УДК 517.988.5

ПОЛІНОМІАЛЬНІ АНАЛОГИ ДЕЯКИХ КЛАСИЧНИХ ТЕОРЕМ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Андрій ЗАГОРОДНЮК
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача
ГСП, вул.Наукова, 3б 79601 Львів, Україна

У праці доведено аналоги теореми Гана-Банаха про продовження та теореми про замкнений графік для поліноміальних відображень на банахових просторах.

Ключові слова: поліноміальні відображення на банахових просторах, теорема про продовження, теорема про замкнений графік.

Теорія полілінійних і поліноміальних відображень на банахових просторах є одним з напрямів нелінійного функціонального аналізу, який активно розвивається в останні роки. Досліджуючи поліноміальні відображення, корисно знати, які результати лінійної теорії можна перенести на ці об'єкти. Добре відомо [1], що для полілінійних і поліноміальних відображень обмеженість на обмежених множинах еквівалентна неперервності. У [2] показано, що для поліноміальних функціоналів виконується теорема про замкнений графік. Крім того, у [2] доведено, що ядро розривного поліноміального функціонала на комплексному банаховому просторі є всюди щільною множиною. У [3] доведено теорему про борелівський графік (зокрема про замкнений графік) для поліноміальних відображень на сепарабельних банахових просторах. У [4] узагальнено ці результати на сепарабельні комутативні групи. Теорему про замкнений графік для полілінійних відображень доведено у [3,5]. Питання про поліноміальну теорему про замкнений графік у загальному випадку залишається відкритим. У третьому розділі цієї статті доведено дещо слабший варіант цієї теореми. Обернене відображення до неперервного бієктивного поліноміального оператора може бути розривним [6]. Проте з поліноміальної теореми про замкнений графік випливає наслідок, який можна трактувати як аналог теореми про обернене відображення. Теорема про відкрите відображення для полілінійних відображень не виконується, навіть у скінченновимірному випадку [7].

Проблему продовження поліноміального функціонала з підпростору на ширший простір (аналог теореми Гана-Банаха для поліномів) досліджувало багато авторів. У [8] показано, що такого продовження загалом може не існувати. Проте всякий поліном, заданий на X, може бути продовжений на X''. У [9] узагальнено ідею з [8] для побудови продовження поліномів з X у довільний ультрастепінь $X_{\mathcal{U}}$. У працях [10,11] досліджували класи поліномів на банахових просторах, які допускають продовження у будь-який надпростір. У [12,13,14] досліджується зв'язок між проблемою продовження поліномів та проблемою опису максимальних ідеалів алгебр, породжених поліноміальними функціоналами.

У другому розділі цієї статті визначено необхідні та достатні умови на підпростір X_0, банахового простору X, при яких всякий неперервний поліноміальний функціонал на X_0 може бути продовжений до неперервного поліноміального функціонала на X.

1. Попередні відомості

Нехай X, Y – банахові простори. Нагадаймо, що відображення $P : X \to Y$ називається однорідним поліноміальним відображенням (оператором) степеня n, якщо існує n-лінійне симетричне неперервне відображення на n-му декартовому степені простору X, $\bar{P} : X \times \cdots \times X \to Y$ таке, що $P(x) = \bar{P}(x, \ldots, x)$. Поліноміальним відображенням степеня m на X називається сума n-однорідних поліноміальних відображень при $n = 0, \ldots, m$. Ми використовуватимемо позначення $\mathcal{P}(^n X, Y)$, $\mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$ для просторів однорідних неперервних поліноміальних операторів степеня n та просторів неперервних поліноміальних операторів степеня не більшого за n з X в Y відповідно. У випадку коли Y – поле скалярів, ми писатимемо $\mathcal{P}(^n X)$ та $\mathcal{P}(^{\leqslant n} X)$. Часто поліноміальні функціонали будуть називатись просто поліномами. Відомо, що для всякого відображення $F \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$ існує афінний (лінійний, зсунутий на константу) оператор Φ_F, заданий на деякому просторі $E_n(X)$ в Y і "канонічне вкладення" $\delta : X \to E_n(X)$ такі, що $\Phi_F(\delta(x)) = F(x)$. Простір $E_n(X)$ є ізометрично ізоморфний прямій сумі проективних симетричних тензорних степенів $\otimes^k_{s,\pi} X$, $k = 1, \ldots, n$ простору X, а $\delta : x \mapsto x + x \otimes x + \cdots + x \otimes \cdots \otimes x$. Норму на $E_n(X)$ ми вважаємо заданою так: $\|w\| = \sup\limits_{k=1\ldots n} \|w_k\|_k$, де $w_k \in \otimes^k_{s,\pi} X$ і $\|w_k\|_k$ – норма w_k у $\otimes^k_{s,\pi} X$. Писатимемо E_n замість $E_n(X)$ у тих випадках, коли буде зрозуміло про який простір йдеться. Ми будемо казати, що поліном P продовжується з підпростору X_0 на простір $X \supset X_0$ якщо існує поліном $\tilde{P}$ на X такий, що звуження $\tilde{P}$ на X_0 збігається з P. Якщо $\|\tilde{P}\|_X = \|P\|_{X_0}$, то вважатимемо, що P продовжується зі збереженням норми. Детальнішу інформацію про поліноміальні відображення та тензорні добутки можна знайти в [15].

2. Продовження поліномів

Твердження 1. *Нехай $F \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$. Для будь-якої точки $x_0 \in X$ такої, що $x_0 \notin \ker F$ існує поліном $P \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X)$ такий, що $\ker P \supset \ker F$ і $P(x_0) = \|F(x_0)\|$.*

Доведення. Нехай $F(x_0) = y_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Гана-Банаха існує лінійний функціонал $\phi \in Y'$ такий, що $\phi(y_0) = \|y_0\|$. Приймемо $P(x) := \phi(F(x))$. Тоді $P(x_0) = \phi(y_0) = \|F(x_0)\|$.

Наслідок 1. *Множина M є ядром деякого поліноміального оператора $F \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$ для деякого банахового простору Y тоді і тільки тоді, коли M є перетином ядер поліноміальних функціоналів степеня не більшого за n.*

Доведення. Припустимо, що $M = \cap_{i \in I} P_i$, де I – деяка множина індексів. Нехай Φ_i – асоційовані з P_i функціонали на E_n. Розглянемо лінійний простір $V = \cap_{i \in I} \ker \Phi_i$ і фактор-відображення $\pi : E_n \to E_n/V$. Приймемо $F(x) = \pi(\delta(x))$, де δ – канонічне вкладення X в E_n. Тоді $M = \ker F$.

Лема 1. *Нехай V_r – куля радіуса $r \leqslant 1$ з центром в нулі в просторі E_n. Тоді $V_r \cap \delta(X) = B_r$, де B_r куля радіуса r з центром в нулі в просторі X, а $\delta(X)$ – образ простору X при відображенні δ.*

Доведення. Нехай $x \in B_r$. Тоді $\|\delta(x)\| < r$ і, отже, $\delta(x) \in V_r$. Якщо $\|x\| \geqslant r$, то $\|\delta(x)\| \geqslant r$ і $\delta(x) \notin V_r$.

Скажемо, що M є *n-алгебраїчною* множиною, якщо M є ядром деякого поліноміального відображення на X. Множину всіх n-алгебраїчних підмножин простору X позначатимемо $A_n(X)$.

Лема 2. *Нехай $M \in A_n(X)$ і M має порожній перетин з замкненою одиничною кулею $\bar{B}$ простору X. Тоді існує поліноміальний функціонал P степеня на X і куля B_r з центром в нулі, радіуса $r \leqslant 1$ такі, що $\ker P \supset M$ і $\ker P \cap B_r = \emptyset$.*

Доведення. Оскільки $M \in A_n(X)$, то $M = \ker F$ для деякого поліноміального оператора F на X. Позначимо $W := \ker \Phi_F \subset E_n$. Очевидно, що $0 \notin \ker \Phi_F$ тому, внаслідок замкненості ядра існує окіл нуля V в E_n такий, що V не перетинається з $\ker \Phi_F$. За теоремою Гана-Банаха знайдеться лінійний функціонал Φ_P на E_n такий, що $\ker \Phi_P \supset \ker \Phi_F$ і $\ker \Phi_P$ не перетинає окіл V. Окіл V перетинає множину $\delta(X)$ по підмножині, яка є кулею B_r деякого радіуса r (за лемою 1). Позначимо P – поліноміальний функціонал, який відповідає Φ_P. Тоді $\ker P \supset M$ і $\ker P \cap B_r = \emptyset$.

Теорема 1. *Нехай X - комплексний банахів простір і X_0 - його замкнений підпростір. Довільний поліном $P \in \mathcal{P}(^{\leqslant n}X_0)$ продовжується до деякого полінома $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^{\leqslant n}X)$ тоді і тільки тоді, коли з того, що $M \in A_n(X_0)$ випливає, що $M \in A_n(X)$.*

Доведення. Без втрати загальності, ми можемо вважати, що $P(0) = 0$ і P – радикальний поліном, тобто P містить свої незвідні співмножники у першому степені. Припустимо, що $\ker P \in A_n(X)$. Тоді ядро полінома P, визначеного на X_0, збігається з ядром деякого поліноміального оператора G, визначеного на X. Згідно з лемою 2 існує продовження множини $\ker G = \ker P$ до множини, яка є ядром деякого полінома Q. Нехай $W = \ker \Phi_Q$ і x_0 – деяка точка з X_0 така, що $P(x_0) \neq 0$. Оскільки W має корозмірність 1 в E_n і $\delta(x_0) \notin W$, то ми можемо визначити лінійний функціонал Ψ так, що $\ker \Psi = W$, $\Psi(\delta(x_0)) = P(x_0)$ і продовжити його за лінійністю на весь простір E_n. Приймемо $\tilde{P}(x) := \Psi(\delta(x))$. За лемою 2 ядро полінома $\tilde{P}$ (яке збігається з ядром полінома Q) не є щільним у X, тому $\tilde{P}$ є неперервним [2]. Припустимо, що звуження $\tilde{P}$ на X_0 не збігається з P. Позначимо це звуження P'. Оскільки $\ker P = \ker P'$ і P – радикальний поліном, то з теореми про нулі [16] випливає, що $P = cP'$ для деякої константи c. З іншого боку, $P(x_0) = P'(x_0)$. Тому $c = 1$.

Нехай M – деяка n-алгебраїчна підмножина в X_0. Тоді M є перетином ядер деякої сім'ї поліномів P_i, $i \in I$, заданих на X_0. За умовою ми можемо продовжити кожен поліном P_i до полінома $\tilde{P}_i$. Тоді $M = X_0 \cap \left(\cap_{i\in I} \ker \tilde{P}_i\right)$. Оскільки $X_0 \in A_n(X)$, то й $M \in A_n(X)$.

У випадку, коли X – дійсний банахів простір, поліном P на X_0 може мати нульове ядро. Точка 0 є, звичайно, алгебраїчною множиною простору X_0, проте, як буде показано нижче у прикладі, поліном з таким ядром може не мати продовження на X. Розглянемо комплексифікацію $X^c = X \oplus iX$ дійсного простору X. Комплексифікація X_0^c підпростору X_0 буде підпростором в X^c, а поліном P на X_0 може бути продовженим до комплексного полінома P^c на X_0^c. З теореми

1 випливає таке: якщо $\ker P^c \in A_n(X^c)$ то існує продовження $\tilde{P}^c$ полінома P^c на X^c. Тоді звуження полінома $\tilde{P}^c$ на $X \subset X^c$ буде продовженням P.

Теорема 2. *Для банахового простору X і підпростору $X_0 \subset X$ такі умови еквівалентні:*
(1) всякий поліном продовжується з X_0 в X зі збереженням норми;
(2) простір $E_n(X_0)$ є замкненим підпростором простору $E_n(X)$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). З (1) випливає, що всякий лінійний неперервний функціонал на $E_n(X_0)$ продовжується до лінійного неперервного функціонала на $E_n(X)$ з тією ж нормою. Тому для всякого $w \in E_n(X_0)$

$$\sup_{\Phi \in E_n'(X_0)} |\Phi(w)| = \sup_{\Phi \in E_n'(X)} |\Phi(w)|.$$

Тобто, норма на $E_n(X_0)$ збігається зі звуженням норми з $E_n(X)$. Отже, $E_n(X_0)$ є замкненим підпростором простору $E_n(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай $\mathcal{P}(^{\leqslant n}X_0)$ тоді $\Phi_P \in E_n'(X_0)$. За теоремою Гана-Банаха ми можемо продовжити Φ_P до деякого функціонала $\Phi_{\tilde{P}}$ на $E_n(X)$. Тоді поліном $\tilde{P}$, який відповідає цьому функціоналу, є шуканим продовженням.

Приклад. Розглянемо простір ℓ_∞ і його замкнений підпростір ℓ_2. Поліном $P(\sum_i a_i e_i) = \sum_i a_i^2$, визначений на ℓ_2 не може бути продовженим до неперервного полінома на ℓ_∞. Згідно з теоремами 1, 2 ядро $\ker P$ не є алгебраїчною множиною в комплексному просторі ℓ_∞ і $E_2(\ell_2)$ не є замкненим підпростором в $E_2(\ell_\infty)$ у дійсному і комплексному випадках.

Зауважимо, що на відміну від лінійного випадку, з умови продовжуваності всякого полінома з підпростору не випливає продовжуваність із збереженням норми, навіть у скінченновимірних просторах. Детальніше див. [15, с.72, 452].

3. Принцип замкненості графіка

Під wp_n-топологією простору X розумітимемо найслабшу топологію, в якій всі поліноми з $\mathcal{P}(^{\leqslant n}X)$ є неперервними.

Лема 3. *Нехай M – ядро деякого (не обов'язково неперервного) поліноміального оператора на банаховому просторі X. Якщо M – замкнена множина у wp_n-топології, то $M \in A_n(X)$.*

Доведення. Позначимо через $[M]$ перетин ядер поліномів на X, які обертаються в нуль на M. Якщо $M \notin A_n(X)$ то $[M] \neq M$. З іншого боку, з того, що M – замкнена множина у wp_n-топології випливає, що M є перетином всіх wp_n-замкнених множин, які містять M. Будь-яка wp_n-замкнена множина породжується прообразами замкнених множин при поліноміальних функціоналах, зокрема множинами вигляду $V_P = \{x \in X : |P(x)| \leqslant \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, $P \in \mathcal{P}(^{\leqslant n}X)$. Нехай $M \in V_P$, тобто поліном P є обмеженим на множині M. Тоді відповідний лінійний функціонал Φ_P є обмеженим на лінійному підпросторі в $W \subset E_n$

$$W = \{w \in E_n : w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta(x_i), \quad (a_i) \in \ell_1,\ x_i \in M\}.$$

Справді,

$$\left| \Phi_P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta(x_i) \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_P(\delta(x_i)) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(x_i) \right| \leqslant \|(a_i)\| \epsilon.$$

А це означає, що Φ_P тотожно дорівнює деякій константі c на W. Тому $P(x) = c$ для будь-якого $x \in M$. Отже, з того, що $M \subset V_P$ випливає, що $M \subset \ker(P - c)$. Тому

$$M = \bigcap_{V_P \supset M} V_P = \bigcap_{V_P \supset M} \ker(P - c) = [M].$$

Теорема 3. *Якщо графік Γ_R поліноміального відображення R степеня n з банахового простору X в банахів простір Y є замкненою множиною в wp_n-топології простору $X \times Y$, то R є неперервним.*

Доведення. Вважатимемо, що $R(0) = 0$. Розглянемо поліноміальний оператор $F : X \times Y \to Y$, $F(x, y) = R(x) - y$. Очевидно, що $\ker F = \Gamma_R$. Позначимо через Z лінійний підпростір в $E_n(X \times Y)$, який є перетином ядер всіх лінійних неперервних функціоналів Φ_P на $E_n(X \times Y)$ таких, що $\ker P \supset \ker F$. Розглянемо фактор-відображення $\pi_Z : E_n(X \times Y) \to E_n(X \times Y)/Z$. Оператор π_Z є лінійним і неперервним. Тому існує неперервний поліноміальний оператор G, заданий на $X \times Y$ такий, що $G(x, y) = \pi_Z(\delta(x, y))$. З wp_n-замкненості множини $\ker F$ та леми 3 випливає, що $\ker F$ є перетином ядер поліномів P і тому $\ker F = \ker G$. Оскільки множина

$$\{(0, 0) + (0, y) \otimes (0, y) + \cdots + (0, y) \otimes \cdots \otimes (0, y),\ y \in Y\} \subset E_n(X \times Y)$$

належить ядру π_Z (тому що тільки лінійна компонента F залежить від $y \in Y$), то звуження відображення G на Y є лінійним оператором і $G(0, y) = \pi_Z(\delta(0, y)) = y$. Тобто, G можна подати у вигляді $G = \sum_{k=1}^{n} G_k$, де G_k – k-однорідні компоненти і G_k не залежать від $y \in Y$ при $k > 1$, а $G_1(x, y) = G_1'(x) + y$. Іншими словами, множина пар (x, y) таких, що $y = -G_1'(x) - \sum_{k=2}^{n} G_k(x)$ є розв'язком рівняння $G(x, y) = 0$. Тобто, графік поліноміального оператора R збігається з графіком поліноміального неперервного оператора $-G_1' - \sum_{k=2}^{n} G_k$. Тому $R = -G_1' - \sum_{k=2}^{n} G_k$ і R – неперервний.

Зауважимо, що в нескінченновимірному комплексному банаховому просторі wp_n-топологія завжди слабша за топологію, породжену нормою. Проте для дійсного гільбертового простору ці топології збігаються при $n > 1$. З теореми про замкнений графік для поліноміальних операторів з банахового простору X в сепарабельний банахів простір Y випливає, що всякий замкнений графік полінома з X в Y (Y – сепарабельний) є wp_n-замкненим. Поки що невідомо чи це правильно для довільного Y.

Наслідок 2. *Нехай F – деяке бієктивне відображення з X в Y, неперервне в wp_n-топології простору X. Припустимо, що F^{-1} – поліноміальний оператор степеня n. Тоді F^{-1} – неперервний.*

Доведення. З wp_n-неперервності F випливає, що графік F, а отже й F^{-1} – wp_n-замкнена множина. Застосовуємо теорему 3 до відображення F^{-1}.

1. *Bochnak J., Siciak J.* Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces // Studia Math. – 1971. – Vol.39. – P.59-76.
2. *Drużkowski L.M.* Two criteria for continuity of polynomials and G-holomorphic mappings in infinite dimensions // Univ. Iagel. Acta Math. – 1984. – Vol.24. – P.135-138.
3. *Plichko A., Zagorodnyuk A.* On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomial functionals // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – Vol. 220. – P.477-494.
4. *A.Plichko, A.Zagorodnyuk.* Isotropic mappings and automatic continuity of polynomials, analytic and convex operators, in "General topology in Banach spaces" (ed. A.Plichko, T.Banakh). – NOVA Science Publisher, NY. To appear.
5. *Fernandez C.S.* The closed graph theorem for multilinear mappings // J. Math. and Math. Sci. Internat. – 1996. –Vol. 19. №2. – P.407-408.
6. *Rolewicz S.* On inversion of non-linear transformations // Studia Math. – 1958. – Vol.17. – P.79-83.
7. *Horowitz Ch.* An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinear maps // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol.53. – P.293-294.
8. *Aron R., Berner P.* A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France. – 1978. – Vol.106. – P.3-24.
9. *Lindström M., Ryan R.A.* Application of ultraproducts to infinite dimensional holomorphy // Math. Scand. – 1992. – Vol. 71. – P.229-242.
10. *Carando D., Zaldendo I.* A Hahn-Banach theorem for integrable polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol.127. – P.241-250.
11. *Kirwan P., Ryan R.A.* Extendibility of homogeneous polynomials on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol.126. – P.1023-1029.
12. *Aron R., Cole B., Gamelin T.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – Vol.15. – P.51-93.
13. *Aron R., Cole B., Gamelin T.* Weak-star continuous analytic funtions // Can. J. Math. – 1995. – Vol. 47. – P.673-683.
14. *Aron R., Galindo P., Garcia D., Maestre M.* Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – Vol.348. – P.543-559.
15. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. – Berlin; New York, 1999.
16. *Загороднюк А.В.* Теорема Гільберта про нулі поліноміальних ідеалів на комплексному нескінченновимірному просторі // Мат. методи і фіз. мех. поля. – 1997. – Т.40. – №4. – С.13-20.

POLYNOMIAL ANALOGS OF SOME CLASSICAL THEOREMS OF FUNCTIONAL ANALYSIS

A. Zagorodnyuk

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Meckanics and Mathematics
GSP, 3b Naukova Str. 79601 Lviv, Ukraine

Some analogs of Hahn-Banach extension principle and Closed Graph Theorem for polynomial operators on Banach spaces are proved.

Key words: polinomial mapping on Banach spaces, theorems of extended and closed graph.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.2001
Прийнята до друку 03.07.2001