ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.45–50 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.45–50*

УДК 517.53

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ПОЛІСУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Оксана БОРОВА, Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано непокращувані асимптотичні формули для полісубгармонічних функцій нульового порядку.
Ключові слова: полісубгармонічні функції нульового порядку.

Нехай u – субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функція, μ-ії міра Рісса, $n(t,u) = n(t,\mu) = \mu(\{x : |x| < t\})$, cap E вінерова (при $m \geqslant 3$) або логарифмічна (при $m = 2$) ємність борелівської множини $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ ([1, с. 209]). Відносною ємністю E називатимемо величину ([2, с. 1295])

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{cap}(E\cap U(r))}{\operatorname{cap} U(r)}, \quad U(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leqslant r\}.$$

Вважатимемо, що функція u має нульовий порядок, якщо $\ln B(r,u) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, де $B(r,u) = \max\{u(x) : |x| = r\}$. Позначимо через $SH_m(0)$ клас субгармонічних в $\mathbb{R}^m, m \geqslant 2$ функцій u нульового порядку, $W(r) = r^{\lambda(r)}$, де $\lambda(r)$ – нульовий уточнений порядок $u(x)$ такий, що $W(r) \uparrow +\infty$ при $r \to +\infty$. Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $u(0) = 0$. u – гармонічна в околі точки нуль.

Підкласи функцій u класу $SH_m(0)$, для яких виконується

$$n(r,u) = o\big(r^{m-2}W(r)\big), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

називатимемо допустимими класами функцій.

У [3] доведено, що клас функцій $SH_2(0)$ є допустимим та наведено приклад субгармонічної в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ функції, для якої умова (1) не виконується.

У [4] показано, що множина субгармонічних в $\mathbb{R}^m, m \geqslant 3$ функцій нульового порядку, замкнена стосовно множення на додатні сталі перетворень $x \mapsto kx, (k > 0)$ граничного переходу в просторі узагальнених функцій $D'(\mathbb{R}^m)$, і яка не містить ніяких обмежених зверху в $\mathbb{R}^m$ функцій, крім сталих, є допустимим класом функцій. Зокрема, допустимим класом буде множина полісубгармонічних (а, отже, плюрісубгармонічних) в $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ функцій.

У випадку $m \geqslant 3$ приймемо

$$I(x,u) = \int\limits_{|a-x|\leqslant|x|} \left(|x-a|^{2-m} - |x|^{2-m}\right) d\mu(a),$$

$$N(r,u) = \int\limits_{|a|\leqslant r} \left(|a|^{2-m} - r^{2-m}\right) d\mu(a) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t^{m-1}}\,dt,$$

а при $m = 2$

$$I(x,u) = \int\limits_{|a-x|\leqslant|x|} \ln\frac{|x|}{|a-x|}\,d\mu(a),$$

$$N(r,u) = \int\limits_{|a|\leqslant r} \ln\frac{r}{|a|}\,d\mu(a) = \int\limits_{1}^{r} \frac{n(t,u)}{t}\,dt.$$

Для субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$ функцій з допустимих класів є правильними такі асимптотичні формули ([4]):

$$u(x) = -I(x,u) + N(r,u) + o(W(r)), \quad r = |x| \to \infty, \tag{2}$$

$$u(x) = N(r,u) + o(W(r)), \quad x \to \infty, \quad x \notin E, \tag{3}$$

де E – множина нульової відносної ємності.

У цій праці уточнимо асимптотичні формули (2) та (3) для полісубгармонічних $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ функцій.

Нагадаємо, що функція $u(x) = u(z_1, \ldots, z_n)$ називається полісубгармонічною в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, якщо для кожного $i = 1, 2, \ldots n$ функція $u(z_1^\circ, \ldots, z_{i-1}^\circ, z_i, z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n^\circ)$ є субгармонічною в $\mathbb{C}$ функцією змінної z_i при довільних фіксованих змінних $z_1^\circ, \ldots, z_{i-1}^\circ, z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n^\circ$.

Позначимо через $pSH_{2n}(0)$ – клас полісубгармонічних в $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ функцій нульового порядку. Нехай $u \in pSH_{2n}(0)$, μ– міра Рісса функції $u, (z_i, Z_i^\circ) = (z_1^\circ, \ldots, z_{i-1}^\circ,$
$z_i, z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n^\circ)$, $Z_i^\circ = (z_1^\circ, \ldots, z_{i-1}^\circ, z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n^\circ)$, $n(r; u(x)) = \mu(\{x \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leqslant r,\ i = 1, 2, \ldots n\})$, $n(r; u(z_i, Z_i^\circ)) = \mu(\{(z_i, Z_i^\circ) \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leqslant r\})$,

$$N(r; u(x)) = (2n-2)\int\limits_0^r \frac{n(t; u(x))\,dt}{t^{2n-1}}, \qquad N(r; u(z_i, Z_i^\circ)) = \int\limits_0^r \frac{n(t; u(z_i, Z_i^\circ))\,dt}{t}.$$

Приймемо $\delta(r) = \delta(r; W) = \sup\left\{\dfrac{tW'(t)}{W(t)} : t \geqslant r\right\}$. Оскільки $W(r)$ – повільно зростаюча функція, тобто $W(2r) \sim W(r)$, $r \to \infty$, то за лемою 3 з [5] отримуємо $W(r\exp(1/\delta(r))) \leqslant e\,W(r)$.

Теорема 1. *Якщо* $u \in pSH_{2n}(0)$, *то*

$$n(r; u(x)) = O(\delta(r) r^{\lambda(r)+2n-2}), \quad r = |x| \to \infty. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо $z_j = \xi_j + i\zeta_j$, $D(r) = \{x \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leqslant r, j = 1, \ldots, n\}$, $D_i(r) = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : |z_j| \leqslant r, j \neq i\}$, $d\omega = d\xi_1 \cdot d\zeta_1 \cdot \ldots \cdot d\xi_n \cdot d\zeta_n$– елемент об'єму в $\mathbb{C}^n$, $d\omega_i = d\xi_1 \cdot d\zeta_1 \cdot \ldots \cdot d\xi_{i-1} \cdot d\zeta_{i-1} \cdot d\xi_{i+1} \cdot d\zeta_{i+1} \cdot \ldots \cdot d\xi_n \cdot d\zeta_n$, Δu– лапласіан функції u, $e_2 = 2\pi$, $e_{2n} = (2n-2)c_{2n} = (2n-2)2\pi^n/\Gamma(n)$, $n \geqslant 2$. Нехай $u \in pSH_{2n}(0)$. Для двічі неперервно диференційовних функцій u маємо

$$n(r; u(x)) = e_{2n}^{-1}\int\limits_{D(r)} \Delta u\,d\omega = e_{2n}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D(r)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta_i^2}\right)d\,\omega =$$

$$= 2\pi e_{2n}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D_i(r)} n(r; u(z_i, Z_i^\circ))\,d\omega_i. \tag{5}$$

Використовуючи відомі теореми про граничний перехід, отримуємо, що ліва і права частини (5) рівні і для всіх $u \in pSH_{2n}(0)$.

Припустимо, що існують функція $\psi(r)$, $\psi(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ і послідовність (r_k), $r_k \to +\infty$, $k \to +\infty$ такі, що для деякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int\limits_{D_i(r)} n(r_k; u(z_i, Z_i^\circ))\, d\omega_i \geqslant \psi(r_k) W(r_k) \delta(r_k) (\pi r_k^2)^{n-1}.$$

Тоді існують (z_i, Z_{ik}°), $Z_{ik}^\circ \in D_i(r)$ такі, що

$$n(r_k; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \geqslant \psi(r_k) \delta(r_k) W(r_k).$$

Враховуючи означення $N(r; u(z_i, Z_i^\circ))$, для $r \geqslant r_k$ отримуємо

$$N(r; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \geqslant n(r_k; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \ln(r/r_k).$$

Прийнявши, що $r'_k = r_k \exp(1/\delta(r_k))$, маємо

$$N(r'_k; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \geqslant \psi(r_k) W(r_k). \tag{6}$$

Якщо виконується

$$N(r; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \leqslant N(2r; u(x)) 2^{2(n-1)}, \tag{7}$$

то з (6) отримуємо $(k \to \infty)$

$$2^{2(n-1)}\, O(W(2r'_k)) \geqslant \psi(r_k) W(r_k).$$

Враховуючи, що функція $W(r)$ повільно зростаюча і $W(2r'_k) \leqslant e\, W(r_k)$, $k \to +\infty$, одержуємо протиріччя.

Отже,

$$\int\limits_{D_i(r)} n(r; u(z_i, Z_i^\circ))\, d\omega_i = O(\delta(r) r^{\lambda(r)+2n-2}), r \to \infty,$$

і, враховуючи (5), отримуємо твердження теореми 1.

Залишилось довести (7). За формулою Йенсена маємо

$$N(r;\ u(z_1 + z_1^\circ, \ldots, z_{i-1} + z_{i-1}^\circ, z_i, z_{i+1} + z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n + z_n^\circ)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} u(z_1^\circ + re^{i\phi_1}, \ldots, z_{i-1}^\circ + re^{i\phi_{i-1}}, re^{i\phi_i}, z_{i+1}^\circ +$$

$$+ re^{i\phi_{i+1}}, \ldots, z_n^\circ + re^{i\phi_n}) d\,\phi_1 \cdot \ldots \cdot d\,\phi_n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z_1^\circ, \ldots, z_{i-1}^\circ, re^{i\phi_i}, z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n^\circ) d\,\phi_i = N(r;\ u(z_i, Z_i^\circ)).$$

Далі для $|z_i^\circ| \leqslant r, i = 1, 2, \ldots n$, одержуємо

$$n(r;\ u(z_1 + z_1^\circ, \ldots, z_{i-1} + z_{i-1}^\circ, z_i, z_{i+1} + z_{i+1}^\circ, \ldots, z_n + z_n^\circ)) =$$

$$= \mu(\{\ x \in \mathbb{C}^n : |z_j + z_j^\circ| \leqslant r,\ j \neq i,\ |z_i| \leqslant r\}) \leqslant \mu(\{|z_j| \leqslant r + |z_j^\circ|,\ j \neq i,\ |z_i| \leqslant r\};$$

$$u(x)) \leqslant\leqslant n(2r;\ u(x)).$$

Звідси

$$N(2r;u(x)) = (2n-2)\int_0^{2r}\frac{n(t;u(x))}{t^{2n-1}}\,dt = (2n-2)\,2^{2n-2}\int_0^{r}\frac{n(2t;u(x))}{t^{2n-1}}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-2n}N(r;u(z_1+z_1^\circ,\dots,z_{i-1}+z_{i-1}^\circ,z_i,z_{i+1}+z_{i+1}^\circ,\dots,z_n+z_n^\circ)) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-2n}N(r;u(z_i,Z_i^\circ)),$$

і (7) доведено. Теорема 1 повністю доведена.

Зауваження. У випадку $n=1$ приклад міри μ, для якої $n(t,\mu)=\ln^p t$, $p>0, t\geqslant e$ засвідчує, що оцінка (4) є точною. Справді, тоді $N(r,\mu)=\dfrac{\ln^{p+1}t}{p+1}=W(t)$, $\delta(t)=\dfrac{p+1}{\ln t}$, а $n(t,\mu)=\ln^p t=\delta(t)W(t)$.

Наслідок 1. *Якщо u - плюрісубгармонічна в $\mathbb{R}^{2n}$ функція нульового порядку, то виконується (4).*

Оскільки кожна плюрісубгармонічна функція є полісубгармонічною, то твердження наслідку зразу випливає з теореми 1.

Теорема 2. *Нехай $u\in pSH_{2n}(0)$, ψ - довільна функція, $\psi(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$. Тоді*

$$u(x) = -I(x,u)+N(r;u(x))+O(\delta(r)W(r)),\quad r=|x|\to+\infty, \tag{8}$$

$$I(x,u)=o(\psi(r)\delta(r)W(r)),\quad x\to\infty,\quad x\notin E, \tag{9}$$

де E - множина нульової відносної ємності.

Доведення. Щоб отримати співвідношення (8), використаємо метод праці [3] та твердження теореми 1. Справді, приймемо, що $m=2n$ і запишемо

$$u(x)=\Big\{\int\limits_{|a|\leqslant 2r}+\int\limits_{|a|>2r}\Big\}(|a|^{2-m}-|x-a|^{2-m})\,d\mu(a)=I_1+I_2.$$

Для I_1 маємо

$$I_1=-I(x,u)+N(2r;u(x))-\int\limits_{D(x,a)}|x-a|^{2-m}\,d\mu(a)-r^{2-m}n(r,x)+(2r)^{2-m}n(2r,u),$$

де $D(x,a)=\{a\in\mathbb{R}^m:|x-a|>r,|a|\leqslant 2r\}$, $n(r,x)=\mu\{t:|t-x|\leqslant|x|\}$). Оскільки

$$0\leqslant\int\limits_{D(x,a)}|x-a|^{2-m}\,d\mu(a)\leqslant n(2r;u(x))r^{2-m},\quad n(r,x)\leqslant n(2r;u(x)),$$

$$N(2r;u(x))=N(r;u(x))+d_m\int_r^{2r}\frac{n(t;u(x))}{t^{m-1}}\,dt\leqslant N(r;u(x))+n(2r;u(x))r^{2-m},$$

$$n(r;u(x))=O(\delta(r)r^{\lambda(r)+2n-2}),$$

то

$$I_1 = -I(x,u) + N(r;u(x)) + O(\delta(r)W(r)), \quad r \to +\infty.$$

Враховуючи, що для $t \geqslant 2r$ виконується

$$t^{m-2} - (t-r)^{m-2} \leqslant (m-2)t^{m-3}r,$$

$$(t+r)^{m-2} - t^{m-2} \leqslant (m-2)(3/2)^{m-3}t^{m-3}r,$$

одержуємо

$$I_2 \leqslant \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{(t+r)^{m-2} - t^{m-2}}{(t+r)^{m-2}t^{m-2}}\, dn(t;u(x)) \leqslant C_1 r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t,u)}{t^{m-1}},$$

$$I_2 \geqslant \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{(t-r)^{m-2} - t^{m-2}}{(t-r)^{m-2}t^{m-2}}\, dn(t;u(x)) \geqslant -C_2 r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t,u)}{t^{m-1}},$$

де C_1, C_2 - деякі додатні сталі.

Враховуючи теорему 1 та повільне зростання функції $W(r)$, маємо

$$r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t;u(x))}{t^{m-1}} \leqslant r(m-1) \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{n(t;u(x))}{t^m}\, dt = O(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{n(t;u(x))}{t^m}\, dt =$$

$$= O(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n(2^{k+1}r;u(x))}{(2^k r)^{m-1}} = O(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\delta(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{m-2}W(2^{k+1}r)}{(2^k r)^{m-1}} =$$

$$= O(1)\delta(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1+o(1))^{k+1}W(r)}{2^{k-m+2}} = O(\delta(r)W(r)), \quad r \to +\infty,$$

що доводить співвідношення (8).

Доведемо співвідношення (9). Не зменшуючи загальності, вважаємо, що функція $\psi(r)$, $r \in [0,+\infty)$ є зростаючою. Приймемо для $\alpha > 0$

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^m : I(x;\mu) \geqslant \alpha\psi(r)\delta(r)W(r)\}.$$

Покажемо, що при $k \to +\infty$

$$\operatorname{cap}\, [E_\alpha \cap U(2^k) \setminus U(2^{k-1})]/\operatorname{cap} U(2^k) \to 0. \tag{10}$$

Справді, якщо це не так, то для деякого $\gamma > 0$ і послідовності (k_s), $k_s \to +\infty$, $s \to +\infty$,

$$\operatorname{cap}[E_\alpha \cap U(2^{k_s}) \setminus U(2^{k_s-1})] \geqslant 2\gamma \operatorname{cap} U(2^{k_s}).$$

Виберемо компакт $L_{k_s} \subset E_\alpha \cap U(2^{k_s}) \setminus U(2^{k_s-1})$ так, щоб

$$\operatorname{cap} L_{k_s} \geqslant \gamma \operatorname{cap} U(2^{k_s}).$$

Нехай ν_{k_s} – рівноваговий розподіл одиничної міри на L_{k_s}. Тоді

$$\int\limits_{L_{k_s}} I(x,u)\, d\nu_{k_s}(x) \geqslant \alpha\psi(2^{k_s-1})\delta(2^{k_s-1})W(2^{k_s-1}). \tag{11}$$

З іншого боку, маємо

$$\int\limits_{L_{k_s}} I(x,u)\,d\nu_{k_s}(x) \leqslant \int\limits_{L_{k_s}} d\nu_{k_s}(x) \int\limits_{|x-a|\leqslant|x|} |x-a|^{2-m}\,d\mu(a) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|a|\leqslant 2^{k_s+1}} d\mu(a) \int\limits_{L_{k_s}} |x-a|^{2-m}\,d\nu_{k_s}(x) = (\operatorname{cap} L_{k_s})^{-1} n(2^{k_s+1}; u(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{-1} 2^{-k_s(m-2)} O(\delta(2^{k_s+1}) W(2^{k_s+1})(2^{k_s+1})^{m-2}) = O(\delta(2^{k_s}) W(2^{k_s-1}))$$

при $s \to +\infty$, що суперечить (11). Отже, співвідношення (10) доведено.

З (10), застосовуючи метод доведення теореми 2 праці [2] та лему з [2, с. 1295], отримуємо співвідношення (9). Теорема 2 доведена.

---

1. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. – М., 1966.
2. *Фаворов С.Ю.* О множествах понижения для субгармонических функций регулярного роста// Сиб. матем. журн. - 1979. - Т.20. - №6. – С.1294-1302.
3. *Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка// Матем. заметки. – 1983. – Т.34. – №2. – С.227-236.
4. *Заболоцкий Н.В., Фаворов С.Ю.* Асимптотические формулы субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций нулевого порядка// Теория функций, функц. анализ и их прилож. Харьков. – 1987. – Вып.47. – С.125-128.
5. *Братищев А.В., Коробейник Ю.В.* О некоторых характеристиках роста субгармонических функций// Матем. сб. – 1978. – Т.106. – №1. – С.44-65.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF POLISUBHARMONICAL FUNCTIONS

O. Borova, M. Zabolotskii

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

There is obtained unsharpened asymptotic formulas for polisubharmonics functions of zero order.

Key words: polisubharmonics functions of zero order.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.2000

Прийнята до друку 03.07.2001