ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
*Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.15–25*

VISNYK LVIV UNIV.
*Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.15–25*

УДК 513.88

# ПРО РЕЗОЛЬВЕНТУ ТА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ З МАТРИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

**Олег СТОРОЖ, Орест ШУВАР**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто один клас скінченновимірних збурень диференціального оператора з інтегральними крайовими умовами, який діє у просторі вектор-функцій. Побудовано резольвенту збуреного оператора і визначено асимптотичну поведінку його власних функцій. Знайдено умови, які забезпечують повноту системи цих функцій.

*Ключові слова:* скінченновимірні збурення диференціального оператора, інтегральнимі крайовимі умови, власні функції.

Диференціальні оператори з інтегральними крайовими умовами, а також спряжені з ними оператори (які отримали назву диференціально-граничних) вивчали в багатьох працях, детальний огляд яких міститься в [1].

Одну з теоретико-функціональних моделей, яка дає змогу з єдиного погляду розглядати зазначені вище оператори, запропонував В.Е.Лянце [2]. У цій статті йтиметься про оператори, споріднені в сенсі [2] з парою, яка складається з максимального та мінімального операторів, породжених у гільбертовому просторі $L_2^m \stackrel{\text{def}}{=} L_2((0,1);\mathbb{C}^m)$ деяким диференціальним виразом порядку $n = 2\mu - 1$.

**1. Позначення і формулювання задачі.** Нижче скрізь під $\mathbb{B}_m$ розуміємо множину лінійних операторів, що діють у просторі $\mathbb{C}^m$, кожний такий оператор ототожнюємо з відповідною матрицею. Через $\mathbf{1}_m$ та $\mathbf{1}$ позначаємо одиничні оператори в $\mathbb{C}^m$ та $L_2^m$, через $D(T)$, $\ker T$, $\rho(T)$, $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$ - область визначення, многовид нулів, резольвентну множину, спектр та точковий спектр оператора $T$ відповідно, а через $T^*$ - оператор, спряжений з $T$.

Нехай $l[y] = y^{(n)} + P_2(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y \quad (y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x)))$, де $P_2(x), \ldots, P_n(x)$ - визначені на [0, 1] неперервні $\mathbb{B}_m$-значні функції, а $U_\nu = U_{\nu 0} + U_{\nu 1}$, де

$$U_{\nu 0}(y) = A_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} A_{\nu j} y^{(j)}(0), U_{\nu 1}(y) = B_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} B_{\nu j} y^{(j)}(1),$$

$A_\nu, B_\nu, A_{\nu j}, B_{\nu j} \in \mathbb{B}_m (\nu = 1, \ldots, n+r; r = 0, 1, \ldots, n)$, причому $n - 1 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$, $n - 1 \geqslant k_{n+1} \geqslant \ldots \geqslant k_{n+r} \geqslant 0$; $k_{\nu+2} < k_\nu$, якщо $\nu = 1, 2, \ldots, n-2, n+1, \ldots, n+r-2$; хоча б один з операторів $A_\nu$ або $B_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n+r)$ є ненульовим; система крайових форм $\{U_1, \ldots, U_n\}$ лінійно незалежна.

Далі, нехай ${\varphi_\nu}^{(ij)} \in L_2(0,1)$, $\varphi_\nu(x) = ({\varphi_\nu}^{(ij)}(x))_{i,j=1}^m$, $\Phi_\nu y = \int\limits_0^1 {\varphi_\nu}^*(x)y(x)dx$, $\nu = 1,\ldots,n+r$, $y \in L_2^m$. Зрозуміло, що $\Phi_\nu$ – лінійний неперервний оператор $L_2^m \to \mathbb{C}^m$, спряжений з яким має такий вигляд:

$$\forall h \in \mathbb{C}^m \quad (\Phi_\nu^* h)(x) = \varphi_\nu(x)h.$$

Визначимо оператор $T$ за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} D(T) = \{y \in L_2^m : y, y', \ldots, y^{n-1} \quad & \text{абсолютно неперервні на } [0,\ 1], \\ l[y] \in L_2^m,\ U_\nu y = \Phi_\nu y, \nu = 1, \ldots, n\}&, \\ Ty = t[y] \overset{\text{def}}{=} l[y] + \sum_{\nu=n+1}^{n+r} {\Phi_\nu}^* U_\nu y \quad & \forall y \in D(T). \end{aligned}$$

У цій праці визначимо деякі спектральні властивості оператора $T$, які у випадку, коли $\Phi_1 = \cdots = \Phi_{n+r} = 0$, досліджено в [3], а у випадку, коли $m = 1$ - в [4].

**2. Резольвента оператора** $T$. Нехай $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ – деяка фундаментальна система розв'язків рівняння $l[Y] = \lambda Y$ стосовно невідомої $\mathbb{B}_m$-значної функції $Y(x)$. Визначимо оператор-функції $Z_1, \ldots, Z_n$, враховуючи умови

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(n-1)} & \ldots & Y_n^{(n-1)} \\ Y_1^{(n-2)} & \ldots & Y_n^{(n-2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1 & \ldots & Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{0}_m \\ \vdots \\ \mathbf{0}_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\mathbb{O}_m \in \mathbb{B}_m$ – нульова матриця, і приймемо

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\mu} Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi < x, \\ -\sum\limits_{j=\mu+1}^{n} Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi > x, \end{cases} \tag{2}$$

$$\tilde{f}(x) = \int\limits_0^1 g(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad (f \in L_2^m),$$

$$Y_{n+j}(x) = \tilde{\varphi}_{n+j}(x) = \int\limits_0^1 g(x,\xi)\varphi_{n+j}(\xi)d\xi, \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{3}$$

Як свідчить безпосередня перевірка,

$$l[\tilde{f}] - \lambda\tilde{f} = f, \quad l[Y_{n+j}] - \lambda Y_{n+j} = \varphi_{n+j}. \tag{4}$$

Далі, нехай

$$V_\nu(y) = \begin{cases} U_\nu(y) - \Phi_\nu y, & \nu = 1, \ldots, n, \\ U_\nu(y), & \nu = n+1, \ldots, n+r, \end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} V_1(Y_1) & \dots & V_1(Y_n) & V_1(Y_{n+1}) & \dots & V_1(Y_{n+r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(Y_1) & \dots & V_n(Y_n) & V_n(Y_{n+1}) & \dots & V_n(Y_{n+r}) \\ V_{n+1}(Y_1) & \dots & V_{n+1}(Y_n) & V_{n+1}(Y_{n+1}) + \mathbf{1}_m & \dots & V_{n+1}(Y_{n+r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n+r}(Y_1) & \dots & V_{n+r}(Y_n) & V_{n+r}(Y_{n+1}) & \dots & V_{n+r}(Y_{n+r}) + \mathbf{1}_m \end{pmatrix}. \tag{6}$$

**Теорема 1.** *Якщо* $\det \Delta(\lambda) \neq 0$,*то* $\lambda \in \rho(T)$ *і*

$$\forall f \in L_2^m \quad ((T - \lambda \mathbf{1})^{-1} f)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

*де*

$$G(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) - (Y_1(x), \dots, Y_{n+r}(x)) \Delta(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} V_1(g) \\ V_2(g) \\ \vdots \\ V_{n+r}(g) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

*а величини, які фігурують у правій частині рівності (7) такі, як в (1)-(3), (5)-(6), причому у виразах* $V_j(g)$ *всі похідні та інтеграли беруться за змінною* $x$.

*Якщо ж* $\det \Delta(\lambda) = 0$ *і, крім того, система* $\{\varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_{n+r}(x)\}$ *лінійно незалежна, тобто*

$$C_1, \dots, C_r \in \mathbb{B}_m, \quad \sum_{j=1}^{r} \varphi_{n+j}(x) C_j = 0 \Longrightarrow C_1 = \dots = C_r = 0, \tag{8}$$

*то* $\lambda \in \sigma_p(T)$.

*Доведення.* У правильності першого твердження легко переконатись за допомогою прямих обчислень, застосувавши (4). Рівність $Ty = \lambda y$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують $c_1, \dots, c_{n+r} \in \mathbb{C}^m$ такі, що $\Delta(\lambda) c = 0$, де $c = (c_1, \dots, c_{n+r})$ і

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n+r} Y_j(x) c_j.$$

Подіявши на обидві частини цієї рівності виразом $l[y] - \lambda y$ і врахувавши (8), переконаємось у правильності другого твердження.

**Зауваження 1.** Оскільки $Y_1, \dots, Y_n$ можна вибрати так, щоб вони виявилися цілими аналітичними функціями параметра $\lambda$, то $(T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ є мероморфною оператор-функцією, полюсами якої можуть бути тільки власні значення оператора $T$.

**Зауваження 2.** Нехай $\lambda \in \rho(T)$. З (7) випливає, що елементи матриці $G(x, \xi, \lambda)$ квадратично інтегровані на $[0, 1] \times [0, 1]$, так що $(T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ - компактний оператор. Якщо $T = T^*$, то існує ортонормована база простору $L_2^m$, складена з власних елементів оператора $T$. Використовуючи теорему Гільберта-Шмідта (див.

[5, с.10, 69]), неважко довести, що в цьому випадку будь-яка функція $f \in D(T)$ є сумою рівномірно збіжного ряду за цими елементами.

**Зауваження 3.** Зрозуміло, що умова (8) не призводить до суттєвої втрати загальності, тому нижче скрізь вважатимемо, що вона виконується.

**3. Асимптотика власних функцій.** Приймемо $\lambda = -\rho^n$ для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$ і розіб'ємо комплексну $\rho$-площину на $2n$ секторів ${S_\varkappa}^{(c)}$ з вершиною в точці $-c \in \mathbb{C}$, визначених так:

$$ {S_\varkappa}^{(c)} = \{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\varkappa\pi}{n} \leqslant \arg(\rho + c) \leqslant \frac{(\varkappa+1)\pi}{n}\}, \varkappa = 0, 1, \dots, n-1. $$

Позначимо через $\omega_1, \dots, \omega_n$ всі різні корені степеня $n$ з -1, занумеровані так, що для деякого фіксованого $\varkappa$ і всіх $\rho \in S_\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} {S_\varkappa}^{(0)}$ виконуються нерівності. $Re(\rho\omega_1) \leqslant \dots \leqslant Re(\rho\omega_n)$. Розділимо ${S_\varkappa}^{(c)}$ на підобласті

$$ {S_\varkappa}'^{(c)} = \{\rho \in {S_\varkappa}^{(c)} : Re(\rho + c)\omega_\mu \leqslant 0\}, $$

$$ {S_\varkappa}''^{(c)} = \{\rho \in {S_\varkappa}^{(c)} : Re(\rho + c)\omega_\mu \geqslant 0\} $$

і приймемо

$$ \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu, & \rho \in {S_\varkappa}'^{(c)}, \\ \mu - 1, & \rho \in {S_\varkappa}''^{(c)}. \end{cases} $$

Якщо $\rho$ міститься в одній з двох фіксованих областей ${S_\varkappa}' \stackrel{\text{def}}{=} {S_\varkappa}'^{(0)}$ або ${S_\varkappa}'' \stackrel{\text{def}}{=} {S_\varkappa}''^{(0)}$, то

$$ Re(\rho\omega_1) \leqslant \dots \leqslant Re(\rho\omega_{\tilde{\mu}}) \leqslant 0 \leqslant Re(\rho\omega_{\tilde{\mu}+1}) \leqslant \dots \leqslant Re(\rho\omega_n) \tag{9} $$

(деталі – див. [3, с.53, 75]). Визначимо числа $\theta_0, \dots, \theta_m$ за допомогою рівності

$$ \theta_0 + \theta_1\xi + \dots + \theta_m\xi = $$

$$ = \begin{pmatrix} A_1\omega_1^{k_1} & \dots & A_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (A_1 + \xi B_1)\omega_\mu^{k_1} & B_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \dots & B_1\omega_n^{k_1} \\ A_2\omega_1^{k_2} & \dots & A_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (A_2 + \xi B_2)\omega_\mu^{k_2} & B_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & B_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n\omega_1^{k_n} & \dots & A_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (A_n + \xi B_n)\omega_\mu^{k_n} & B_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \dots & B_n\omega_n^{k_n} \end{pmatrix}. \tag{10} $$

Якщо $\theta_0\theta_m \neq 0$, то система крайових форм $\{U_1, \dots, U_n\}$ називається регулярною за Біркгофом. Означення регулярності не залежить від вибору області $S_\varkappa$, а рівняння

$$ \theta_0 + \theta_1\xi + \dots + \theta_m\xi = 0 \tag{11} $$

має ті самі корені $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)}$ (відповідно $\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_m^{(2)}$) для всіх $S_\varkappa$ з непарним (парним) $\varkappa$ (див. [3, с.121]).

З результатів, викладених в [6], випливає, що кожному кореневі $\xi_j^{(\alpha)} (j = 1, \dots, m; \alpha = 1, 2)$ рівняння (11) відповідає послідовність $\lambda_{kj}^{(\alpha)} = -(\tilde{\rho}_{kj}^{(\alpha)})^n$ власних значень оператора $T$, де

$$ \tilde{\rho}_{kj}^{(\alpha)} = \rho_{kj}^{(\alpha)} + o(1), k \in \mathbb{N}, \tag{12} $$

$$ \rho_{kj}^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu}(\mp 2k\pi i + \ln_j \xi_j^{(1)}), \tag{13} $$

$$\rho_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\omega_{\mu}}(\pm 2k\pi i + \ln_j \xi_j^{(2)}), \tag{14}$$

верхній знак відповідає числу вигляду $n = 4q - 1$, нижній – числу вигляду $n = 4q + 1$, а $\ln_j \xi$ – деяке фіксоване значення натурального логарифма.

Знайдемо асимптотичні формули для відповідних власних (вектор-) функцій при великих за модулем власних значеннях $\lambda = -\rho^n$. Для цього позначимо через $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n$ фундаментальну систему розв'язків рівняння $t[Y] + \rho^n Y = 0$ стосовно невідомої $\mathbb{B}_m$-значної функції $Y(x)$ таку, що для достатньо великих за модулем $\rho \in S_\varkappa{}'^{(c)}$ $(\rho \in S_\varkappa{}''^{(c)})$ і $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\hat{Y}_j^{(k)}(x,\rho) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^k(e^{\rho\omega_j x}\mathbf{1}_m + o(1)), & j = 1, \dots, \tilde{\mu}, \\ (\rho\omega_j)^k(e^{\rho\omega_j x}\mathbf{1}_m + e^{\rho\omega_j} o(1)), & j = \tilde{\mu}+1, \dots, n \end{cases} \tag{15}$$

(існування системи, що задовольняє ці співвідношення, доведено в [6]) і приймемо

$$V_\nu(Y) = U_\nu(Y) - \int_0^1 \varphi_\nu^*(x)Y(x)dx, \nu = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Розглядатимемо тільки однократні власні значення, для яких ранг блочної матриці $\{V_\nu(\hat{Y}_j)\}_{\nu,j=1}^n$ дорівнює $nm-1$. У цьому випадку відповідна власна функція має вигляд $y(x,\lambda) = \sum_{j=1}^m \hat{Y}_j(x,\lambda)c_j$, де $(c_1, \dots, c_n)$ - деякий нетривіальний розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^n V_\nu(\hat{Y}_j)c_j = 0, \nu = 1, \dots, n. \tag{17}$$

Нехай $\{e_1, \dots, e_m\}$ - канонічна база простору $\mathbb{C}^m$, $\hat{Y}_j(x,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{y_j^{(\alpha\beta)}\}_{\alpha,\beta=1}^m$, $\mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, \dots, e_m)$, $\mathbb{E}\hat{Y}_j = (\sum_{i=1}^m y_j^{(i1)}e_i, \dots, \sum_{i=1}^m y_j^{(im)}e_i)$, $j = 1, \dots, n$.

Припустимо, що не всі мінори елементів першого рядка матриці системи (17) дорівнюють нулю (цього завжди можна досягти шляхом перепозначень) і позначимо через $\tilde{V}_1(\hat{Y}_j)(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ матрицю, утворену з $V_1(\hat{Y}_j)(A_1, B_1)$ відкиданням її першого рядка. Зі сказаного вище і з відомого правила розкриття визначника за елементами першого рядка випливає, що, з точністю до сталого скалярного множника,

$$y(x,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\hat{Y}_1 & \dots & \mathbb{E}\hat{Y}_n \\ \tilde{V}_1(\hat{Y}_1) & \dots & \tilde{V}_1(\hat{Y}_n) \\ V_2(\hat{Y}_1) & \dots & V_2(\hat{Y}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(\hat{Y}_1) & \dots & V_n(\hat{Y}_n) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

**Теорема 2.** *Якщо система $\{U_1, \dots, U_n\}$ регулярна за Біркгофом, то простому власному значенню $\lambda_{kj}^{(\alpha)} = -(\tilde{\rho}_{kj}^{(\alpha)})^n$ (див. (12)-(14)) оператора $T$ відповідає власна функція*

$$y_{kj}^{(\alpha)} = \det(X_{1,kj}^{(\alpha)}, X_{2,kj}^{(\alpha)}) \quad (j = 1, \dots, m; \alpha = 1, 2),$$

*де*

$$X^{\alpha}_{1,k_j} = \begin{pmatrix} [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_1 x}\mathbb{E}] & \dots & [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_{\mu-1} x}\mathbb{E}] & [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_\mu x}\mathbb{E}] \\ \omega_1^{k_1}[\tilde{A}_1] & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_1}[\tilde{A}_1] & \omega_\mu^{k_1}[\tilde{A}_1 + \xi_j^{(\alpha)}\tilde{B}_1] \\ \omega_1^{k_2}[A_2] & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_2}[A_2] & \omega_\mu^{k_2}[A_2 + \xi_j^{(\alpha)}B_2] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{k_n}[A_n] & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_n}[A_n] & \omega_\mu^{k_n}[A_n + \xi_j^{(\alpha)}B_n] \end{pmatrix},$$

$$X^{\alpha}_{2,k_j} = \begin{pmatrix} [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_{\mu+1}(x-1)}\mathbb{E}] & \dots & [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_n(x-1)}\mathbb{E}] \\ \omega_{\mu+1}^{k_1}[\tilde{B}_1] & \dots & \omega_n^{k_1}[\tilde{B}_1] \\ \omega_{\mu+1}^{k_2}[B_2] & \dots & \omega_n^{k_2}[B_2] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{\mu+1}^{k_n}[B_n] & \dots & \omega_n^{k_n}[B_n] \end{pmatrix},$$

$$[A] \stackrel{\text{def}}{=} A + o(1).$$

*Доведення.* Враховуючи (15), (16), а також співвідношення (6)-(7) праці [6], бачимо, що

$$\mathbb{E}Y_j = \begin{cases} [e^{\rho\omega_j x}\mathbb{E}], & j = 1,\dots,\tilde{\mu}, \\ e^{\rho\omega_j}[e^{\rho\omega_j(x-1)}\mathbb{E}], & j = \tilde{\mu}+1,\dots,n. \end{cases} \tag{19}$$

$$V_\nu(Y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[A_\nu], & j = 1,\dots,\mu-1, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}([A_\nu] + e^{\rho\omega_j}[B_\nu]), & j = \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[B_\nu], & j = \mu+1,\dots,n. \end{cases} \tag{20}$$

Для достатньо великих $|\lambda|$ число $\rho$, яке фігурує в (19)-(20), дорівнює одному з чисел $\tilde{\rho}^{(\alpha)}_{kj} = \rho^{(\alpha)}_{kj} + o(1)$ (див. (12)-(14)). Оскільки числа $\rho^{(\alpha)}_{kj}$ лежать на прямій, паралельній бісектрисі сектора $S_\varkappa$, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\rho \in {S_\varkappa}'^{(c)}$, тобто $\tilde{\mu} = \mu$. Враховуючи це, легко переконатись, що для завершення доведення достатньо підставити (19)-(20) у (18) і поділити отриманий вираз на неістотний множник $\rho^{k_1(m-1)+(k_2+\dots+k_n)m}e^{m\rho(\omega_{\mu+1}+\dots+)\omega_n}$.

**4. Допоміжні асимптотичні співвідношення.** Нехай $\{Y_1,\dots,Y_n\}$ - фундаментальна система розв'язків рівняння $l[Y] + \rho^n Y = 0$ така, що при достатньо великих за модулем $\rho \in S_\varkappa$

$$Y_j^{(k)}(x,\rho) = (\rho\omega_j)^k e^{\rho\omega_j x}(\mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), j = 1,\dots,n, k = 0,1,\dots,n-1, \tag{21}$$

причому оператор-функції, які фігурують у лівій частині (21), аналітично залежать від $\rho$. Існування такої системи доведено в [3, с.119]. Нехай для будь-якого $\rho \in {S_\varkappa}'^{(c)}$ (або ж $\rho \in {S_\varkappa}''^{(c)}$)

$$\tilde{g}(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\tilde{\mu}} Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi < x, \\ -\sum\limits_{j=\tilde{\mu}+1}^{n} Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi > x, \end{cases}$$

де $Z_1, \ldots, Z_n$ такі, як в (1). Відомо (див. [3, с.126]), що

$$Z_j(\xi) = e^{-\rho\omega_j\xi}\frac{1}{n\rho^{n-1}}(-\omega_j\mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), \quad j = 1, \ldots, n,$$

а отже,

$$\tilde{g}^{(k)}(x,\xi) = \frac{d^k\tilde{g}}{dx^k}(x,\xi) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\rho^k}{n\rho^{n-1}}\sum\limits_{j=1}^{\tilde{\mu}} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}(\omega_j^{k+1}\mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), & \xi < x \\ \frac{\rho^k}{n\rho^{n-1}}\sum\limits_{j=\tilde{\mu}+1}^{n} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}(\omega_j^{k+1}\mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), & \xi < x, \end{cases} \tag{22}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. Приймемо

$$\tilde{Y}_{n+j}(x) = \int_0^1 \tilde{g}(x,\xi,\lambda)\varphi_{n+j}(\xi)d\xi, (j = 1, \ldots, r).$$

Як свідчить безпосередня перевірка, $l[\tilde{Y}_{n+j}] - \lambda\tilde{Y}_{n+j} = \varphi_{n+j}$ (пор. з (4)), тому в формулі (7) для ядра резольвенти оператора $T$ $g$ можна замінити на $\tilde{g}$. Іншими словами, якщо $\lambda \in \rho(T)$, то

$$G(x,\xi,\lambda) = \tilde{g}(x,\xi,\lambda) - (\tilde{Y}_1(x), \ldots, \tilde{Y}_{n+r}(x))\tilde{\Delta}(\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} V_1(\tilde{g}) \\ V_2(\tilde{g}) \\ \vdots \\ V_{n+r}(\tilde{g}) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

де $\tilde{Y}_j \overset{\text{def}}{=} Y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $V_1, \ldots, V_{n+r}$ такі, як в (5), а

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \{V_\nu(\tilde{Y}_j)\}_{\nu,j=1}^{n+r} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{mr} \end{pmatrix}.$$

**Лема 1.** *Якщо* $\varphi \in L_2((0,1), \mathbb{B}_m)$, *то*

$$\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi(x)dx = o(1), \qquad j = 1, \ldots, \tilde{\mu}, \tag{24}$$

$$\int_0^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi(x)dx = o(1), \qquad j = \tilde{\mu}+1, \ldots, n, \tag{25}$$

*причому, якщо елементи матриці* $\varphi(x)$ *мають похідні, які належать до* $L_1(0,1)$, *то в (24)-(25)* $o(1)$ *можна замінити на* $O(\frac{1}{\rho})$.

*Крім того,*

$$\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}O\left(\frac{1}{\rho}\right)\varphi(x)dx = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad j = 1, \ldots, \tilde{\mu}, \tag{26}$$

$$\int_0^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)} O\left(\frac{1}{\rho}\right)\varphi(x)dx = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad j=\tilde{\mu}+1,\ldots,n. \tag{27}$$

*Доведення.* Зрозуміло, що достатньо переконатись у правильності леми у випадку, коли $m=1$. Нехай спочатку $\varphi_0 \in L_2(0,1)$ така, що $\varphi_0' \in L_1(0,1)$. Використовуючи формулу інтегрування частинами і враховуючи (9), отримуємо (при $j=1,\ldots,\tilde{\mu}$)

$$\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi_0(x)dx\right| = \left|\frac{\varphi_0(x)e^{\rho\omega_j(x-\xi)}|_{x=1}^{x=\xi}}{\rho\omega_j} - \frac{1}{\rho\omega_j}\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi_0'(x)dx\right| \leqslant \frac{C}{\rho},$$

де $C$ – деяка стала. Якщо $\varphi$ – довільна функція з $L_2(0,1)$, а $\varepsilon>0$, то існує така функція $\varphi_0$ розглянутого вище типу, що $\int_0^1 |\varphi(x)-\varphi_0(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2e^{|c|}}$), де $-c$ – вершина сектора ${S_\varkappa}^{(c)}$. Тому при $j=1,\ldots,\tilde{\mu}$

$$\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi(x)dx\right| \leqslant \left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi_0(x)dx\right| +$$

$$+\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}(\varphi(x)-\varphi_0(x))dx\right| \leqslant \frac{C}{|\rho|}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

якщо $|\rho| > \frac{2C}{\varepsilon}$, тобто (24) доведено. Аналогічно доводиться (25).

З (9) випливає, що при $j=1,\ldots,\tilde{\mu}$ і достатньо великих за модулем $\rho \in {S_\varkappa}^{(c)}$

$$\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}O\left(\frac{1}{\rho}\right)\varphi(x)dx\right| \leqslant$$

$$\int_0^\xi \left|O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right| |e^{(\rho+c)\omega_j(x-\xi)}||e^{-c\omega_j(x-\xi)}||\varphi(x)|dx \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\rho|},$$

тобто (26) доведено. Аналогічно доводиться (27).

З (22), (24) – (27) і наведених в [3, с.123] асимптотичних формул для величин $U_\nu(Y_j)$ ($\nu=1,\ldots,n+r; j=1,\ldots,n$) випливає, що

$$\tilde{Y}_{n+j}^{(k)} = \frac{\rho^k}{\rho^{n-1}}o(1), j=1,\ldots,r, k=0,1,\ldots,n-1, \tag{28}$$

і при будь-яких $\nu=1,\ldots,n+r$

$$V_\nu(\tilde{g}) = O\left(\frac{1}{\rho^{n-1-k_\nu}}\right), \tag{29}$$

$$V_\nu(Y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[A_\nu], & j=1,\ldots,\mu-1, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}([A_\nu]+e^{\rho\omega_j}[B_\nu]), & j=\mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[B_\nu], & j=\mu+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{30}$$

$$V_\nu(Y_{n+j}) = \frac{\rho^{k_\nu}}{\rho^{n-1}} o(1), j = 1, \ldots, r, \tag{31}$$

причому всі величини, які фігурують в (28)-(31), аналітично залежать від $\rho$, якщо $\rho \in S_\varkappa$ достатньо велике за модулем.

**5. Розвинення за власними функціями.** Нижче скрізь припускаємо, що система $\{U_1, \ldots, U_n\}$ регулярна за Біркгофом. Порівнюючи наведені в [6] асимптотичні формули для власних значень оператора $T$ зі сказаним в [3, с.125], переконуємось, що в комплексній $\lambda$-площині існує така послідовність $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ кіл радіуса $R_k$ з центром в початку координат, що $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$ і при деякому $\delta > 0$ прообрази в $S_0 \cup S_1$ власних значень оператора $T$ при відображенні $\lambda = -\rho^n$ перебувають на відстані $\geqslant \delta$ від прообразів кожного з кіл $\Gamma_k$.

**Лема 2.** *На колах $\Gamma_k$ елементи матриці-функції $G(x, \xi, \lambda)$ задовольнять нерівності*

$$|G_{\alpha\beta}(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}}, (\alpha, \beta = 1, \ldots, m), \tag{32}$$

*де $M$ – деяка стала.*

*Доведення.* Нехай $\gamma_k$ – прообраз в $S_0 \cup S_1$ кола $\Gamma_k$ при відображенні $\lambda = -\rho^n$, а числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ занумеровані так, що нерівності (9) справджуються при $\varkappa = 0$. Визначимо блочну матрицю $\Delta_0(\lambda) \in \mathbb{B}_{m(n+r)}$, враховуючи рівності $\tilde{\Delta}(\lambda) = \Lambda\Delta_0(\lambda)E$, де

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\rho^{k_1}\mathbf{1}_m, \ldots, \rho^{k_{n+r}}\mathbf{1}_m),$$

$$E = \operatorname{diag}(\underbrace{\mathbf{1}_m, \ldots, \mathbf{1}_m}_{\tilde{\mu}}, e^{\rho\omega_{\tilde{\mu}+1}}\mathbf{1}_m, \ldots, e^{\rho\omega_n}\mathbf{1}_m, \rho^{-k_{n+1}}\mathbf{1}_m, \ldots, \rho^{-k_{n+r}}\mathbf{1}_m).$$

З (23) випливає, що

$$G(x, \xi, \lambda) = \tilde{g}(x, \xi, \lambda) - (\tilde{Y}_1(x), \ldots, \tilde{Y}_{n+r}(x))E^{-1}\Delta_0(\lambda)^{-1}\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} V_1(\tilde{g}) \\ V_2(\tilde{g}) \\ \vdots \\ V_{n+r}(\tilde{g}), \end{pmatrix}$$

з (21),(28) - що $(\tilde{Y}_1(x), \ldots, \tilde{Y}_{n+r}(x))E^{-1} = (\underbrace{O(1), \ldots, O(1)}_{n+r})$, а з (29) - що

$$\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} V_1(\tilde{g}) \\ \vdots \\ V_{n+r}(\tilde{g}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\rho^{n-1}}) \\ \vdots \\ O(\frac{1}{\rho^{n-1}}) \end{pmatrix}.$$

Тому (див. (22)) залишається довести, що на колах $\Gamma_k$ елементи матриці $\Delta_0(\lambda)^{-1}$ обмежені зверху одним і тим самим числом. Для того щоб у цьому переконатися, використаємо оцінки (30), (31), з яких випливає, що будь-який елемент матриці $\Delta_0(\lambda)$, а отже, і його алгебраїчне доповнення, є величиною, обмеженою стосовно $\rho$, і що $\det \Delta_0(\lambda) = \psi(\rho) + o(1)$, де

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \theta_0 + \theta_1 e^{\rho\omega_\mu} + \cdots + \theta_m e^{m\rho\omega_\mu}, & \rho \in S_0', \\ \theta_0 e^{-\rho\omega_\mu} + \cdots + \theta_{m-1} e^{-\rho\omega_\mu}, & \rho \in S_0'', \end{cases}$$

а $\theta_0, \ldots, \theta_m$ визначені згідно з (10). До такої оцінки визначника прийдемо, розкривши його за першими стовпцями. Провівши міркування, аналогічні використаним на с. 96 монографії [3], доходимо висновку, що на дугах $\gamma_k \cap S_0$ $\det \Delta_0(\lambda)$ обмежений знизу одним і тим самим числом. Отже, на цих дугах справджуються нерівності (32). Оскільки попередні міркування застосовані і при $\rho \in S_1$, то лему доведено.

Перш ніж переходити до формулювання основного результату, зазначимо, що під $\Omega_k$ ми розуміємо круг, обмежений колом $\Gamma_k$, про яке йшлося в лемі 2 і що, не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$(2k-1)^n\pi^n \leqslant R_k \leqslant (2k+1)^n\pi^n, \tag{33}$$

де $R_k$ - радіус кола $\Gamma_k$. Це випливає з (12)-(14).

**Теорема 3.** *Якщо система крайових форм $\{U_1, \ldots, U_n\}$ регулярна за Біркгофом, а всі полюси резольвенти оператора $T$ є полюсами першого порядку, то*

$$\forall f \in D(T) \quad f = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} ((f|z_{\lambda,1})y_{\lambda,1} + \cdots + (f|z_{\lambda,n_\lambda})y_{\lambda,n_\lambda}), \tag{34}$$

*де $\{y_{\lambda,1}, \ldots, y_{\lambda,n_\lambda}\}$ та $\{z_{\lambda,1}, \ldots, z_{\lambda,n_\lambda}\}$ - біортогональні бази просторів $\ker(T - \lambda\mathbf{1})$ та $\ker(T^* - \bar{\lambda}\mathbf{1})$ відповідно, $\sum_{\lambda\in\sigma(T)}$ поширюється на всі власні значення оператора $T$, які занумеровані так, що власні значення, які містяться в $\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}$ передують власним значенням, які містяться в $\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k$. Ряд у правій частині рівності (34) збігається не тільки в $L_2^m$, але й рівномірно на [0,1].*

*Доведення.* З теореми 1, леми 2 та з (33) випливає, що

$$\forall f \in D(T) \quad \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Gamma_k} (T - \lambda\mathbf{1}_m)^{-1} T f d\lambda = 0,$$

як за нормою простору $L_2^m$, так і в сенсі рівномірної збіжності на [0,1]. Крім того, $\Gamma_k \subset \rho(T)$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\cup\Omega_k = \mathbb{C}$. Звідси і з рівності

$$\forall f \in D(T) \quad f = \sum_{\lambda\in\sigma(T)\cap\Omega_k} ((f|z_{\lambda,1})y_{\lambda,1} + \cdots + (f|z_{\lambda,n_\lambda})y_{\lambda,n_\lambda}) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{1}{\lambda} (T - \lambda\mathbf{1})^{-1} T f d\lambda$$

(див. [5, с. 73-74]) випливає правильність теореми.

---

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.,Кочубей А.Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений // Укр.мат.журн. – 1989. – Т. 41. – №10. – С.1299-1313.

2. *Лянце В.Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204. – №3. – С.542-545.

3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М., 1969.

4. *Сторож О.Г.* Асимптотические формулы для собственных значений оператора, родственного дифференциальному, нечетного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17. – №4. – С.744-746.

5. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. – К., 1983.

6. *Шувар О.Б.* Асимптотичні формули для власних значень диференціально-граничного оператора непарного порядку в просторі вектор-функцій // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – №407. – С.54-57.

## ON RESOLVENT AND EIGENFUNCTIONS OF ODD ORDER DIFFERENTIAL-BOUNDARY OPERATORS WITH MATRIX COEFFICIENTS.

**O. Storozh, O. Shuvar**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine*

A class of finite-dimensional perturbations of differential operator with integral boundary conditions in the space of vector-functions is considered. The resolvent of perturbated operator is constructed and the asymptotic behaviour of its eigenfunctions is established. The conditions, under wich the system of these functions is total, are found.

*Key words:* integral boundary conditions, differential-boundary operator, eigenfunctions.

Стаття надійшла до редколегії 29.12.2000
Прийнята до друку 03.07.2001