ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.41-44

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.41-44

УДК 517.53

ПРО КОМПАКНІСТЬ СІМ'Ї АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО l-ІНДЕКСУ

Марта БОРДУЛЯК, Володимир КУШНІР
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай G – довільна область комплексної площини, а l така додатна неперервна функція в G, що

$$l(z) > \frac{\beta}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G,$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число.

Одержано умови компактності сім'ї аналітичних в області G функцій обмеженого l-індексу.

Ключові слова: аналітичні функції обмеженого l-індексу.

Нехай G – довільна область із $\mathbb{C}$, f – аналітична в області G функція, а l – додатна неперервна в G функція така, що

$$l(z) > \frac{\beta}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число. Функція f [1] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(z)} \leqslant c_f(z), \tag{2}$$

де $c_f(z) = \max\left\{\dfrac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}$.

Найменше з таких чисел N називатимемо l-індексом і позначатимемо через $N(f;l)$, а клас аналітичних в G функцій обмеженого l-індексу з індексом, що не перевищує N, позначатимемо через $\Omega_N(G,l)$.

Зауважимо, що при $G = \mathbb{C}$ і $l(x) \equiv 1$ з цього означення випливає класичне означення цілої функції обмеженого індексу.

А.К.Бозе [2], вивчаючи властивості сім'ї Ω_N цілих функцій, індекс яких не перевищує N, визначив умови, за яких така сім'я є компактною. У цій праці результати Бозе ми узагальнимо на клас аналітичних в області функцій обмеженого l-індексу.

Для $r \in [0, \beta]$ приймемо, що

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\},$$
$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

Клас додатних неперервних в G функцій l, які, крім (1), задовольняють умову $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta]$, позначимо через $Q_\beta(G)$.

Лема 1. *Якщо $l \in Q_\beta(G)$ і $f \in \Omega_N(G,l)$, то для будь-яких точок z і z_0 з G таких, що $|z - z_0| \leqslant \dfrac{1}{2l(z_0)}$*

$$c_f(z) \leqslant 2^{N+1}\lambda_1^{-N}(1/2)c_f(z_0). \tag{3}$$

Доведення. Нехай $f \in \Omega_N(G,l)$, а $z_0 \in G$. Тоді для всіх $z \in G$ таких, що $|z - z_0| \leqslant \dfrac{1}{2l(z_0)}$, з огляду на (1), маємо степеневе розвинення

$$f^{(j)}(z) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-j)!}(z - z_0)^{n-j} =$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n! l^{n-j}(z_0)}(n-j+1)(n-j+2)...n(z-z_0)^{n-j}l^{n-j}(z_0), \ j = 0, 1, ... \tag{4}$$

Оскільки ряд $\sum_{n=j}^{\infty}(n-j+1)(n-j+2)...nr^{n-j}$, отриманий почленним диференціюванням геометричної прогресії $\sum_{n=j}^{\infty} r^n$ збігається до $\dfrac{j!}{(1-r)^{j+1}}$ при $|r| < 1$, з (4) одержуємо

$$|f^{(j)}(z)| \leqslant c_f(z_0)\frac{j! l^j(z_0)}{(1 - |z - z_0| l(z_0))^{j+1}},$$

звідки для $j = 0, 1, ..., N$

$$\frac{|f^{(j)}(z)|}{j! l^j(z)} \leqslant \left(\frac{l(z_0)}{l(z)}\right)^j c_f(z_0)2^{j+1} \leqslant 2^{N+1}\lambda_1^{-N}(1/2)c_f(z_0).$$

Теорема 1. *Нехай $l \in Q_\beta(G)$ і $D \subset G$ – деякий компакт. Тоді існує $P = P(D,N,l) > 0$ таке, що для будь-яких $z, w \in D$ і для будь-якої функції $f \in \Omega_N(G,l)$*

$$c_f(z) \leqslant P c_f(w). \tag{5}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що D – замкнений круг діаметра d (довільний компакт покриємо скінченним числом замкнених кругів). Виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$ так, щоб $m > 2dl_*$, де $l_* = \sup\{l(z) \ : \ z \in D\}$. Нехай $z, w \in D$. Тоді $|z - w| \leqslant d$ й існує скінченна послідовність точок $\{z_p\}_{p=0}^{k}$ така, що $z_0 = z, z_k = w, k \leqslant m$, кожна z_p належить відрізку, який з'єднує z і w і лежить в D і $|z_p - z_{p-1}| = \dfrac{1}{2l(z_{p-1})}$. Таку послідовність завжди можна вибрати, оскільки $\sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{2l(z_p)} \geqslant \frac{m}{2l_*} > d \geqslant |z - w|$. Тоді за лемою маємо

$$c_f(z) = c_f(z_0) \leqslant 2^{N+1}\lambda_1^{-N}(1/2)c_f(z_1) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2N+2}\lambda_1^{-2N}(1/2)c_f(z_2) \leqslant ... \leqslant 2^{kN+k}\lambda_1^{-kN}(1/2)c_f(z_k) = 2^{kN+k}\lambda_1^{-kN}(1/2)c_f(w).$$

Для завершення доведення досить вибрати $p = 2^{kN+k}\lambda_1^{-kN}(1/2)$.

Будемо говорити, що послідовність f_n аналітичних в G функцій рівномірно збіжна всередині G, якщо вона рівномірно збіжна на кожному компакті з G.

Теорема 2. *Нехай* $l \in Q_\beta(G)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *послідовність функцій з* $\Omega_N(G,l)$.

(i) Для того щоб $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *була компактною, тобто щоб існувала підпослідовність* $\{f_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, *рівномірно збіжна всередині* G *до деякої аналітичної функції* f, *необхідно і достатньо, щоб існувала підпослідовність* $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^{\infty}$ *послідовності* $\{c_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$, *обмежена принаймні в одній точці з* G.

(ii) Якщо $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *рівномірно збіжна всередині* G *до функції* f, *то* $f \in \Omega_N(G,l)$.

Доведення. Нехай $\{f_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ – підпослідовність послідовності $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збіжна всередині G до функції f, $z \in G$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки послідовність $\left\{\dfrac{f_k^{*(j)}(z)}{j!l^j(z)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до $\dfrac{f^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}$ для всіх $j = 0,1,2,...$, то існує $k_j \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\left|\frac{f_k^{*(j)}(z)}{j!l^j(z)} - \frac{f_k^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}\right| < \varepsilon$$

або

$$\frac{|f_k^{*(j)}(z)|}{j!l^j(z)} < \frac{|f_k^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} + \varepsilon$$

для всіх $k > k_j$, $j = 0,1,2,...$ Нехай $m = \max\{k_0, k_1, ...k_N\}$. Тоді

$$\frac{|f_{m+n}^{*(j)}(z)|}{j!l^j(z)} < \frac{|f_k^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} + \varepsilon \tag{6}$$

для всіх n і $j = 0,1,...,N$. Оскільки кожна $f_{m+n}^* \in \Omega_N(G,l)$, то з (6) отримуємо

$$c_{f_{m+n}^*}(z) < c_f(z) + \varepsilon$$

для всіх n. А це означає, що підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\{c_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$, обмежена в точці z. (Насправді ми довели, що підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^{\infty}$ обмежена в кожній точці області G).

Навпаки, нехай $z_0 \in G$ – деяка точка, а підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\{c_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в точці z. Покажемо, що існує підпослідовність $\{f_p^{**}\}_{p=1}^{\infty}$ послідовності $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, рівномірно збіжна на кожному компакті з G. Нехай $S \subset G$ – компакт. Існують обмежена множина $\tilde{S} \subset G$ така, що $z \in \tilde{S}$ і $S \subseteq \tilde{S}$, і число $M > 0$ таке, що $c_{f_k^*}(z_0) \leqslant M$ для всіх k. За теоремою 1 існує додатне число $P = P(\tilde{S}, N, l)$ таке, що

$$c_{f_k^*}(z) \leqslant P c_{f_k^*}(z_0) \leqslant PM$$

для всіх k і $z \in S$. Оскільки $|f_k^*(z)| \leqslant c_{f_k^*}(z)$ для всіх z, маємо

$$|f_k^*(z)| \leqslant PM$$

для всіх $z \in S$ і $k = 1,2,...$ Тоді за теоремою Монтеля існує підпослідовність $\{f_p^{**}\}_{p=1}^{\infty}$ послідовності $\{f_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, що рівномірно збігається всередині G до деякої аналітичної функції f. Оскільки $\{f_p^{**}\}_{p=1}^{\infty}$ теж підпослідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, то частину (i) доведено.

Доведемо частину (ii). Нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається всередині G до функції f. За теоремою Вейєрштрасса f – аналітична в G. Покажемо, що $c_f(z) = \tilde{c}_f(z) = \max\left\{\dfrac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} : k \in \mathbb{Z}_+\right\}$ для всіх $z \in G$. Нехай $z \in G$. Припустимо, що

$c_f(z) < \tilde{c}_f(z)$ і $\tilde{c}_f(z) = \dfrac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)}$, $p > N$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $2\varepsilon < \delta$, де $0 < \delta = \tilde{c}_f(z) - c_f(z)$. Оскільки послідовність $\left\{\dfrac{f_n^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $\dfrac{f^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}$, міркуючи так само як в частині (i), знайдемо $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{|f_{m+n}^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} < \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} + \varepsilon$$

для всіх n і $j = 0, 1, ..., N$. Оскільки $f_k \in \Omega_N(G, l)$ для всіх k, то

$$c_{f_{m+n}}(z) < c_f(z) + \varepsilon \tag{7}$$

для кожного n. Існує $s \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} < \frac{|f_{s+n}^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} + \varepsilon \tag{8}$$

для всіх n. Нехай $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$ такі, що $m + n_1 = s + n_2 = q$. Тоді з (7) і (8) отримуємо

$$c_f(z) + \delta = \tilde{c}_f(z) = \frac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} < \frac{|f_q^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant c_{f_q}(z) + \varepsilon < c_f(z) + 2\varepsilon < c_f(z) + \delta,$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, $c_f(z) = \tilde{c}_f(z)$ і тому $f \in \Omega_N(G, l)$.

1. *Шеремета М.М., Кушнір В.О.* Аналітичні функції обмеженого l-індексу // Матем. студії. – 1999. – Т.12. – N 1.– С.59-66.
2. *Bose A.K.* A Note on Entire Functions of Bounded Index //Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol.21. – N 2. – P.257-262.

ON THE COMPACTNESS OF THE SET OF ANALYTIC IN G FUNCTIONS OF BOUNDED l-INDEX

M. Borduljak, V. Kushnir

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let G be an arbitrary complex domain, and l be a positive continuous function in G such that

$$l(z) > \frac{\beta}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G,$$

where $\beta > 1$ is a constant.

The conditions of compactness of the set of analytic in G functions of bounded l-index are established.

Key words: analytic functions of bounded l-index.

Стаття надійшла до редколегії 06.10.2000

Прийнята до друку 03.07.2001