ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
*Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.26–28*

VISNYK LVIV UNIV.
*Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.26–28*

УДК 512.544+519.46

# ПРО РАДИКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ, ПРИЄДНАНІ ГРУПИ ЯКИХ МАЮТЬ СКІНЧЕННЕ ЧИСЛО КЛАСІВ СПРЯЖЕНОСТІ

**Орест АРТЕМОВИЧ**
*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Доведено, що радикальне (в сенсі Джекобсона) кільце $R$, приєднана група $R^\circ$ якого періодична і складається зі скінченного числа класів спряжених елементів, скінченне, описано деякі властивості простих радикальних областей.

*Ключові слова:* групи зі скінченним числом класів спряженості, радикальні кільця.

Групу $G$ із скінченним числом класів спряженості називатимемо $\nu$-групою. Добре відомо, що будь-яка лінійна група (над полем) і будь-яка $RI$-група із скінченним числом класів спряженості є скінченною (див., наприклад, [1, с.129] і [2, с. 369]).

У цій статті ми характеризуємо радикальні кільця $R$ із приєднаною $\nu$-групою $R^\circ$ і описуємо деякі властивості простих радикальних областей.

У праці використано стандартну термінологію, як, наприклад, в [1-3].

**Лема 1.** *Нехай $R$ – радикальне кільце. Якщо $R^\circ$ – $\nu$-група, то*

(1) *$R$ містить скінченне число двобічних ідеалів;*
(2) *$R$ має простий гомоморфний образ;*
(3) *$R^\circ$ не має власних підгруп скінченного індексу;*
(4) *центр $Z(R)$ скінченний.*

*Доведення* нескладне і ми його опускаємо.

Задачу дослідження радикальних кілець із приєднаною $\nu$-групою $R^\circ$ сформулював Ф. Сас [3, проблема 88]. У цьому напрямі ми довели таке твердження.

**Твердження 2.** *Будь-яке радикальне кільце $R$ з періодичною приєднаною $\nu$-групою $R^\circ$ скінченне.*

*Доведення.* За наслідком 2.3 з [5] $R$ – ніль-кільце. Оскільки $R^\circ$ не містить центральних квазіциклічних підгруп, то вона є прямим добутком скінченного числа примарних компонент (див. [6, §3.2]). Тому з наслідку 1 із [7] випливає, що $R^\circ$ – локально нільпотентна група. За теоремою Чернікова (див. [2, с. 369]) $R$ – скінченне кільце, що і необхідно було довести.

Ф. Сас [8] визначив деякі властивості нескінченних радикальних кілець $R$, чиї приєднані групи $R^\circ$ мають тільки скінченне число класів спряженості. Якщо $R = R^2$ – радикальне кільце і $R^\circ$ має лише два класи спряженості, тоді $R$ – просте радикальне кільце за твердженням 1 з [8]. З огляду на наслідок 1.1 з [9], ми отримуємо наслідок.

**Наслідок 3.** *Нехай $R$ – просте радикальне кільце. Якщо $R^\circ$ – $\nu$-група, тоді $R$ – область або $R$ містить ненульовий нільпотентний елемент.*

**Твердження 4.** *Нехай $R$ – просте радикальне кільце. Якщо $R^\circ$ має два класи спряженості, тоді $R$ – область із простою приєднаною групою $R^\circ$ без скруту.*

*Доведення.* За наслідком 3 $R$ – область або ніль-кільце. Припустимо, що $R$ – ніль-кільце. Тоді воно задовольняє тотожність

$$x^2 \equiv 0.$$

З леми 2.4 із [10] і твердження 2 випливає, що $char(R) = 0$, і, як наслідок, $R$ – $\mathbb{Q}$-алгебра. За теоремою Нагати-Хігмена (див., наприклад, [11, с. 152]) $R$ – нільпотентна алгебра. Одержали протиріччя. Отже, $R$ – область із простою приєднаною групою $R^\circ$ без скруту. Твердження доведене.

**Твердження 5.** *Якщо $R$ – проста радикальна область, тоді центр $Z(I)$ будь-якого його правого (лівого) ідеала $I$ нульовий (зокрема, $Z(R) = \{0\}$).*

*Доведення.* Нехай $R$ – радикальна область з двома операціями "+" і "·", $R^\circ$ – приєднана група кільця $R$ стосовно операції "$\circ$". Припустимо, що $Z(R)$ ненульовий, і позначимо приєднану групу $Z(R)^\circ$ через $T$. Нехай $H(R,T)$ – множина пар $\{ (x,y) \mid x \in R, y \in T\}$ з алгебраїчною операцією, визначеною за правилом

$$(x,y)(u,v) = (y \cdot u + u + x, y \circ v).$$

Оскільки

$$ann_T(i) = \{ t \in T \mid t \cdot i = 0\}$$

ненульовий і $R = a \cdot R$ для кожного елемента $a \in Z(R)$, то $H(R,T)$ – група Фробеніуса за теоремою 2.3 з [10], що суперечить лемі 2.7 з [10]. Отже, $Z(R) = \{0\}$. За лемою 1.1.5 з [12] $Z(I) = \{0\}$ для кожного правого (лівого) ідеала $I$ із $R$. Твердження доведене.

**Наслідок 6.** *Будь-яка радикальна $PI$-область $R$ непроста.*

Справді, $Z(R)$ ненульовий за теоремою 1.4.2 із [12], а отже, $R$ – непросте кільце внаслідок твердження 5.

---


1. *Robinson D.J.S.* Finiteness conditions and generalised soluble groups. Vol.1. – Berlin e.a., 1972.
2. *Курош А.Г.* Теория групп. – М., 1967.
3. *Джекобсон Н.* Строение колец. – М., 1961.
4. *Szász F.* Radikale der Ringe. – Berlin, 1975.
5. *Артемович О.Д., Іщук Ю.Б.* Про напівдосконалі кільця з заданими приєднаними групами // Математичні Студії. – 1996. – №6. – С.23-32.
6. *Amberg B., Sysak Ya.P.* Radical rings and products of groups // Preprint (Johannes Gutenberg-Universität Mainz), 1998.
7. *Amberg B., Dickenschied O., Sysak Ya.P.* Subgroups of the adjoint group of a radical ring // Canad. J. Math. – 1998. – Vol. 50. – №1. – P.3-15.

8. *Szász F.* On some simple Jacobson radical rings // Math. Japon. – 1973. – Vol. 18. – P.225-228.

9. *Krempa J.* Some examples of reduced rings // Algebra Colloq. – 1996. – Vol. 3. – №4. – P.289-300.

10. *Artemovych O.D.* On Frobenius groups associated with modules // Demonstratio Math. – 1998. – Vol. 38. – №4. – P.875-878.

11. *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. – М., 1978.

12. *Herstein I.* Rings with involutions. – Chicago e.a., 1976.

## ON RADICAL RINGS WHOSE ADJOINT GROUPS HAVE FINITELY MANY CONJUGACY CLASSES

**O. Artemovych**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine*

We prove that a (Jacobson) radical ring $R$ with the torsion adjoint group $R^\circ$ which have finitely many conjugacy classes is finite and establish some properties of simple radical domains.

*Key words:* group with finitely many conjugacy classes, radical ring.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2000
Прийнята до друку 03.07.2001