ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.29–32 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.29–32*

УДК 512.544

РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ НЕ РАДИКАЛЬНО-НАПІВПРОСТИХ СКРУТІВ

Омелян ГОРБАЧУК, Мирослава ПАЛАМАРЧУК
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто не радикально-півпрості скрути в категорії лівих R-модулів. За певних умов на радикальний фільтр досліджено питання про розщеплюваність скрутів.

Ключові слова: скрути, категорії, розщеплення, кільця, модулі.

У праці розглянуто асоціативні кільця з одиницею за припущення, що всі модулі є правими та унітарними.

Говоритимемо, що в категорії R-модулів задано радикал r, якщо задано класи модулів $\mathcal{T}$ та $\mathcal{F}$ з такими властивостями:

1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$;

2) $\mathcal{T}$ замкнений стосовно фактор-модулів;

3) для будь-якого модуля M існує точна послідовність $0 \longrightarrow r(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/r(M)$ така, що $r(M) \in \mathcal{T}$ і $M/r(M) \in \mathcal{F}$.

Класи $\mathcal{T}$ і $\mathcal{F}$ називають r-радикальним і r-напівпростим, відповідно. Кожен з цих класів однозначно визначає інший. Наприклад, $T \in \mathcal{T}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$ для всіх $F \in \mathcal{F}$. Модулі з класу $\mathcal{T}$ називаються r-радикальними, а з класу $\mathcal{F}$ – r-напівпростими. Зрозуміло, що $M \in \mathcal{T}$ тоді і лише тоді, коли $r(M) = M$, а включення $M \in \mathcal{F}$ рівносильне умові $r(M) = 0$. Підмодуль $r(M)$ називається r-радикалом модуля M. Якщо r-радикальний клас замкнений стосовно підмодулів, то r називають скрутом.

Радикальним фільтром кільця R називають систему $\mathcal{E}$ правих ідеалів цього кільця, що має такі властивості.

1. Якщо $I \in \mathcal{E}$ і $I \subseteq J$, де J – правий ідеал кільця R, то $J \in \mathcal{E}$.

2. Якщо $I \in \mathcal{E}$, то для будь-якого $\lambda \in R$ правий ідеал $(I : \lambda)$, де $(I : \lambda) = \{x \mid x \in R,\ \lambda x \in I\}$, також належить до $\mathcal{E}$.

3. Якщо $I \subseteq J$, де I – правий ідеал кільця R, $J \in \mathcal{E}$ та ідеал $(I : j) \in \mathcal{E}$ для довільного $j \in J$, то $I \in \mathcal{E}$.

Зв'язок між скрутом у категорії R-модулів і радикальним фільтром кільця R визначає теорема Габріеля і Маранди, яку подано в [1] (наслідок 6.8, с.39) або [2] (теорема 3.4, с.14).

Скрут називається радикально-напівпростим, якщо його радикальний фільтр містить найменший ідеал або клас радикальних модулів замкнених стосовно прямих добутків. Такі скрути досліджував Джанс у праці [3].

Скрут r називається розщеплюваним, якщо для довільного модуля M підмодуль $r(M)$ виділяється прямим доданком.

Спочатку робили припущення, що не радикально-напівпростий скрут не розщеплюється. (Були праці, в яких давали доведення цього факту, але згодом виявились помилковими).

У праці [4] побудували приклад не радикально-напівпростого скруту, який розщеплюється, а саме розглядали кільце диференціальних операторів $R = K[y, D]$, де K – диференціально замкнуте поле. За теоремою 7.42 праці [5] кільце R є областю головних ідеалів і правим V-кільцем. Виявляється, що періодичні модулі будуть ін'єктивні, коли поле K – диференціально замкнуте, тобто рівняння $p(x, D(x), \ldots, D^n(x)) = 0$ при будь-якому n має розв'язок $\alpha \in K$ для всіх $p(x) \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}] - K$, де $p(x, D(x), \ldots, D^n(x))$ – нетривіальний диференціальний многочлен.

Теорема. *Нехай радикальний фільтр $\mathcal{E}_r$ містить двобічні ідеали P_k такі, що $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k = 0$, та існують такі елементи $p_k \in P_k$, що $p_k p_{k-1} \ldots p_1 \neq 0$. Тоді з розщеплюваності відповідного скруту r випливає, що скрут r буде радикально-напівпростим.*

Доведення. Можна вважати, що скрут $r(R) = 0$. У протилежному випадку $R = r(R) \oplus R$, (пряма сума) і $r(R)$ буде двобічним ідеалом. Тоді замість кільця R можна взяти кільце R_1 і матимемо $r(R_1) = 0$.

Оскільки $r(R) = 0$ і за умовою існують такі елементи p_k, що $p_k p_{k-1} \ldots p_1 \neq 0$, то $p_k p_{k-1} \ldots p_1 P_k \neq 0$. Так як $p_k p_{k-1} \ldots p_1 P_k \neq 0$, то існує таке n_k, що $p_k p_{k-1} \ldots p_1 P_k \not\subset P_{n_k}$. Можемо вважати, що ідеали P_k утворюють ланцюг, тобто $P_{k+1} \subset P_k$. У протилежному випадку, взявши $P'_k = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k$, які також належать радикальному фільтру, P'_k будуть утворювати ланцюг.

Розглянемо модуль $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} R/P_{n_k}$. $r(M) \neq M$, тому що елемент $(\bar{1}, \bar{1}, \ldots, \bar{1}, \ldots)$ не анулюється ні одним ідеалом з радикального фільтра і елемент вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, \ldots) \in r(M)$, де $a_i \in R/P_{n_i}$, тому що існує база з двобічних ідеалів.

Покажемо, що підмодуль $r(M)$ не виділяється прямим доданком.

Елемент $x \in M$ є елементом нескінченної висоти, якщо для довільного n існує такий елемент $y^{(n)} \in M$, що $x = y^{(n)} p'_n$, де $p'_n \in P_n$. За аналогією доведення теореми 1 у праці [6] визначимо, що у фактор-модулі $M/r(M)$ є елемент нескінченної висоти, і покажемо, що в M немає ненульових елементів нескінченної висоти.

Отже, нехай $x \in M$ – елемент нескінченної висоти. Це означає, що для всіх n $x = y^{(k_n)} p'_{k_n}$. Нехай $x = (b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots)$, $y^{(k_n)} = (y_1^{(n)}, \ldots, y_m^{(n)}, \ldots)$ і $b_m \in y_m^{(n)} P_{m_k} \implies b_m = 0$, тобто тільки нульовий елемент має нескінченну висоту в модулі M.

Розглянемо елементи $m = (p_1, \ldots, p_k p_{k-1} \ldots p_1, \ldots)$ і $n_k = (0, 0, \ldots, 0, p_k \ldots p_1, p_{k+1} p_k \ldots p_1, \ldots)$ з модуля M. Образи елементів m і m_k у фактор-модулі $M/r(M)$ позначимо відповідно $\bar{m}$ і $\bar{m}_k$. Враховуючи, що P_k двобічні ідеали, отримаємо $\bar{m} = \bar{m}_{m_k}$. Звідси видно, що $\bar{m}$ має нескінченну висоту у фактор-модулі $M/r(M)$.

Для завершення доведення достатньо показати, що $\bar{m} \neq 0$. Доведемо, що m не анулюється жодним з P_k. Припустимо, що m анулюється, тобто існує таке P_k, що $m P_k = 0$. Розглянувши цю рівність покоординатно, одержимо $p_k \ldots p_1 P_k = 0$, тобто $p_k \ldots p_1 P_k \subset P_{n_k}$, що суперечить умові побудови модуля M, що $p_k \ldots p_1 P_k \not\subset P_{n_k}$.

Із умови розщеплюваності скруту r фактор-модуль $M/r(M)$ є ізоморфним деякому підмодулю модуля M.

З іншого боку, ми отримуємо, що в модулі M є елемент нескінченної висоти, що суперечить попереднім дослідженням, тобто скрут r – радикально-напівпростий.

Означення. Нехай задана послідовність правих ідеалів P_i. Цю послідовність назвемо T-нільпотентною зліва, коли для довільної послідовності елементів $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots p_i \in P_i$ існує таке натуральне число m, що $p_m \ldots p_1 = 0$.

Зауваження. Здебільшого послідовність правих ідеалів буде спадною, тобто $P_k \supseteq P_{k+1}$.

Наше означення T-нільпотентності зліва, коли P_i однакові, збігається з означенням T-нільпотентності зліва для правого ідеала P.

Наслідок 1. Нехай скрут r розщеплюється і його радикальний фільтр має зліченну базу з двобічних ідеалів, яка не є T-нільпотентною зліва. Тоді r – радикально-напівпростий скрут.

Доведення випливає безпосередньо з теореми, де умова, що база не є T-нільпотентною зліва дає нам умову, що існують такі p_i, що $p_k p_{k-1} \ldots p_1 \neq 0$.

Зауваження. Умову двобічності ідеалів просто зняти не можна, бо існує приклад у праці [4] розщеплюваного нерадикально-напівпростого скруту, радикальний фільтр якого складається з правих ідеалів некомутативного кільця без дільників нуля, яке не містить нетривіальних двобічних ідеалів.

Наслідок 2. Нехай r – розщеплюваний скрут з умовою, що існує така послідовність двобічних ідеалів $P_k \in \mathcal{E}_r$, що $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k \notin \mathcal{E}_r$ і існує така послідовність елементів $p_m \in P_m$, що для довільного k $p_k p_{k-1} \ldots p_1 \notin B$. Тоді скрут r – радикально-напівпростий.

Доведення випливає з теореми, переходячи від кільця R до фактор-кільця R/B, образи ідеалів P_n у фактор-кільці позначимо через P'_n. Відповідний скрут у фактор-кільці R/B, радикальний фільтр якого задається образами правих ідеалів з радикального фільтра $\mathcal{E}_r$. Скрут r' розщеплюється (див. [7], наслідок 2, с.55) і елементи $p'_k \ldots p'_1 \neq 0$. Отже, до скруту r' можна застосувати теорему, яка визначає, що r' – радикально-напівпростий. А звідси випливатиме, що r – радикально-напівпростий.

1. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев, 1983.
2. *Stenström, B.* Rings and Modules of Quotients. – Berlin, 1971.
3. *Janç, J.* Some aspects of torsion // Pacif. J. Math. – 1965. – Vol. 15. – P.1249-1259.
4. *Cozzens J.H.* Homological properties of the ring of differential polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. – 1970, – Vol. 76. – №1. – C.75-79.
5. *Фейс К.* Алгебра: кольца и категории. Т.1. - М., 1977.

6. *Горбачук О.Л.* Про кручення в модулях // Український матем. журн. – 1973. – Т. 25. – №4. – С.517-523.

7. *Горбачук Е.Л.* Радикалы в модулях над разными кольцами // Матем. исследования. – 1972. – №1. – С.49-59.

SPLITTING RADICAL-SEMISIMPLE TORSIONS

O. Gorbachuk, M. Palamarchuk

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A hereditary non-jans torsion in the category R-Mod is considered. Some properties of the splitting hereditary torsions are proved.

Key words: torsion, splitting, hereditary, category, perfect ring.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2001
Прийнята до друку 03.07.2001