$, $b_j(y_0) := b - (-1)^j y_0$, $t_{ij}(x_0,y_0) := \sqrt{a_i^2(x_0) + b_j^2(y_0) + d^2}$.

Детальніше про обчислення (8) можна довідатися з праці [5]. Повертаючись до загальної постановки задачі, зауважимо, що описаний вище чисельно-аналітичний підхід до розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь першого роду зі слабкою особливістю в ядрі доцільно використовувати, коли заряджена пластина S_i $(i = \overline{1,m})$ має форму довільного чотирикутника. Справді, нехай вершини пластини мають координати (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}), $j = \overline{1,4}$. Тоді відповідні параметричні рівняння можна подати так:

$$\begin{aligned}
x_i(\alpha,\beta) &:= 0.25\sum_{j=1}^{4} x_{ij}\varphi_j(\alpha,\beta), \quad \varphi_j(\alpha,\beta) := \big(1+(-1)^p\alpha\big)\big(1+(-1)^q\beta\big),\\
y_i(\alpha,\beta) &:= 0.25\sum_{j=1}^{4} y_{ij}\varphi_j(\alpha,\beta), \qquad p := \left[\frac{j}{2}\right]+1, \quad q := \left[\frac{j-1}{2}\right]+1,\\
z_i(\alpha,\beta) &:= 0.25\sum_{j=1}^{4} z_{ij}\varphi_j(\alpha,\beta), \qquad (\alpha,\beta) \in [-1,1]\times[-1,1].
\end{aligned}$$

У процесі розв'язування практично важливих задач завжди виникає проблема оцінки похибки одержаної наближено густини розподілу зарядів, а також виникає питання збіжності. Оцінюють похибку апостеріорно шляхом перевірки задоволення граничних умов у точках, які лежать між точками колокації. Характер збіжності, як відомо, визначається умовами апроксимації відповідного інтегрального оператора $(m, n = 0, 1, 2, 3)$, а також стійкістю наближеної схеми. За умов коректної постановки початкової задачі, акуратної апроксимації відповідних функціональних просторів, відсутності різкої спотвореності граничних поверхонь стійкість наближеної схеми здебільшого виявляється під час розв'язання задачі на послідовності сіток, які згущуються. Отже, швидкість збіжності в основному визначається порядком апроксимації шуканого розв'язку. Зауважимо, що подібні міркування ми застосовуємо через те, що вичерпного теоретичного обгрунтування методу колокації, на нашу думку, поки що не існує.

Зауважимо, що описана методика розв'язування складних задач математичного моделювання досить перспективна, з огляду на відомі переваги методу ІР, а також маючи змогу розширити клас допустимих поверхонь за рахунок циліндричних.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложение. – М., 1971.
2. *Кичура С.М., Остудин Б.А., Сибиль Ю.Н.* Исследование одной математической модели, описывающей пространственное электростатическое поле// Теоретическая электротехника. – 1990. – Вып. 49. – С.132–139.
3. *Sybil Yu.M.* Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface// Матем. студії. – 1997. – Т.8. – N 2. – С.79–96.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М., 1977.
5. *Гарасим Я.С., Остудін Б.А.* Наближене розв'язування деяких граничних задач теорії потенціалу методом інтегральних рівнянь без використання кубатурних формул// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С.73–82.

SOME DETAILS OF THE NUMERICAL-ANALITICAL APPROACH TO THE SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN POTENTIAL THEORY

S. Kichura, B. Ostudin

Ivan Franko National University of Lviv

The approximate method of the solution of the two-dimensional integral equations is considered. These integral equations arise with modelling some spatial electrostatic fields. We thus use Green's function. During the solution of the integral equations a possibility of application of numerically-analytical approach is researched.

Key words: *integral equations, electrostatic fields.*

Стаття надійшла до редколегії 07.04.1999

Прийнята до друку 28.12.2000